Correction de la feuille_Cours_5_ter : Variables aléatoires discrètes. Variance.

On a commencé par démontrer les théorèmes *(dans leur version première année mais on n'a pas montré les conditions d'existence).*

Formule de Kœnig-Huygens.

• Soit X une variable aléatoire réelle telle que X et X^2 admettent une espérance,

$$(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X)\,X + E(X)^2$$

donc $(X - E(X))^2$ est la combinaison de variables aléatoires admettant des espérances
on peut en déduire que $(X - E(X))^2$ admet une espérance et ainsi que X admet une variance.

• Soit X une variable aléatoire réelle telle que X admet une variance,
on sait alors que X et $(X - E(X))^2$ admettent une espérance

$$X^2 = (X - E(X))^2 + 2E(X)\,X - E(X)^2$$

donc X^2 est la combinaison de variables aléatoires admettant des espérances
on peut alors affirmer que : X^2 admet une espérance.

On a montré que :

X admet une variance si, et seulement si, X et X^2 admettent des espérances.

Soit X une variable aléatoire réelle telle que X admet une variance,

$$(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X)\,X + E(X)^2$$

et toutes les variables dans cette égalité admettent des espérances donc :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2 - 2E(X)\,X + E(X)^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)\,E(X) + E(X)^2 \qquad \textit{(linéarité)} \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Si X admet une variance alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

– –

$V(aX + b)$

Soit X une variable aléatoire réelle telle que X admet une variance,
X admet une espérance donc *(linéarité)* $aX + b$ admet une espérance.
X et X^2 admettent une espérance et $(aX+b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$ donc *(linéarité)* $(aX+b)^2$ admet une espérance.
on peut en déduire que $aX + b$ admet une variance.

On a montré que : si X admet une variance alors $aX + b$ admet une variance.

et alors

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E((aX + b)^2) - (E(aX + b))^2 \\ &= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X) + b)^2 \\ &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - (a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2) \qquad \textit{(linéarité)} \\ &= a^2E(X^2) - a^2E(X)^2 \\ &= a^2(E(X^2) - E(X)^2) \end{aligned}$$

si X admet une variance alors $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2V(X)$

Ex 1 : 1) • si $x \in [-1;1]$ alors $|x| \leqslant 1$ donc $|x| \leqslant 1 + x^2$ (car $0 \leqslant x^2$).

• si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1;1]$ alors $|x| \geqslant 1$ donc $|x|^2 \geqslant |x|$ et ainsi : $|x| \leqslant 1 + x^2$

En conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leqslant 1 + x^2}$

2) On note $X(\Omega) = \{ \, x_n \, | \, n \in \mathbb{N} \, \}$.

X admet une espérance si, et seulement si $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

L'égalité précédente donne $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \leqslant 1 + x_n^2$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \ \leqslant \ |x_n| P(X = x_n) \ \leqslant \ P(X = x_n) + x_n^2 P(X = x_n)$$

or : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \Big(P(X = x_n) + x_n^2 P(X = x_n) \Big)$ converge $\left(\text{En effet : } \begin{array}{l} \sum \ P(X = x_n) \ \ CV \\ \sum x_n^2 P(X = x_n) \ CV \quad (E(X^2) \text{ existe}) \end{array} \right)$

donc *(Théorème de convergence par comparaison)*

$\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente et ainsi X admet une espérance.

En conclusion :

$$\boxed{\text{Si } X^2 \text{ admet une espérance alors } X \text{ admet une espérance}}$$

Ex 2 : 1) $X(\Omega)$ est fini donc X admet une espérance et une variance et

$E(X) = -2 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{3} + 0 + 1 \times \frac{1}{3} = -\dfrac{1}{3}$ et $E(X^2) = (-2)^2 \times \frac{1}{6} + (-1)^2 \times \frac{1}{3} + 0 + 1^2 \times \frac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$

(Théorème de transfert)

or *(formule Kœnig-Huygens)* $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ donc $\boxed{V(X) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{11}{9}}$

2) $X(\Omega) = \{0, 1\}$ est fini donc X admet une espérance et une variance et

$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p$ donc $\boxed{E(X) = p}$ et $E(X^2) = 0 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$

donc *(avec la formule Kœnig-Huygens)* $\boxed{V(X) = p - p^2 = p(1 - p)}$

3) a. $X(\Omega)$ est fini donc X admet une espérance et une variance.

On rappelle que $E(X) = \dfrac{n}{2}$ et

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \times P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \times \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

donc *(avec la formule Kœnig-Huygens)*

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4} \\ &= \frac{n}{2} \left(\frac{4n + 2 - 3n}{6} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{n^2 + 2n}{12}}$$

b. X suit la loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$.

En notant $Y = X - a$, on a : $Y \hookrightarrow [\![0; b-a]\!]$

(En effet $Y(\Omega) = [\![0; b-a]\!]$ et toutes les valeurs sont équiprobables)

on a $X = Y + a$ donc *(linéarité)* $E(X) = E(Y) + a$

or d'après 3)a. $E(Y) = \dfrac{b-a}{2}$ donc $\boxed{E(X) = \dfrac{a+b}{2}}$

on a $X = Y + a$ donc *(comme $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$)* $V(X) = V(Y)$

or d'après 3)a. $V(Y) = \dfrac{(b-a)^2 + 2(b-a)}{12}$ donc $\boxed{V(X) = \dfrac{(b-a)^2 + 2(b-a)}{12}}$

ou encore

$$\boxed{V(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}}$$

4) $X(\Omega)$ est fini donc X admet une espérance et $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)$ donc

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} && \textit{(On a enlevé le terme pour } k=0 \textit{ car il est nul)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} && \textit{(formule d'absorption, du chef, du capitaine, ...)} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} q^{n-k-1} \\
&= np\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k} q^{n-1-k} \\
&= np(p+q)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = np}$$

$X(\Omega)$ est fini donc X^2 admet une espérance et *(théorème de transfert)*

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k) + \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) && \textit{(On a enlevé le terme pour } k=0,1 \textit{ car ils sont nuls)} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \ + \ np && \textit{(on reconnait la formule de l'espérance)} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} \ + np && \textit{(double formule du chef)} \\
&= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} q^{n-k-2} \ + np && \textit{(on réindice)} \\
&= n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k} q^{n-2-k} \ + np \\
&= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np \\
&= n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}$$

donc *(Formule de Koenig-Huygens)* X admet une variance et

$$\begin{aligned}
V(X) &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\
&= -np^2 + np
\end{aligned}$$

$$\boxed{V(X) = np(1-p)}$$