Correction du devoir surveillé n° 5

Problème 1 : loi à densité de Pareto

Partie 1 : Propriété d'une loi de probabilité.

1. c étant positif, f est à valeur positive.
   f est continue sur $]-\infty;\ 1[$ car constante et sur $]1;\ +\infty[$ comme fonction usuelle. Donc f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   Pour étudier la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, étudions $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.
   f est nulle sur $]-\infty;1[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 0.
   La fonction $t\mapsto \dfrac{c}{t^{c+1}}$ est continue sur $[1;+\infty[$ donc $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$. Soit $A>1$ alors
   $$\int_1^A f(t)\mathrm{d}t=\int_1^A \frac{c}{t^{c+1}}\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{t^c}\right]_1^A=1-\frac{1}{A^c}.$$
   Comme $c>0$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A^c}=0$. Donc $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 1.
   Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $0+1=1$.
   $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$
2. Soit $x\in\mathbb{R}$ alors on sait que $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.
   cas $x<1$ **:** $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$.
   cas $x\geqslant 1$ **:** $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=0+\int_1^x\frac{c}{t^{c+1}}\mathrm{d}t=1-\frac{1}{x^c}$, en utilisant les calculs de la question précédente.
   $$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel, } F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1-\dfrac{1}{x^c} & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}.}$$
3. a) On étudie l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{c}{x^c}\mathrm{d}x$, la convergence absolue se confond alors avec la convergence.
   cas $c>1$ **:** On peut remarquer que $\dfrac{c}{x^c}=\dfrac{c}{c-1}\times\dfrac{c-1}{x^c}$. On reconnaît alors une densité de loi de Pareto de paramètre $c-1$ qui est bien strictement positif. Donc on peut affirmer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{c}{x^c}\mathrm{d}x$ est convergente et vaut $\dfrac{c}{c-1}$. Ainsi, si $c>1$ X admet une espérance et $E(X)=\dfrac{c}{c-1}$
   cas $c=1$ **:** Soit $A>1$, on a alors : $\displaystyle\int_1^A\frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^A=c\ln A$.
   En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient que si $c=1$, X n'admet pas d'espérance.
   cas $c<1$ **:** Soit $A>1$, on a alors :
   $$\int_1^A\frac{c}{x^c}\mathrm{d}x=-\frac{c}{c-1}\left[\frac{1}{x^{c-1}}\right]_1^A=\frac{c}{c-1}\left[1-\frac{1}{A^{c-1}}\right]\to+\infty \text{ lorsque } A\to+\infty \text{ car } c-1<0.$$
   Si $c<1$, X n'admet pas d'espérance.

$$\boxed{X \text{ admet une espérance si, et seulement si, } c > 1 \text{ et dans ce cas là } E(X) = \frac{c}{c-1}.}$$

b) Soit $x \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned}
P_{(X>t)}(X \leqslant tx) &= \frac{P([X > t] \cap [X \leqslant tx])}{P(X > t)} = \frac{P(t < X \leqslant tx)}{P(X > t)} && \text{car } t \leqslant xt \\
&= \frac{F(xt) - F(x)}{1 - F(t)} && \text{car } P(a < X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) \\
&= \frac{1 - \frac{1}{(xt)^c} - 1 + \frac{1}{t^c}}{1 - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right)} && \text{car } xt \text{ et } t \text{ sont plus grand que } 1 \\
&= \frac{\frac{1}{t^c} - \frac{1}{x^c t^c}}{\frac{1}{t^c}} = \frac{\frac{1}{t^c}\left(1 - \frac{1}{x^c}\right)}{\frac{1}{t^c}} = 1 - \frac{1}{x^c}
\end{aligned}$$

Si $x < 1$

$$\begin{aligned}
P_{(X>t)}(X \leqslant tx) &= \frac{P([X > t] \cap [X \leqslant tx])}{P(X > t)} \\
&= \frac{0}{P(X > t)} && \text{car } t > xt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } t > 1 \text{ et } x \text{ réel } P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}}$$

c) Comme $t > 1$, on constate que $\left[\frac{X}{t} \leqslant x\right] = [X \leqslant tx]$). On retrouve donc le calcul de la question précédente et on peut donc remarquer que $\boxed{\text{pour } t > 1 \text{ et } x \text{ réel } P_{(X>t)}(Z \leqslant x) = F(x).}$

Partie 2 : Réciproque de la propriété précédente

4. On sait que : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{d}t$. En $x = 1$, on obtient $G(1) = \int_{-\infty}^{1} g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} 0\mathrm{d}t = 0$.

