Correction du devoir maison numéro 3

Partie A.

Sur $]-\infty,1[$, (E) est équivalente à l'équation différentielle linéaire du premier ordre *(toujours noté (E))* :

$$y' + \frac{1}{x-1}y = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x-1},$$

de la forme $y' + a(x)y = b(x)$, où les fonctions a et b sont continues sur $]-\infty,1[$.

1) a) On note (E_0) : $\quad y' + \dfrac{1}{x-1}y = 0 \quad$ l'équation différentielle homogène associée à (E).

La fonction $A : x \mapsto \ln|x-1|$ est une primitive de $a : x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ sur $]-\infty,1[$ et :

$$\forall x \in]-\infty,1[, \quad \mathrm{e}^{-\ln|x-1|} = \frac{1}{|x-1|} = \frac{1}{1-x}$$

On en déduit l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0) :

$$\mathscr{S}_0 = \left\{(]-\infty,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\lambda}{1-x}), \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(]-\infty,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\lambda}{x-1}), \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

b) Appliquons la méthode « de variation de la constante » en déterminant une solution particulière f_p de (E) de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{x-1}$, où λ est une fonction dérivable sur $]-\infty,1[$.

On a : $\forall x \in]-\infty,1[, \quad f_p'(x) + \dfrac{1}{x-1}f_p(x) = \dfrac{\lambda'(x)}{x-1}, \quad$ donc :

$$(f_p \text{ est solution de } (E)) \iff \forall x \in]-\infty,1[, \quad \frac{\lambda'(x)}{x-1} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x-1} \iff \forall x \in]-\infty,1[, \quad \lambda'(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On en déduit que la fonction : $]-\infty,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{x-1}$ est une solution particulière de (E) sur $]-\infty,1[$.

Notons que l'on peut écrire : $\forall x \in]-\infty,1[, \quad \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{x-1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}(1-x)}$.

On obtient en conclusion l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty,1[$:

$$\boxed{S = \left\{]-\infty,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^{x}(1-x)} + \frac{\lambda}{x-1}), \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

2) $\forall x \in]-\infty,1[, \quad f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}(1-x)}$

a) Pour tout réel λ, notons f_λ la fonction : $]-\infty,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}(1-x)} + \dfrac{\lambda}{x-1}$.

On a les équivalences suivantes : $\quad f_\lambda(0) = 1 \iff 1-\lambda = 1 \iff \lambda = 0$.

On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est l'unique solution de } (E) \text{ satisfaisant à la condition initiale } y(0) = 1.}$$

b) f est solution de (E), donc f dérivable sur $]-\infty,1[$ et $\quad \forall x \in]-\infty,1[, \quad f(x) + (x-1)f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

Il s'ensuit :

$$\forall x \in]-\infty,1[, \quad f'(x) = \frac{1}{x-1}\mathrm{e}^{-x} - f(x)) = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{x}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{x}(1-x)}\right) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}(x-1)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in]-\infty,1[, \quad f'(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}(x-1)^2}}$$

Donc, sur $]-\infty,1[$, $\quad f'(x)$ est du signe de x, ce qui implique que

f est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ et strictement croissante sur $[0,1[$.

En $+\infty$: $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{-1}{x\mathrm{e}^x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0^-$ *(croissances comparées)*, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

En 1 : $\lim\limits_{x\to 1^-} e^x(1-x) = 0^+$. donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) Pour tout x appartenant à $]-\infty,1[$:

$$
\begin{aligned}
f(x) = &\quad \mathrm{e}^{-x} \times \frac{1}{1-x} \\
\underset{x\to 0}{=} &\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right)\left(1 + x + x^2 + o\left(x^2\right)\right) \\
\underset{x\to 0}{=} &\left(1 + x + x^2\right) + \left(-x - x^2\right) + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right),
\end{aligned}
$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)}$$

Partie B :

1) a) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty,1[$, donc f admet un développement limité en 0 à tout ordre, ce qui justifie que $\boxed{d_n \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

b) D'après la formule de Taylor-Young, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o\left(x^n\right)$.

On en déduit, par unicité du développement limité : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}}$

On a déjà obtenu : $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$, ce qui conduit à :

$$\boxed{d_0 = 1, \quad d_1 = 0 \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{1}{2}.}$$

2) a) Montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-\infty,1\left[, \quad (n+1)f^{(n)}(x) + (x-1)f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\mathrm{e}^{-x}\right.$.

