Correction de l'exercice 3 du devoir maison du 30 janvier 2025

Partie I1. Soit λ un réel.

$$\begin{aligned}
\lambda \in \text{Sp}(M) &\iff M - \lambda I_2 \notin \text{GL}_2(\mathbb{R}) \\
&\iff \det(M - \lambda I_2) = 0 \\
&\iff (a - \lambda)^2 = bc \\
&\iff \lambda = a \pm \sqrt{bc} \quad \text{car } bc > 0
\end{aligned}$$

Comme les réels b et c sont supposés strictement positifs, les réels $a - \sqrt{bc}$ et $a + \sqrt{bc}$ sont distincts on a :

$$\text{Sp}(M) = \{a - \sqrt{bc}, a + \sqrt{bc}\}.$$

Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$, on résout le système $MX = \lambda X$ pour obtenir

$$E_{a - \sqrt{bc}}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{c} \\ -\sqrt{b} \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_{a + \sqrt{bc}}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{c} \\ \sqrt{b} \end{pmatrix} \right).$$

2. Soient $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $(MX^{(l,r)})_i$ le coefficient de la matrice colonne $MX^{(l,r)}$ situé à la ligne i . On utilise la définition du produit matriciel :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (MX^{(l,r)})_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j} X_j^{(l,r)} = bX_{i-1}^{(l,r)} + aX_i^{(l,r)} + cX_{i+1}^{(l,r)}$$

en posant $X_0^{(l,r)} = X_{n+1}^{(l,r)} = 0$. On observe que l'expression $X_i^{(l,r)} = r^i \sin\left(\frac{i l \pi}{1+n}\right)$ est encore valable dans les cas $i = 0$ et $i = n + 1$. On a donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (MX^{(l,r)})_i = br^{i-1} \sin\left(\frac{(i-1)l\pi}{1+n}\right) + ar^i \sin\left(\frac{i l \pi}{1+n}\right) + cr^{i+1} \sin\left(\frac{(i+1)l\pi}{1+n}\right).$$

Développons deux des trois sinus :

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{(i-1)l\pi}{1+n}\right) = \sin\left(\frac{i l \pi}{1+n}\right) \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) - \cos\left(\frac{i l \pi}{1+n}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) \\ \sin\left(\frac{(i+1)l\pi}{1+n}\right) = \sin\left(\frac{i l \pi}{1+n}\right) \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) + \cos\left(\frac{i l \pi}{1+n}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) \end{cases}$$

et remplaçons dans l'expression précédente; pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned}
(MX^{(l,r)})_i &= \left((br^{i-1} + cr^{i+1}) \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) + ar^i \right) \sin\left(\frac{i l \pi}{1+n}\right) \\
&\quad + (cr^{i+1} - br^{i-1}) \sin\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) \cos\left(\frac{i l \pi}{1+n}\right)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$MX^{(l,r)} = \left(a + \left(cr + \frac{b}{r} \right) \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) \right) X^{(l,r)} + \left(cr - \frac{b}{r} \right) \sin\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) Y^{(l,r)}.$$

Dans le cas particulier où l'on a $r = \sqrt{b/c}$, on a $cr - \frac{b}{r} = 0$, ce qui permet de simplifier l'expression ci-dessus :

$$MX^{(l, \sqrt{b/c})} = \left(a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) \right) X^{(l, \sqrt{b/c})}.$$

Par ailleurs, le vecteur $X^{(l, \sqrt{b/c})}$ n'est pas nul; en effet, son premier coefficient est $r \sin\left(\frac{l\pi}{1+n}\right)$, avec $0 < \frac{l\pi}{1+n} < \pi$. On en déduit que

$$X^{(l, \sqrt{b/c})} \text{ est un vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre } \left(a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) \right).$$

3. On demande ici de redémontrer un résultat du cours.

3. (a) Sous les hypothèses de l'énoncé, soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ vérifiant

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j Z^{(j)} = 0.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Multiplions membre à membre à gauche par la matrice carrée A^k :