   En conclusion, $\boxed{G(1) = 0.}$

5. a)

$$\begin{aligned}
G(x) = P(Y \leqslant x) &= P_{(Y>t)}\left(\frac{Y}{t} \leqslant x\right) && \text{hypopthèse de l'énoncé} \\
&= P_{(Y>t)}(Y \leqslant tx) && \text{car } t > 0 \\
&= \frac{P([Y > t] \cap [Y \leqslant tx])}{P(Y > t)} \\
&= \frac{P(t < Y \leqslant tx)}{P(Y > t)} && \text{car } t \leqslant xt \\
&= \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}
\end{aligned}$$

On a bien montré que : $\boxed{\forall x \geqslant 1, \forall t > 1, \qquad G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}.}$

b) D'après le cours G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf aux points où g n'est pas continue.
Comme g est continue sur $]1\,;+\infty[$, $\boxed{G \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]1\,;+\infty[.}$
On peut donc dériver, à t fixé et en fonction de la variable x, les deux termes de l'égalité obtenue dans la question précédente. On obtient : $G'(x) = \frac{tG(tx) - 0}{1 - G(t)}$.

En conclusion, $\boxed{\forall x > 1, \forall t > 1, \qquad G'(x) = \dfrac{tG'(tx)}{1-G(t)}.}$

c) On sait que pour $u > 1$, $G'(u) = g(u)$. Donc $\forall x > 1, \qquad g(x) = \dfrac{tG'(tx)}{1-G(t)}$.

De plus, on sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = g(1) = c$ car g est continue sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Et on a aussi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} G'(tx) = G'(t)$ car G' est continue en t (car $t > 1$).

On obtient donc en faisant tendre x vers 1 par valeurs supérieures : $\forall t > 1, \qquad c = \dfrac{tG'(t)}{1-G(t)}$.

En conclusion, $\boxed{\forall t > 1 \qquad G(t) + \dfrac{t}{c}G'(t) = 1.}$

6. a) Comme $t > 1$, $t \neq 0$ et ainsi, on peut réécrire l'équation E.1 sous la forme

$$y' + \frac{c}{t}y' = 0.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{c}{t}$ est continue sur $]1; +\infty[$ et une de ses primitives est $t \mapsto c \ln t$.

D'après le cours, les solutions de E.1 sont $t \mapsto K \exp(-c \ln t)$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\boxed{\text{les solutions de E.1 sont } t \mapsto \dfrac{K}{t^c} \text{ où } K \text{ est une constante réelle.}}$

b) On constate que $t \mapsto 1$ est une solution évidente de E.2.

D'après le théorème de structure, $\boxed{\text{les solutions de E.2 sont } t \mapsto \dfrac{K}{t^c} + 1 \text{ où } K \text{ est une constante réelle.}}$

7. a) G est solution de E.2, il existe donc une constante K telle que $\forall t \in]1; +\infty[, \qquad G(t) = 1 + \dfrac{K}{t^c}$.

Attention, pour trouver la constante K on ne peut pas utiliser $G(1)$ car on a résolu l'équation sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

On sait qu'une fonction de répartition de variable à densité est continue sur $\mathbb{R}$. On doit donc obligatoirement avoir $\lim\limits_{t\to 1^+} G(t) = G(1)$.

Or $\lim\limits_{t\to 1^+} G(t) = 1 + K$. Ainsi, on a obligatoirement $1 + K = G(1) = 0$ et donc $K = -1$.

