BCPST 2_A

DEVOIR SURVEILLE

MATHÉMATIQUES

Samedi 7 septembre 2024

(2 heures)

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités ***à encadrer*** *dans la mesure du possible les conclusions.*

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 2 pages.

Les questions les plus délicates sont indiquées avec des $(*)$.

Exercice 0

1) Montrer que pour tout $p \in [0,1]$, $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $f : x \longmapsto \cos^{n+1}(x)$. Calculer la dérivée de f.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x+1}$

1) Déterminer le tableau de variations de f.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $[1,+\infty[$, notée α_n.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \alpha_n > e^n \quad$ et en déduire la limite de $\dfrac{n}{\alpha_n}$ quand n tend vers $+\infty$.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{\alpha_n}{e^n} = e^{\frac{n}{\alpha_n}}$
5) En déduire que : $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$.

Exercice 2

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1) *Le but de cette question est de déterminer la limite de (S_n).*
   a) Quelle est la monotonie de (S_n) ?
   b) On note $D_n = S_{2n} - S_n$,
      i. Montrer que (D_n) est croissante.
      ii. En déduire que (D_n) ne converge pas vers 0.
   c) Conclure.
2) a) Justifier qu'il existe un entier n pour lequel $S_n \geqslant 10$.
   b) Ecrire un programme en Python permettant de déterminer le premier n pour lequel $S_n \geqslant 10$.

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par : $\quad u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$

3) a) $(*)$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad A_{2n} = D_n$.

(Deux approches possibles : séparer les termes d'indices pairs et impairs ou une récurrence)

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $D_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et que (D_n) converge vers $\ln(2)$ $(*)$.

(ici une $(*)$ car on utilise ici les sommes de Riemann, non revues cette année)

c) En déduire que (A_n) converge aussi vers $\ln(2)$

On note σ l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \sigma(3k-2) = 2k-1 \qquad \sigma(3k-1) = 4k-2 \qquad \sigma(3k) = 4k$$

On admet que l'on définit ainsi une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

On note $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{\sigma(k)}$

4) a) Calculer B_6

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{4k-2} - \dfrac{1}{4k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k}\right)$.

c) $(*)$ En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{3n} u_{\sigma(k)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} u_k$

d) $(*)$ En déduire que (B_n) est convergente et préciser sa somme.

5) $(**)$ En notant U l'ensemble des termes de la suite (u_n), $\quad$ que pensez-vous de la notation $\displaystyle\sum_{x\in U} x$?

Autrement dit : peut-on définir la somme de tous les termes de la suite (u_n) ?

Exercice 3

Partie 1.

1) Démontrer que : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2) Illustrer l'encadrement précédent en traçant les trois courbes concernées. *On prendra pour unité : 2cm.*

Partie 2.

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

1) La suite (u_n) est-elle géométrique ? si oui préciser sa raison.

2) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\quad u_n > 0$ et $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

On note pour tout entier naturel n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ $\quad$ et $\quad T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}$.

3) Démontrer, en utilisant le 1) de la Partie 1, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\quad S_n - \dfrac{1}{2}T_n \leqslant \ln(u_n) \leqslant S_n$

4) a) Exprimer S_n et T_n en fonction de l'entier n.

b) En déduire que les suites (S_n) et (T_n) convergent vers des réels que l'on déterminera.

5) a) Etudier la monotonie de la suite $(\ln(u_n))$.

b) En déduire que (u_n) est convergente (*vers un réel noté ℓ qu'on n'essayera pas de déterminer*).

c) Démontrer que : $e^{\frac{5}{6}} \leqslant \ell \leqslant e$.

FIN DU SUJET