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j A^k Z^{(j)} = 0.$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a $AZ^{(j)} = \lambda^{(j)} Z^{(j)}$ puis, par une récurrence immédiate,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k Z^{(j)} = (\lambda^{(j)})^k Z^{(j)}.$$

On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j (\lambda^{(j)})^k Z^{(j)} = 0.$$

Le vecteur $Z^{(1)}$ étant non nul, l'un au moins de ses coefficients est non nul. Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ vérifiant $Z_{i_0}^{(1)} \neq 0$. En considérant la ligne numéro i_0 du système linéaire ci-dessus, on obtient :

$$\alpha_1 (\lambda^{(1)})^k \underbrace{Z_{i_0}^{(1)}}_{\neq 0} + \sum_{j=2}^m \alpha_j \underbrace{(\lambda^{(j)})^k}_{= o_{k \rightarrow +\infty}((\lambda^{(1)})^k)} Z_{i_0}^{(j)} = 0.$$

Les inégalités $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m > 0$ garantissent que l'on a :

$$\forall j \in \llbracket 2, m \rrbracket, \quad (\lambda^{(j)})^k = o_{k \rightarrow +\infty}((\lambda^{(1)})^k).$$

On a donc, en divisant membre à membre par $(\lambda^{(1)})^k$:

$$\alpha_1 \underbrace{Z_{i_0}^{(1)}}_{\neq 0} + o_{k \rightarrow +\infty}(1) = 0.$$

Le passage à la limite (licite) quand l'entier k tend vers l'infini fournit :

$$\alpha_1 = 0.$$

En itérant ce raisonnement (ou, plus rigoureusement, par récurrence), on obtient :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0.$$

Ainsi,

la famille $(Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)})$ est libre.

3. (b) Dans le cas où l'on ne suppose plus nécessairement $\lambda_m > 0$, on n'a plus nécessairement

$$\forall j \in \llbracket 2, m \rrbracket, \quad (\lambda^{(j)})^k = o_{k \rightarrow +\infty}((\lambda^{(1)})^k)$$

(exemple : $\lambda^{(1)} = 1$ et $\lambda^{(m)} = -2$).

Supposons $\lambda_m < 0$. Considérons la matrice

$$M' = M + (-\lambda_m + 1)I_n.$$

Pour tout réel λ , on a clairement :

$$\lambda \in \text{Sp}(M) \iff \lambda + (-\lambda_m + 1) \in \text{Sp}(M')$$

et, pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ (identifié ici à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$),

X vecteur propre de M associé à $\lambda \iff X$ vecteur propre de M' associé à $\lambda + (-\lambda_m + 1)$.

Ainsi, les matrices M et M' ont exactement les mêmes vecteurs propres.

Soit $(Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)})$ une famille formée de vecteurs propres de la matrice M associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 > \dots > \lambda_m$.

On vient de voir que $(Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)})$ est une famille de vecteurs propres de la matrice M' associés respectivement aux valeurs propres

$$\lambda_1 - \lambda_m + 1 > \lambda_2 - \lambda_m + 1 > \dots > \lambda_m - \lambda_m + 1 = 1 > 0.$$

Ainsi, les valeurs propres de la matrice M' sont toutes strictement positives.

On peut donc appliquer à la matrice M' le résultat de la question 3 (a), donc

la famille $(Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)})$ est libre.

3. (c) Justifions que les valeurs propres $\lambda^{(l)}$, $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont bien deux à deux distinctes.

Pour tout $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $0 < \frac{l\pi}{1+n} < \pi$.

Comme la fonction cosinus est injective (car strictement décroissante) sur $[0, \pi]$, les réels $\cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right)$, $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont deux à deux distincts.

Comme le produit bc est non nul, les réels $\lambda^{(l)} = a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right)$, $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont deux à deux distincts.

On peut donc appliquer le résultat de la question 3 : la famille $(X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ est libre dans $\mathbb{R}^n$, de cardinal n dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de dimension n , donc

la famille $(X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de M .

La suite n'est pas corrigée.