En conclusion, $\boxed{\forall t > 1, \qquad G(t) = 1 - \dfrac{1}{t^c}.}$

b) On a vu que $G(1) = 0$. De plus, $1 - \dfrac{1}{1^c} = 0$. Donc la formule trouvée dans la question précédente est encore vraie pour $t = 1$.

Ainsi, $\boxed{\forall t \geqslant 1, \qquad G(t) = 1 - \dfrac{1}{t^c}.}$

De plus, pour $t < 1$, $G(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{t} 0\mathrm{d}x = 0$.

Donc, $\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{t^c} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}.$

On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi de Pareto donc

$$\boxed{Y \text{ suit une loi de Pareto de paramètre } c.}$$

Partie 3 : Simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c.

8. a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} H(x) = P(\ln(X) \leqslant x) &= P(X \leqslant \mathrm{e}^x) \qquad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante} \\ &= F(\mathrm{e}^x). \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = F(\mathrm{e}^x).}$

b) Continuons le calcul précédent, en utilisant la fonction de répartition de X :

$$H(x) = F(\mathrm{e}^x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{e}^x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x)^c} & \text{si } \mathrm{e}^x \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On remarque que H, fonction de répartition de Z, est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre c.

$\boxed{Z \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } c.}$

c) On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ et on note K sa fonction de répartition.

On peut remarquer que comme U est à valeurs dans $[0;1[$, V est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, si $x < 0$, $K(x) = P(V \leqslant x) = 0$, car l'événement $[V \leqslant x]$ est impossible.

Soit $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} K(x) = P(V \leqslant x) &= P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right) \\ &= P\left(\ln(1-U) \geqslant -\lambda x\right) && \text{car } -\lambda < 0 \\ &= P\left(1-U \geqslant \exp(-\lambda x)\right) && \text{car exponentielle est strictement croissante} \\ &= P\left(1-\exp(-\lambda x) \geqslant U\right) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} && \text{car } 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} \in [0;1[\end{aligned}$$

Ainsi, $K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ.

$\boxed{V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } \lambda.}$

d) — On utilise la structure classique pour créer une liste, on initialise une liste à `[ ]` et on rajoute des éléments à la fin grâce à un `append` dans une boucle `for`

— Pour chaque simulation, on utilise `random` qui simule U.

— Puis on calcule $-\dfrac{1}{c}\ln(1-U)$, le résultat obtenu est un nombre au hasard, qui simule Z.

— Puis on applique exponentielle, pour obtenir une simulation de X.

```
import numpy.random as rd
import math as m

def simulX(c,n):
   L=[]
   for i in range(n):
        u=rd.random()
        z=-m.log(1-u)/c
        x=m.exp(z)
        L.append(x)
   return L
```

Problème 2 : recherche de vecteur propre avec Python

Partie 1 : quelques questions de cours

1. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A si, et seulement s'il existe $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.
   Une matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$ s'appelle un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ se note $E_\lambda(A)$ et est défini par :
   $$E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})/AX = \lambda X\}.$$
3. $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à p.
4. Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ admet p valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.

Partie 2 : programmation

1. Comme les réels $|m_{i,j}|$ sont positifs, dire que le maximum de ces nombres est nul est équivalent à dire qu'ils sont tous nuls. Donc
   $$||M|| = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!], |m_{i,j}| = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!], m_{i,j} = 0 \Leftrightarrow M = 0.$$
   On a bien $\boxed{||M|| = 0 \Leftrightarrow M = 0.}$
2.
```
def Norme(M):
    n,p=np.shape(M)
    max=abs(M[0,0])
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            if abs(M[i,j])>max:
                max=abs(M[i,j])
    return max
```
3.
```
def Normalise(v):
    p=np.shape(v)[0]
    x=np.zeros([p,1])
    a=Norme(v)
    for i in range(p):
        x[i,0]=v[i,0]/a
    return x
```
   On peut aussi tout simplement faire :
```
def Normalisebis(v):
    return v/Norme(v)
```
4.
```
def PuissanceIteree(A,n):
    p=np.shape(A)[0]
    v=np.random.rand(p,1)
    for _ in range(n):
        v=Normalise(np.dot(A,v))
    return v
```
5. Les fonctions `VecteurPropre1` et `VecteurPropre3` sont correctes.
   Le problème dans la fonction `VecteurPropre2` vient du fait que la variable `ecart` n'est pas recalculée à chaque passage dans la boucle. La boucle ne va jamais s'arrêter une fois que l'on sera rentrée dedans.

