Devoir à la maison à rendre le jeudi 14 novembre 2024

Ce problème est consacré à l'étude d'une fonction f, solution d'une équation différentielle (**partie A**) dont on détermine les coefficients du développement limité en 0 dans la **partie B**.

La **partie C** est relative à l'étude d'une variable aléatoire discrète dans un cas élémentaire, cette étude étant généralisée dans la **partie D**.

Partie A : Une fonction

1) On considère l'équation différentielle (E) suivante à résoudre sur l'intervalle $]-\infty, 1[$:

$$y + (x-1)y' = \mathrm{e}^{-x}$$

a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

b) Résoudre (E). *(On utilisera la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière)*

2) On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \left]-\infty, 1\right[, \quad f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x(1-x)}$

a) Démontrer que f est l'unique solution de (E) satisfaisant à la condition initiale $y(0) = 1$.

b) Étudier les variations de f et ses limites en $-\infty$ et 1 .

3) Donner, en justifiant, le développement limité à l'ordre de 2 de $f(x)$ au voisinage de 0.

Partie B : Une suite

f désigne toujours la fonction définie dans la **partie A**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note d_n le coefficient de x^n dans le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre n.

$$\text{pour tout } N \in \mathbb{N}, \qquad f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{n=0}^{N} d_n x^n \; + \; o(x^N)$$

1) a) Justifier l'existence de d_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Exprimer d_n en fonction de $f^{(n)}(0)$ et préciser $d_0,\ d_1$ et d_2.

2) a) Démontrer, par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left]-\infty, 1\right[, \quad (n+1)f^{(n)}(x) + (x-1)f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-x}$$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = d_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

Partie C : Trois chapeaux

Trois personnes sont invitées à une soirée, chacune de ces personnes arrivant avec un chapeau. Mais ces chapeaux sont redistribués de façon aléatoire à la fin de la soirée, de sorte que chaque invité repart avec exactement un chapeau.

On considère la variable aléatoire X qui à chacune de ces redistributions de chapeaux associe le nombre k d'invités ayant retrouvé leur propre chapeau.

1) a) Ecrire un programme Python permettant d'estimer l'espérance de X.

b) Avec un ordinateur, exécuter le programme précédent et donner la valeur obtenue.

2) a) Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ? Quel est le cardinal de cet univers ?

b) Écrire toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$.

c) Déterminer la loi de probabilité de X.

3) a) Calculer l'espérance de X.

b) Calculer sa variance.

Partie D : n chapeaux

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On généralise le problème de la partie C en considérant n personnes invitées à une soirée.

Chacune de ces personnes arrive avec un chapeau et ces chapeaux sont redistribués de façon aléatoire à la fin de la soirée, de sorte que chaque invité repart avec exactement un chapeau.

On note X_n la variable aléatoire qui désigne le nombre k d'invités ayant retrouvé leur propre chapeau.

Enfin on note $p_n = P(X_n = 0)$.

1) a) Ecrire une fonction Python permettant d'estimer p_n pour un entier n donné en argument.
Cette estimation se fera à l'aide d'une série de 10000 simulations.

b) Avec un ordinateur, donner l'estimation obtenue pour les valeurs $n = 3$ et $n = 20$.

c) Ecrire un programme permettant de représenter graphiquement p_n pour n allant de 2 à 30.

d) Avec un ordinateur, exécutez le programme précédent et recopiez sur votre copie la courbe obtenue.

2) a) Justifier que $p_1 = 0$, $\quad p_2 = \dfrac{1}{2}$ et $p_3 = \dfrac{1}{3}$

b) Déterminer p_4.

3) Dorénavant, on pose par convention $p_0 = 1$.

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X_n = k) = \dfrac{p_{n-k}}{k!}$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}}{k!} = 1$

c) En déduire enfin que (p_n) est caractérisée par : $\begin{cases} p_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!} \end{cases}$

Autrement dit : (p_n) est l'unique suite vérifiant cette propriété.

4) a) Démontrer que l'espérance de X_n est égale à 1 et interpréter ce résultat.

b) Calculer la variance de X_n.

5) On considère à nouveau la suite définie dans la partie B et on rappelle que celle-ci est caractérisée par :

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = d_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$$

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 0$

b) Démontrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!} = 1$

c) Déduire des questions précédentes que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = d_n$

6) a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

b) En déduire que (p_n) converge, donner sa limite et interpréter ce résultat.

$\sim\sim\sim$ *Fin de l'épreuve* $\sim\sim\sim$