

## CONCOURS ABCPST - SESSION 2024

### RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

L'objectif de ce rapport n'est pas d'accabler les candidats en énumérant les erreurs qu'ils ont pu commettre mais de pointer certaines lacunes récurrentes afin d'aider les futurs candidats dans leur préparation.

De façon générale, la présentation des copies est à améliorer. Mettre en valeur ses résultats et rendre une copie soignée sont des compétences grandement appréciées par les correcteurs et qu'il n'est pas difficile d'acquérir en s'entraînant. Une bonne utilisation des parenthèses est nécessaire pour marquer la priorité des opérations à effectuer.

Les questions de cours sont l'occasion pour les candidats de montrer leur sérieux, il ne faut pas les négliger. Lorsqu'il est explicitement demandé de prouver un résultat, on ne peut pas se contenter de dire qu'il apparaît dans le cours ou de citer son nom.

Lors de l'utilisation d'un théorème ou d'un résultat démontré dans une question précédente, il est nécessaire de s'assurer que ses hypothèses sont vérifiées. Il est tout à fait possible d'utiliser un résultat d'une question précédente même si l'on n'a pas réussi à la traiter, mais il est souhaitable de préciser de façon explicite à quelle question on fait référence. Évidemment, il convient de mettre des majuscules aux noms propres.

On ne peut que conseiller aux candidats de bien lire les questions et de prendre le temps de justifier et rédiger les questions traitées plutôt que de se lancer dans un grappillage très rarement fructueux.

Le jury note cette année encore un écart entre le niveau des candidats et celui attendu. Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité de l'épreuve (qui est longue pour couvrir une large partie du programme) pour avoir une note excellente. Par contre, pour avoir une note correcte, il est nécessaire de connaître son cours, de savoir raisonner, rédiger et calculer.

# Problème 1 :

## I. Résultats préliminaires

- (a) Question quasiment toujours bien traitée. On ne pouvait bien sûr pas se contenter de citer la formule du pion ou du capitaine ;  
(b) Seuls 45 % des candidats ont traité et réussi cette question. On ne peut, là non plus, pas se contenter de citer la formule de Pascal.  
De très rares candidats proposent une preuve combinatoire.
- Il s'agissait d'une question de cours abordée dans quasiment toutes les copies et avec succès dans près de 70 % des cas.

Les erreurs les plus fréquentes portent sur l'oubli de la fonction indicatrice.

Attention également aux parenthèses :  $1 - e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \neq (1 - e^{-\lambda x}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ .

- (a) Question fréquemment traitée, mais moins de 10 % des copies ont la totalité des points notamment du fait de l'absence de justifications.
  - Il fallait invoquer la décroissance de  $t \mapsto \frac{1}{t}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et utiliser l'hypothèse  $i > 1$  pour avoir  $i - 1 \in \mathbb{R}_+^*$  ;
  - La croissance de l'intégrale devait être mentionnée. Attention, elle conduit à une implication :  $f \leq g$  sur  $[a, b]$  n'équivaut pas à  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$  ;
  - De rares candidats utilisent un schéma, ce qui est une bonne approche, mais ils mentionnent les aires des intégrales sans indiquer à quelle aire correspond  $\frac{1}{i}$ , ce qui est dommage et ne permet pas de donner la bonne inégalité. Même avec un schéma, il faut préciser que cela fonctionne grâce à la décroissance de la fonction.

Certains candidats essaient d'autres méthodes, comme une étude de fonctions. L'idée est bonne, mais il faut se montrer rigoureux, ce qui est trop rarement le cas. Quelques copies tentent d'utiliser les accroissements finis, mais à nouveau une rédaction solide est très rare.

- (b) Ce résultat classique n'a été correctement traité que dans 25 % des cas.  
La définition correcte de  $u \sim v$  a été valorisée car sa connaissance est peu maîtrisée :  $u_n \sim v_n$  ne signifie pas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$  et  $u_n \sim v_n$  n'implique pas forcément  $\ln u_n \sim \ln v_n$ .

Enfin, obtenir  $u_n \sim 0$  devrait alerter et écrire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = \ln n$  n'a pas de sens.

- (c) Question classique traitée par 2/3 des copies mais moins de 10 % d'entre elles ont eu tous les points.
  - Il fallait sommer à partir du rang 2 pour éviter une intégrale généralisée divergente en 0 ;
  - Obtenir  $\int_0^n \frac{1}{t} dt$  ou  $\ln(n+1) \leq \dots \leq \ln n$  devrait interroger ;
  - Le théorème d'encadrement pour les équivalents n'est pas au programme de BCPST, il fallait donc tout diviser par  $\ln n$  pour  $n > 1$  et se ramener ainsi à un théorème d'encadrement sur les limites.

## II. Quelques résultats autour de la loi exponentielle

- Globalement, la décomposition de l'événement  $(X_{(1)} > x)$  est correcte et l'utilisation de l'indépendance des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  est mentionnée. Il ne fallait pas oublier de traiter le cas  $x$  négatif pour obtenir la loi de  $X_{(1)}$ .

5. Certains prennent le résultat donné et montrent qu'ils ont une densité de probabilité mais ne montrent pas que c'est une densité de  $X_{(n)}$ .

Le résultat étant donnée, il s'agissait de le justifier. Rappelons que  $X$  admet une densité si, et seulement si, sa fonction de répartition est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en un nombre fini de points. Si l'obtention avec justification de la fonction de répartition sur  $\mathbb{R}^+$  est souvent correcte, l'obtention sur  $\mathbb{R}^-$  est oubliée, ainsi que la régularité.