Problème 3 : matrices et probabilités

Partie A : Matrices symétriques et antisymétriques

1. a)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = c \\ c = b \\ d = d \end{cases} \\
&\Leftrightarrow b = c
\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow b = c.}$

b) D'après la question précédente :

$$\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} / (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

$\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace engendré par une famille d'éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc
$\boxed{\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$

Posons $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La famille (B, C, D) est génératrice de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. Montrons que cette famille est libre. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$aB + bC + cD = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Donc la famille (B, C, D) est libre.
Ainsi $\boxed{(B, C, D) \text{ est une base de } \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \text{ et } \dim(\mathscr{S}_2(\mathbb{R})) = 3.}$

2. $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de J si, et seulement si, $J - \lambda I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire $\det(J - \lambda I_2) = 0$.
Or $\det(J - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$, donc il n'existe aucun réel tel que $\det(J - \lambda I_2) = 0$.

En conclusion, $\boxed{J \text{ n'admet pas de valeur propre réelle.}}$

3. a) De même que dans la question 1.a), on peut montrer que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \\ d = 0 \end{cases}$.

On obtient donc $\mathscr{A}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} / b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\,(J)$.
$\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace engendré par une famille constituée d'un élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc
$\boxed{\mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$
La famille (J) est génératrice de $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ et libre car formée d'un seul vecteur non nul donc
$\boxed{(J) \text{ est une base de } \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \text{ et } \dim(\mathscr{A}_2(\mathbb{R})) = 1.}$

b) On a $I_2 \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ donc $I_2 \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.
On a $J \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ donc $J \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.
Or $(I_2 + J)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2 + J$ et $(I_2 + J)^T \neq -(I_2 + J)$, donc $I_2 + J \notin \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.
Cela prouve que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ n'est pas stable par addition donc
$\boxed{\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$

Partie B : Matrices qui commutent avec leur transposée

4. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $NN^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^T N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Donc $NN^T \neq N^T N$, c'est-à-dire $\boxed{N \notin \mathscr{C}_2(\mathbb{R}).}$

5. a) Soit $M \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.
   On a bien $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   De plus, on a deux options :
   - soit $M \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, et alors $MM^T = M^2 = M^T M$;
   - soit $M \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$, et alors $MM^T = -M^2 = M^T M$.

   Dans les deux cas, $MM^T = M^T M$, ce qui signifie que $M \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})$.
   $\boxed{\text{Donc } \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}_2(\mathbb{R}).}$

   b) On a déjà montré que $I_2 + J \notin \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.
   De plus, $I_2 + J \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus $(I_2 + J)(I_2 + J)^T = (I_2 + J)(I_2 - J) = I_2 - J^2$ et $(I_2 + J)^T (I_2 + J) = (I_2 - J)(I_2 + J) = I_2 - J^2$.
   Donc $I_2 + J \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})$.
   On a trouvé une matrice qui est dans $\mathscr{C}_2(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$, cela prouve que $\boxed{\mathscr{C}_2(\mathbb{R}) \not\subset \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R}).}$

6. a) Par définition de $\mathscr{C}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = a^2 + c^2 \\ ac + bd = ab + cd \\ ac + bd = ab + cd \\ c^2 + d^2 = b^2 + d^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = c^2 \\ (a - d)(c - b) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = c \text{ ou } b = -c \\ a = d \text{ ou } c = b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = d \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = -c \\ a = d \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = c \\ c = b \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = -c \\ c = b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow b = c \text{ ou } (b = -c \text{ et } a = d),
\end{aligned}$$

   car les cas $\begin{cases} b = c \\ a = d \end{cases}$ et $\begin{cases} b = -c \\ c = b \end{cases}$ sont inclus dans le cas $b = c$.

