DEVOIR SURVEILLE

MATHÉMATIQUES

Samedi 15 mars 2025

(3 heures)

L'usage de calculatrice est autorisée.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Vous devez numéroter les copies et questions et souligner ou encadrer les résultats.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6 .

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet comporte 3 problèmes indépendants les uns les autres.

Pour les questions Python il sera inutile d'écrire les importations suivantes :

```
import math as m
import numpy as np
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

_ _

Problème I

Soit $0 < q < 1$ et $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, une fonction vérifiant l'inégalité :

$$\forall x, y \in [0,+\infty[, |f(x) - f(y)| \leq q.|x - y|$$

On considère une suite u définie par la donnée de $u_0 \in [0,+\infty[$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Partie A

Un résultat général

Le but de cette partie est de démontrer que la suite u converge vers une certaine limite $\ell \in [0,+\infty[$, indépendante du point de départ u_0. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, \delta_n = u_{n+1} - u_n$.

1) Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,+\infty[$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\delta_{n+1}| \leq q \cdot |\delta_n|$$

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\delta_n| \leq q^n.|\delta_0|$$

3) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \delta_n$ est convergente et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une certaine limite ℓ que l'on exprimera en fonction de u_0 et $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n$.

4) Montrer que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.
Indication : On pourra commencer par démontrer que f est continue sur tout $[0,+\infty[$.

5) Montrer, en utilisant l'inégalité satisfaite par f que si ℓ et ℓ' vérifient $f(\ell) = \ell$ et $f(\ell') = \ell'$ alors $\ell = \ell'$.

6) Conclure quant au but de cette partie.

Partie B

Un exemple.

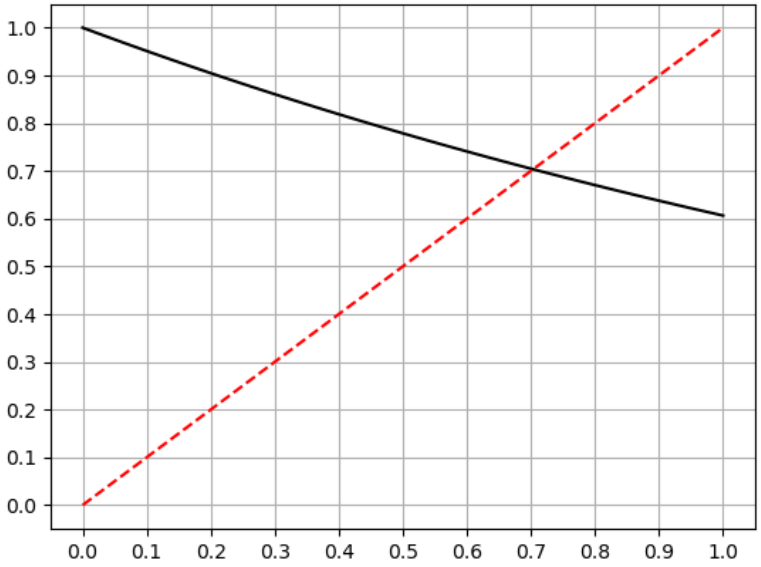
Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ définie par $\forall x \in \left[0,+\infty\right[, f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$.

7) Montrer que f vérifie l'inégalité présentée en préambule de ce problème avec une valeur de q à préciser.

On définit u comme dans le préambule et ℓ sa limite.

La partie A a montré que ℓ est l'unique solution de l'équation $x = f(x)$ et on admet qu'ici $\ell \in [0,1]$

8) 8.a) Ecrire un programme Python permettant de tracer la courbe de f ainsi que la droite d'équation $y = x$.
Un tel programme donne le résultat suivant.



8.b) Donner une valeur approchée de ℓ par lecture graphique.

9) 9.a) i. Ecrire un programme utilisant la dichotomie donnant une valeur approchée de ℓ à 10^{-7} près.

ii. Combien d'appels à la fonction f fait votre programme pour obtenir cette valeur approchée de ℓ ?

9.b) Ecrire un programme permettant de calculer les 20 premières valeurs de la suite u en partant de $u_0 = 1$.

9.c) Le programme précédent donne pour u_{20} et la u_{21} les valeurs :

0.7034674218283558 et 0.7034674227340658

Donner une valeur approchée de ℓ en justifiant du niveau de précision.

Problème II

Le but de ce problème est de construire deux variables aléatoires à densité X et Y, à valeurs dans $[0,+\infty[$ dont tous les moments existent et sont égaux et qui, pourtant, n'ont pas la même loi.

On note $(\Omega, \mathscr{T}, \mathscr{P})$ un espace probabilisé sur lequel toutes les variables aléatoires du texte sont définies. On note, pour une variable aléatoire X à valeurs réelles admettant une espérance, $\mathbb{E}(X)$ la valeur de cette espérance.

Partie A

Quelques intégrales généralisées.

On définit la fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \left[0,+\infty\right[, g(x) = \exp\left(-x^{\frac{1}{4}}\right)\sin\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = e^{-x^{\frac{1}{4}}} \cdot \sin\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$$

10) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les intégrales généralisées

