

Correction de la feuille Cours_11 : Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

Ex 1 : 1) $\mathbb{1}_{X \geq a}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X \geq a)$ et ainsi son espérance est $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X \geq a}) = \mathbb{P}(X \geq a)$.

2) Soit $\omega \in \Omega$,

si $X(\omega) \geq a$ alors $Y(\omega) = a$ donc on a bien $Y(\omega) \leq X(\omega)$

si $X(\omega) < a$ alors $Y(\omega) = 0$ et comme X est à valeurs positives ou nulles, ici aussi on a bien $Y(\omega) \leq X(\omega)$

En conclusion :

$$\boxed{Y \leq X}$$

3) $Y \leq X$ et ces deux variables admettent une espérance donc $E(Y) \leq E(X)$

or (linéarité) $E(Y) = a E(\mathbb{1}_{X \geq a})$ ou encore $E(Y) = a \mathbb{P}(X \geq a)$

et comme $a > 0$ on peut en conclure que :

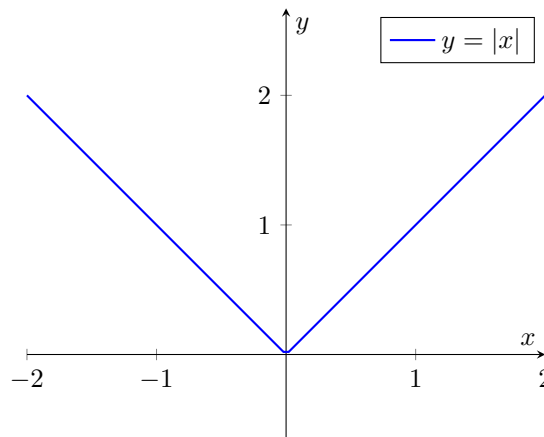
$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$$

Ex 2 : 1) ❶ X admet une variance donc $Y = (X - E(X))^2$ admet une espérance.

❷ X est à valeurs réelles donc $Y = (X - E(X))^2$ est à valeurs positives ou nulles.

La variable $Y = (X - E(X))^2$ vérifie les conditions d'utilisation de l'inégalité de Markov.

2) C'est la représentation de la fonction valeur absolue.



3) En appliquant l'inégalité de Markov à Y avec $a = t^2$ on obtient :

$$\mathbb{P}\left((X - E(X))^2 \geq t^2\right) \leq \frac{E\left((X - E(X))^2\right)}{t^2}$$

or $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$ et comme $t > 0$ on a : $\mathbb{P}\left((X - E(X))^2 \geq t^2\right) = \mathbb{P}\left(|X - E(X)| \geq t\right)$

En effet : pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 \geq t^2 \iff |x| \geq |t|$

on obtient l'inégalité attendue

$$\boxed{\mathbb{P}\left(|X - E(X)| \geq t\right) \leq \frac{V(X)}{t^2}}$$

Ex 3 : (non corrigé)

Ex 4 : 1) • Les X_k admettent des espérances et $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ donc (linéarité)

M_n admet une espérance et $E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k)$ et comme pour tout k , $E(X_k) = m$, il vient :

$$E(M_n) = m$$

• Les X_k admettent une variance et $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ donc (combinaison linéaire de variables aléatoires admettant des variances)

① M_n et $\sum_{k=1}^n X_k$ admettent une variance

② $V(M_n) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)$ (Propriétés : $V(aX + b) = a^2 V(X)$)

③ les X_k sont mutuellement indépendantes donc : $V(M_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k)$

④ et comme $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, V(X_k) = \sigma^2$,

$$V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

En appliquant à M_n l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|M_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Pour ε un réel strictement positif, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq P(|M_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

or on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0$, donc (théorème des gendarmes)

$$\boxed{\text{Quel que soit } \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - m| \geq \varepsilon) = 0}$$

Ex 5 : (X_n) est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes avec $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$. En appliquant les résultats de 1). à cette suite on obtient :

$$\boxed{E(F_n) = p} \quad \boxed{V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\boxed{\text{Quel que soit } \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|F_n - p| \geq \varepsilon) = 0}$$

On remarque que F_n est la fréquence de réalisation de l'événement A .

On dit que la fréquence de réalisation de l'événement A converge en probabilité vers $P(A)$.

Ex 6 :

```

S = 0
N = 100000
for k in range(N):
    S += abs(rd.random() - random())
print(S/N)
# (Loi des grands nombres)
# Affiche une valeur approchée de E(Z)
```

On doit trouver une valeur approchée de $\frac{1}{3}$.

Remarque : Pour calculer cette espérance on peut utiliser la relation $\max(X, Y) = \frac{1}{2}(X + Y + |X - Y|)$

Ex 7 :

```
def simul_exp():
    return [ rd.randint(1, 6) for k in range(6) ]      # On simule le lancer de 6 dés

def test_A(L):
    for k in range(5):
        if L[k] > L[k+1]:
            return False
    return True

S = 0
N = 1000000
for k in range(N):
    if test_A(simul_exp()):
        S += 1
print(S/N)                                           # On affiche une valeur approché de P(A)
```

Ex 8 : *(non corrigé)*