   On a donc $\boxed{\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow b = c \text{ ou } (b = -c \text{ et } a = d).}$

   b) D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} / (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathrm{Vect}(I_2, J)
\end{aligned}$$

   On a bien $\boxed{\mathscr{C}_2(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathrm{Vect}(I_2, J).}$

   c) On a :

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J) &\Leftrightarrow M^T = M \text{ et } \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ M = aI_2 + bJ \\
&\Leftrightarrow aI_2 - bJ = aI_2 + bJ \text{ et } \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ M = aI_2 + bJ \\
&\Leftrightarrow b = 0 \text{ et } \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ M = aI_2 + bJ \\
&\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\ M = aI_2
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J) = \{aI_2 / a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(I_2)$.
La famille (I_2) est génératrice de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J)$ et est libre car formée d'un seul vecteur non nul.
Donc $\boxed{(I_2) \text{ est une base de } \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J) \text{ et } \dim(\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J)) = 1.}$

Partie C : Calculs de probabilités

7. a) Comme $X_i(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$, on peut affirmer que $X_i^2(\Omega) = \{0; 1\}$.
De plus, $X_i^2 = 0 \Leftrightarrow X_i = 0$, donc $P(X_i^2 = 0) = P(X_i = 0) = \frac{1}{3}$.
Et $X_i^2 = 1 \Leftrightarrow X_i = 1$ ou $X_i = -1$, donc, comme on a une union d'événements incompatibles,

$$P(X_i^2 = 1) = P(X_i = 1) + P(X_i = -1) = \frac{2}{3}.$$

On aurait aussi pu dire que $P(X_i^2 = 1) = 1 - P(X_i = 0)$.

En conclusion, $\boxed{X_i^2 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{2}{3}.}$

b) On a $X_iX_j(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$. De plus :

$$\begin{aligned}
P(X_iX_j = -1) &= P\left(([X_i = 1] \cap [X_j = -1]) \cup ([X_i = -1] \cap [X_j = 1])\right) \\
&= P([X_i = 1] \cap [X_j = -1]) + P([X_i = -1] \cap [X_j = 1]) \text{ union d'evt incompatibles} \\
&= P(X_i = 1)P(X_j = -1) + P(X_i = -1)P(X_j = 1) \text{ VAR supposées indépendantes} \\
&= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

De même, $P(X_iX_j = 1) = P\left(([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) \cup ([X_i = -1] \cap [X_j = -1])\right) = \frac{2}{9}$.

Et enfin, $P(X_iX_j = 0) = P([X_i = 0] \cup [X_j = 0]) = P(X_i = 0) + P(X_j = 0) - P([X_i = 0] \cap [X_j = 0]) = \frac{5}{9}$.

En résumé $\boxed{P(X_iX_j = 1) = \frac{2}{9} = P(X_iX_j = -1) \text{ et } P(X_iX_j = 0) = \frac{5}{9}.}$

c) On a $\det(A) = X_1X_4 - X_3X_2$. Donc :

$$\begin{aligned}
P(\det(A) = 0) &= P\left(([X_1X_4 = 0] \cap [X_3X_2 = 0]) \cup ([X_1X_4 = 1] \cap [X_3X_2 = 1]) \cup ([X_1X_4 = -1] \cap [X_3X_2 = -1])\right) \\
&= P([X_1X_4 = 0] \cap [X_3X_2 = 0]) + P([X_1X_4 = 1] \cap [X_3X_2 = 1]) + P([X_1X_4 = -1] \cap [X_3X_2 = -1]) \\
&\qquad \text{union d'evt incompatibles} \\
&= P(X_1X_4 = 0)P(X_3X_2 = 0) + P(X_1X_4 = 1)P(X_3X_2 = 1) + P(X_1X_4 = -1)P(X_3X_2 = -1) \\
&\qquad X_1X_4 \text{ et} X_3X_2 \text{ sont indépendantes par le lemme des coalitions} \\
&= \frac{25}{81} + \frac{4}{81} + \frac{4}{81} = \frac{33}{81} = \frac{11}{27}
\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{P\left(\det(A) = 0\right) = \frac{11}{27}.}$