- Pour $n = 0$: la fonction f étant solution de (E), elle vérifie donc :

$$\forall x \in]-\infty,1[, \quad f(x) + (x-1)f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

on a bien :

$$\forall x \in]-\infty,1\Big[, \quad (0+1)f^{(0)}(x) + (x-1)f^{(0+1)}(x) = (-1)^0\mathrm{e}^{-x}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in]-\infty,1[, \quad (n+1)f^{(n)}(x) + (x-1)f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\mathrm{e}^{-x}$

On suppose que la propriété est vraie à un rang n

on en déduit en dérivant chacun des membres :

$$\forall x \in]-\infty,1[, \quad (n+1)f^{(n+1)}(x) + f^{(n+1)}(x) + (x-1)f^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-x}$$

ce qui donne :

$$\forall x \in]-\infty,1[, \quad (n+2)f^{(n+1)}(x) + (x-1)f^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-x}$$

On retrouve la propriété au rang $n+1$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-\infty,1[, \quad (n+1)f^{(n)}(x) + (x-1)f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\mathrm{e}^{-x}}$$

b) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)f^{(n)}(0) - f^{(n+1)}(0) = (-1)^n,$$

donc, d'après 1)b)

$$\underbrace{(n+1)n!}_{(n+1)!}\, d_n - (n+1)!d_{n+1} = (-1)^n,$$

d'où :

$$(n+1)!d_{n+1} = (n+1)!d_n - (-1)^n = (n+1)!d_n + (-1)^{n+1}.$$

Il s'ensuit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = d_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Partie C :

1) a)

```
import random as rd

def simul_X():
    L = [0, 1, 2]
    S = []
    for k in range(3):
        i = rd.randrange(3-k)
        S.append(L.pop(i))         # on simule un tirage succ. sans remise
    c = 0
    for k in range(3):
        if S[k] == k:              # c compte le nombre de point fixe
            c += 1
    return c

c = 0
N = 10000
for k in range(N):
    c += simul_X()     # On fait la moyenne des 10000 valeurs prises
print(c/N)
```

b) En exécutant le programme précédent on obtient par exemple : 0,9911

2) a) Numérotons A_1, A_2, A_3 les personnes invitées.
En considérant qu'un résultat de l'expérience aléatoire est la liste (i, j, k) telle que A_1, A_2, A_3 repartent respectivement avec le chapeau de A_i, A_j, A_k : l'univers Ω est l'ensemble des permutions des éléments de $\{1, 2, 3\}$, tous les événements élémentaires sont équiprobables,

$$\mathrm{Card}(\Omega) = 3! = 6.$$

b)

$$\Omega = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}.$$

c) On obtient alors sans difficulté le tableau de la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	1/3	1/2	0	1/6

En effet : $(X=0) = \Big\{(3,1,2), (2,3,1)\Big\}$ donc $\mathrm{card}(X=0) = 2$ ...

3) Avec des notations standard :

a)

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{3} kP(X=k) = 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = 1,$$

b) $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \sum_{k=0}^{3} k^2 P(X=k) = 1 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{6} = 2$, donc, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}(X))^2 = 2 - 1 = 1.$$

Partie D :

On prend pour univers Ω l'ensemble des permutations des éléments de $[\![1, n]\!]$, que l'on munit de la loi de probabilité uniforme P. On a : Card $(\Omega) = n!$. Notons que X_n prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

1) a)

```
def simul_X(n):
    L = [ k for k in range(n) ]
    S = []
    for k in range(n):
        i = rd.randrange(n-k)
        S.append(L.pop(i))
    c = 0
    for k in range(n):
        if S[k] == k:
            c += 1
    return c

def estime_p(n):
    c = 0
    N = 10000
    for k in range(N):
        if simul_X(n) == 0:
            c += 1
    return c/N

print(estime_p(3))
print(estime_p(20))
```

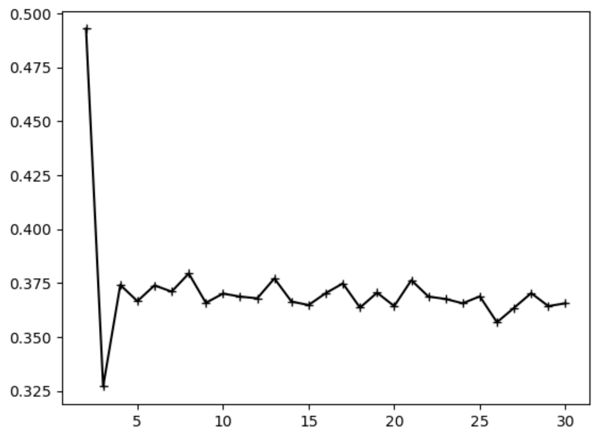
b) Le programme précédent affiche une estimation de p_3 et p_{20} :

```
0.3327
0.3733
```

c)

```
x = [ n for n in range(2, 31) ]
y = [ estime_p(n) for n in range(2, 31) ]
plt.plot(x, y, 'k+-')
plt.show()
```

d) Le programme précédent donne la courbe :



2) a) - Lorsqu'il n'y a qu'un seul invité, celui-ci repart avec son propre chapeau, donc : $\boxed{p_1 = 0}$.

- Lorsqu'il n'y a que deux invités, le premier qui prend un chapeau, choisit au hasard entre deux chapeau donc : $\boxed{p_2 = \frac{1}{2}}$.