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t)\,dt \text{ et } \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t)\,dt$$

sont convergentes. On note S_n et C_n leurs valeurs respectives :

$$S_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t)\,dt \text{ et } C_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t)\,dt$$

On note aussi $V_n = \begin{pmatrix} S_n \\ C_n \end{pmatrix}$.

11) Montrer que $S_0 = \frac{1}{2}$. On admettra que $C_0 = S_0 = \frac{1}{2}$.

12) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} S_{n+1} - C_{n+1} = (n+1)S_n \\ S_{n+1} + C_{n+1} = (n+1)C_n \end{cases}$$

13) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = (n+1)M.V_n \text{ où } M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = n!M^n \cdot V_0$$

14) Calculer M^4 et en déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, S_{4k+3} = 0$$

15) En utilisant et justifiant le changement de variable $x = t^4$, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^k \cdot g(x)\,dx = 0$$

Partie B

Densités et variables aléatoires.

On considère T_1, T_2, T_3, T_4 des variables aléatoires indépendantes exponentielles de paramètre 1, i.e. de loi $\mathscr{E}(1)$.

16) Rappeler espérance, variance, et densité de T_1.

⋆ ⋆ ⋆

On rappelle la formule de convolution donnant une densité f_S de la somme $S = U + V$ de deux variables alétoires indépendantes U et V à densité, de densités respectives f_U et f_V :

$$\forall s \in \mathbb{R}, f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(u) \cdot f_V(s-u)\,du$$

⋆ ⋆ ⋆

17) En utilisant (avec justification) cette formule de convolution, donner une densité de $U = T_1 + T_2$. Donner une densité de $V = T_3 + T_4$.

18) En utilisant (avec justification) la formule de convolution, donner une densité de $T = U + V$.

19) Montrer qu'une densité de $X = T^4$ est la fonction f vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ c \cdot \exp\left(-x^{\frac{1}{4}}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

où c est une constante réelle à préciser.

20) 20.a) On prolonge g à tout $\mathbb{R}$ en posant $g(x) = 0$ pour $x < 0$. Donner -en justifiant- une valeur possible pour $\varepsilon > 0$ pour que la fonction $\phi = f + \varepsilon.g$ soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

20.b) Soit Y une variable aléatoire réelle ayant ϕ pour densité. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left(Y^k\right) = \mathbb{E}\left(X^k\right)$$

20.c) Comparer $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{16}\right)$ et $\mathbb{P}\left(Y \leq \frac{1}{16}\right)$. Les variables aléatoires réelles X et Y ont-elles même loi ?

Partie C

Simulations informatiques

On rappelle qu'alors la fonction `rd.random` retourne un nombre (`float` aléatoire tiré uniformément dans l'intervalle] 0,1 [et que les appels successifs à cette fonction sont autant de tirages indépendants.

21) Ecrire une fonction d'entête Exp() retournant un réel positif aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$.

22) Ecrire une fonction d'entête $X()$ simulant la variable X de la question **18)**, retournant un réel positif aléatoire suivant la densité f.

23) Ecrire une fonction Python `moment_X(k)` permettant de trouver une valeur approchée de $\mathbb{E}(X^k)$ l'espérance mathématique de X^k pour k donnée en argument.

24) Ecrire un programme Python permettant de trouver une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{16}\right)$.

25) Ecrire un programme donnant une valeur approchée de $\frac{1}{24}\int_0^{1/16} \exp(-x^{\frac{1}{4}})\,\mathrm{d}x$.

26) Que doit-on observer quand on exécute les deux programmes précédents ?

Problème III

Ce problème comporte deux parties largement indépendantes.

Lorsque l'on effectue des sondages, de nombreux biais statistiques peuvent apparaitre : on peut par exemple avoir considéré un échantillon non-représentatif de la population, il peut y avoir un biais dans les réponses des personnes sondées... On va s'intéresser dans ce problème à ce que l'on appelle le biais par la taille : il provient du fait que si l'on choisit une personne au hasard dans la population, celle-ci a plus de chances de faire partie d'une catégorie nombreuse de la population.