8. a) Par définition de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
P(A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})) &= P(X_2 = X_3) \\
&= P\Big(([X_2 = 0] \cap [X_3 = 0]) \cup ([X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]) \cup ([X_2 = -1] \cap [X_3 = -1])\Big) \\
&= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9},
\end{aligned}$$

avec les mêmes arguments d'incompatibilité et d'indépendance que précédemment.

On a donc $\boxed{P(A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{3}.}$

b) Par définition de $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
P(A \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})) &= P\Big([X_2 = -X_3] \cap [X_1 = 0] \cap [X_4 = 0]\Big) \\
&= P\Big(([X_2 = 1] \cap [X_3 = -1]) \cup ([X_2 = 1] \cap [X_3 = -1]) \cup ([X_2 = 0] \cap [X_3 = 0])\Big) \\
&\qquad \times P(X_1 = 0) \times P(X_4 = 0) \\
&\quad \text{car } X_2 - X_3, X_1 \text{ et } X_4 \text{ sont indépendantes} \\
&= \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

avec les mêmes arguments d'incompatibilité et d'indépendance que précédemment.

On a donc $\boxed{P(A \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{27}.}$

9. a) D'après la question 6.b) :

$$\begin{aligned}
P(A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})) &= P(A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathrm{Vect}(I_2, J)) \\
&= P(A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})) + P(A \in \mathrm{Vect}(I_2, J)) - P(A \in \underbrace{\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J)}_{\mathrm{Vect}(I_2)}) \\
&= \frac{1}{3} + P([X_1 = X_4] \cap [X_2 = -X_3]) - P([X_1 = X_4] \cap [X_2 = 0] \cap [X_3 = 0]) \\
&= \frac{1}{3} + P(X_1 = X_4)P(X_2 = -X_3) - P(X_1 = X_4)P(X_2 = 0)P(X_3 = 0) \text{ indépendance}
\end{aligned}$$

Par un calcul similaire à celui de la question 8.a), on a $P(X_1 = X_4) = \frac{1}{3}$ et on a vu dans la question 8.b) que $P(X_2 = -X_3) = \frac{1}{3}$.

Donc $P(A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{27}$.

On a bien $\boxed{P(A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})) = \frac{11}{27}.}$

b) On peut commencer par remarquer que $P_{[\det(A)=0]}(A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})) = \dfrac{P([\det(A) = 0] \cap [A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})])}{P(\det(A) = 0)}$.

De plus, d'après la question 6.b :

$$[\det(A) = 0] \cap [A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})] = \Big([\det(A) = 0] \cap [A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})]\Big) \cup \Big([\det(A) = 0] \cap [A \in \mathrm{Vect}(I_2, J)]\Big).$$

On remarque alors que $[\det(A) = 0] \cap [A \in \mathrm{Vect}(I_2, J)] = [A = 0] \subset [A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})]$.

Donc

$$[\det(A) = 0] \cap [A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})] = [\det(A) = 0] \cap [A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})]$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
P([\det(A) = 0] \cap [A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})]) &= P([\det(A) = 0] \cap [A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})]) \\
&= P(A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})) \times P_{[A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})]}(\det(A) = 0) \\
&= \frac{1}{3} \times P(X_1X_4 - X_3^2 = 0) \\
&= \frac{1}{3} \times \Big(P([X_1X_4 = 1] \cap [X_3^2 = 1] \cup [X_1X_4 = 0] \cap [X_3^2 = 0])\Big) \\
&= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{9} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{P_{[\det(A)=0]}(A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})) = \frac{1/9}{11/27} = \frac{3}{11}.}$