- D'après C. 2. c. : $P(X_3 = 0) = \frac{1}{3}$, donc : $\boxed{p_3 = \frac{1}{3}}$.

b) Les résultats qui réalisent l'événements $(X_4 = 0)$ sont :

$$(2,1,4,3), (2,3,4,1), (2,4,1,3), (3,1,4,2), (3,4,1,2), (3,4,2,1), (4,1,2,3), (4,3,1,2), (4,3,2,1).$$

Donc :

$$p_4 = \frac{9}{4!} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3 \times 2} \qquad \boxed{p_4 = \frac{3}{8}}$$

3) a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

Construire une redistribution des chapeaux qui réalise l'événement $(X_n = k)$, c'est :

- choisir les k chapeaux qui repartiront avec leur propriétaire, il y a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ façons de le faire,

- puis choisir une redistribution des $n-k$ chapeaux restants de telle sorte qu'aucun ne soit attribué à son propriétaire, il y a Card $(X_{n-k} = 0)$ façons de le faire,

donc : $\quad \text{Card}\,(X_n = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \text{Card}\,(X_{n-k} = 0).$

on obtient :

$$\text{Card}\,(X_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \text{Card}\,(X_{n-k} = 0)$$

On peut ainsi conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P\,(X_n = k) = \frac{p_{n-k}}{k!}.}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des valeurs prises par X_n est inclus dans $[\![0, n]\!]$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n} P\,(X_n = k) = 1$$

autrement dit, d'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}}{k!} = 1$$

De plus, pour $n = 0$, l'assertion : " $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}}{k!} = 1$ " s'écrit : " $p_0 = 1$ ", ce qui est vrai d'après la convention fixée par l'énoncé, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}}{k!} = 1.}$$

c) Par convention : $p_0 = 1$, et d'après la question précédente, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!} = 1,$$

donc, en isolant le terme de la somme correspondant à $k = 0$: $p_{n+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!} = 1$, autrement dit :

$$p_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}$$

Il s'ensuit que la suite (p_n) vérifie les relations : $\begin{cases} p_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}. \end{cases}$

- De plus, d'après le principe de récurrence, ces relations permettent de calculer de proche en proche les termes de la suite (p_n), puisque dans la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}$ ne figurent que des p_i avec $0 \leq i \leq n$.

En conclusion :

$$\boxed{(p_n) \text{ est caractérisée par : } \begin{cases} p_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}. \end{cases}}$$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k) \underset{\text{D.3. a.}}{=} \sum_{k=0}^{n} k\frac{p_{n-k}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{n-k}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_{n-(k+1)}}{k!}$$

d'où :

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_{(n-1)-k}}{k!}$$

, et d'après la question D. 3. b. :

$$\boxed{\mathrm{E}(X_n) = 1}$$

On peut interpréter ce résultat de la façon suivante : en moyenne, un seul des invités repart avec son propre chapeau à la fin de la soirée.

b) X_1 est une variable aléatoire certaine, donc : $\mathrm{V}(X_1) = 0$.
Soit maintenant n un entier supérieur ou égal à 2 . Commençons par calculer l'espérance de la variable aléatoire $(X_n - 1)X_n$:

$$\mathrm{E}((X_n - 1)X_n) = \sum_{k=0}^{n}(k-1)kP(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n}(k-1)k\frac{p_{n-k}}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{p_{n-k}}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{p_{n-2-k}}{k!} = 1.$$

De plus, par linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}((X_n - 1)X_n) = \mathrm{E}(X_n^2 - X_n) = \mathrm{E}(X_n^2) - \mathrm{E}(X_n)$, donc :

$$\mathrm{E}(X_n^2) = \mathrm{E}((X_n - 1)X_n) + \mathrm{E}(X_n) = 1 + 1 = 2.$$

Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathrm{V}(X_n) = \mathrm{E}(X_n^2) - \mathrm{E}(X_n)^2 = 2 - 1 = 1.$$

5) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'une part : $(1-1)^n = 0^n \underset{n \geq 1}{=} 0$, et d'autre part, d'après la formule du binôme :

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 0.}$$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!} = 1$ »

- $\mathcal{P}_0$ s'écrit : « $d_0 = 1$ », donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et démontrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{d_{n+1-k}}{k!} = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{d_{n+1-k}}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(d_{n-k} + \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right) + \frac{d_0}{(n+1)!} && \text{(d'après la formule de la partie B)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+1-k}}{k!(n+1-k)!} + \frac{1}{(n+1)!} \\
&= 1 + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} && \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\
&= 1 && \text{(avec le résultat de 5)a))}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, on a démontré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!} = 1.}$$

c) On déduit de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{d_{n+1-k}}{k!}$$

donc la suite (d_n) vérifie :

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{d_{n+1-k}}{k!}, \end{cases}$$

et d'après la question D. 2. c. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = d_n$$

6) a) $p_0 = 1$ et d'après la question précédente et la question B. 2. b. : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = p_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Une récurrence immédiate permet alors d'obtenir :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

b) On sait que, pour tout réel x, la série exponentielle $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et a pour somme e^x, donc :

$$\text{la suite } (p_n) \text{ converge et } \lim_{n \to +\infty} p_n = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Ainsi, pour de grandes valeurs de l'entier naturel n, la probabilité qu'aucun des invités ne retrouve son chapeau est proche de $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Si on répète l'expérience un grand nombre de fois (tous les jours pendant un an) la proportion des jours où personne ne retrouve son chapeau sera d'environ $\dfrac{1}{e} \approx 37\%$.