Attention aux parenthèses :  $\prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda x}) \neq \prod_{i=1}^n 1 - e^{-\lambda x}$ .

6. L'existence de l'espérance n'était pas assurée, on ne pouvait donc pas la manipuler sans précautions.

La question était technique : le binôme de Newton a été correctement utilisé mais le calcul de l'intégrale a posé problème :

- On pouvait reconnaître qu'à une constante multiplicative près, il s'agissait de l'espérance d'une loi exponentielle, mais la constante était souvent fautive et certaines copies sont allées jusqu'à modifier leur question 2 initialement juste pour obtenir le résultat attendu ;
  - On pouvait procéder par intégration par parties généralisée. On souligne alors la nécessité de confirmer la convergence de tous les termes apparaissant dans une telle formule.
7. (a) La question n'a été traitée que par 60 % des copies, correctement dans 60 % des cas ;

- (b) Question de synthèse traitée dans moins de la moitié des copies. La rédaction correcte de la récurrence a été valorisée de même que les copies amorçant l'hérédité en utilisant la formule de Pascal .

8. Question traitée dans 1/3 des copies avec succès dans plus de 70% des cas. Les résultats cohérents avec la question 3c ont eu la totalité des points

9. Question peu traitée.

10. Question peu traitée.

### III. Loi de Gumbel

11. La continuité et la positivité ont souvent été citées. La question a été problématique pour le calcul de l'intégrale impropre.

- Les hypothèses d'un changement de variables pour les intégrales impropres ne sont que trop rarement mentionnées. Le fait que le changement de variable soit donné par l'énoncé ne dispense pas de vérifier qu'il est licite surtout sur une intégrale généralisée.
- Le changement d'écriture de l'intégrale après changement de variable reste très problématique, ce qui amène à des erreurs pour trouver 1 à la fin.
- Certains reconnaissent une primitive, ce qui simplifiait beaucoup la question.

12. La réponse étant donnée, les points sont attribués au raisonnement. Exemple de niveau de rigueur attendu, les points valorisés sont encadrés.

On détermine la fonction de répartition de  $Y$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(-\ln X_1 \leq x) = \mathbb{P}(\ln X_1 \geq -x)$$

Comme  $\exp$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que :

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \geq e^{-x}) = 1 - \mathbb{P}(X_1 < e^{-x})$$

Or  $X_1$  est à densité donc :

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq e^{-x}) = 1 - F_{X_1}(e^{-x})$$

Enfin,  $X_1$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  et  $e^{-x} > 0$  donc :

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = 1 - (1 - \exp(-\lambda e^{-x})) = \exp(-\lambda e^{-x})$$

On constate alors que  $F_Y$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  (grâce aux théorèmes d'opérations). On peut donc conclure que  $Y$  est à densité de densité :

$$f'_Y : x \mapsto \lambda e^{-x} \exp(-\lambda e^{-x})$$

Autrement dit  $Y$  suit une loi de Gumbel.

13. La réponse étant donnée, les points sont attribués au raisonnement. Exemple de niveau de rigueur attendu, les points valorisés sont encadrés.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n > -x$ , on peut écrire :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

Comme  $\frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , on sait que  $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n}$ . On en déduit que  $n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$  et, par continuité de  $\exp$ , on peut conclure que :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$$

14. Question très peu abordée. À noter que le jury a récompensé ceux qui écrivaient la définition de la convergence en loi.

## Problème 2 :

1. Il s'agit d'une question de cours traitée dans 2/3 des cas mais réussie uniquement dans 6 %.  
De nombreux candidats se sont contentés de vérifier que les produits matriciels avaient un sens et que les deux matrices avaient la même taille.
2. Encore une question de cours mal réussie traitée dans 60 % des copies mais correctement uniquement dans 55 % d'entre elles.  
On pouvait montrer que les deux égalités  $M^T(M^{-1})^T = I_n$  et  $(M^{-1})^T M^T = I_n$ , ou utiliser que le rang d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes pour obtenir l'inversibilité de  $M^T$  puis déterminer son inverse à l'aide d'une des deux égalités précédentes.
3. Le sens facile n'a que très rarement été identifié. On note aussi des erreurs de logique dans ce raisonnement par double inclusion.
4. Il convient d'expliquer que  $A^T A$  est symétrique en calculant  $(A^T A)^T$ , de spécifier que  $A^T A$  est à coefficients réels et d'invoquer le théorème spectral.
5. Question classique de diagonalisation explicite d'une matrice de taille 3 qui a été identifiée par les candidats qui l'ont traitée dans plus de 80 % des cas. Elle a été, cette année, très mal menée.  
Beaucoup de candidats étudient  $A$  au lieu de  $A^T A$  ou se trompent dans le calcul de  $A^T A$ . On constate beaucoup d'erreurs de calcul et, au final, très peu de candidats trouvent le spectre et moins de 15 % des candidats la traitant arrivent au bout de cette question.
6. L'utilisation correcte des quantificateurs n'est pas acquise dans cette définition.
7. Question peu traitée et globalement mal notamment avec des inverses de matrices rectangulaires.
8. Question peu traitée.
9. Question peu traitée.
10. Question calculatoire peu traitée et qui, lorsqu'elle l'a été, a montré des faiblesses en calcul pourtant élémentaires notamment dans le calcul de l'inverse d'une matrice de taille 2.