Le biais par la taille est la source de nombreux «paradoxes» probabilistes, comme le fait que les gagnants du loto vivent en moyenne plus longtemps (parce que les gagnants sont ceux qui ont pu jouer au loto plus longtemps) ou le fait que vos amis ont en moyenne plus d'amis que vous (car les gens qui ont un très grand nombre d'amis font sûrement partie de vos amis). On verra ici comment formaliser le biais par la taille, et l'utiliser dans différents contextes.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire X, on notera $\mathbb{E}(X)$ son espérance (resp. $\mathbb{V}(X)$ sa variance) lorsqu'elles existent.

Partie A

Biais par la taille, exemples discrets.

On suppose que le nombre d'enfants dans une famille française prise au hasard est une variable aléatoire X. Pour connaître la loi de X, une idée serait d'interroger les élèves d'une école pour connaitre le nombre d'enfants dans leur famille. On va voir que cette approche introduit un biais.

27) Commençons par une simulation informatique en supposant donnée une liste `Enfants` modélisant l'ensemble des enfants français de la manière suivante :

Les enfants sont numérotés de 0 à $N-1$ et les familles sont numérotées de 0 à $n-1$.

`Enfants` est une liste de longueur N, telle que pour tout k entre 0 et $N-1$, `Enfants[k]` est le numéro de la famille de l'enfant numéro k.

27.a) Ecrire une fonction calculant le nombre moyen d'enfants dans les familles avec la liste `Enfants` donnée en argument.

27.b) On interroge au hasard un enfant et on lui demande combien il y a d'enfants dans sa famille et on note Y la réponse.

Ecrire un programme permettant de trouver une valeur approchée de l'espérance mathématique de Y.

28) Considérons une situation particulière. Supposons que X suive la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 1/5$. On note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$.

28.a) (i) Rappeler l'expression de p_k pour $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. (ii) Que vaut $\mathbb{E}(X)$?
(iii) Donner $\mathbb{V}(X)$, et en déduire $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

28.b) Soit M_k le nombre de familles à k enfants, $M = \sum_{k=0}^{10} M_k$ le nombre total de familles (donc $p_k = M_k/M$). Soit N_k le nombre total d'enfants (c'est-à-dire dans toute la population) qui font partie d'une famille à k enfants, et $N = \sum_{k=0}^{10} N_k$ le nombre total d'enfants de la population.
(i) Montrer que $N_k = k p_k M$. (ii) Montrer que $N/M = 2$.
(iii) Montrer que la proportion des enfants provenant d'une famille à k enfants est $p_k^* = k p_k/2$.

28.c) On choisit un enfant au hasard dans une école, à qui l'on demande combien d'enfants ses parents ont eu *(lui inclus)*. On note Y ce nombre d'enfants.
(i) Pour tout entier k élément de $\{1, 2, \ldots, 10\}$, montrer que $\mathbb{P}(Y = k) = k p_k/2$.
(ii) Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(X^2\right)/\mathbb{E}(X)$.
(iii) En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et le comparer à $\mathbb{E}(X)$.

29) Soit n un entier naturel et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$, non identiquement nulle. Pour tout entier $i > 0$, on pose :

$$q_i = \frac{i}{\mathbb{E}(X)} \mathbb{P}(X = i)$$

29.a) Montrer que la suite finie $\left(q_i\right)_{1 \leq i \leq n}$ définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$.
On considère une telle variable aléatoire X^*, c'est-à-dire vérifiant que, pour tout i entier naturel non nul $P(X^* = i) = q_i$. On dit que X^* suit la loi de X biaisée par la taille.

29.b) Montrer que $\mathbb{E}(X^*) = \mathbb{E}\left(X^2\right)/\mathbb{E}(X)$.

29.c) En déduire que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X)\left(\mathbb{E}(X^*) - \mathbb{E}(X)\right)$.

29.d) Conclure que $\mathbb{E}(X^*) \geq \mathbb{E}(X)$.

Partie B

Biais par la taille, propriétés

Dans cette partie, on démontre de nombreuses propriétés des variables aléatoires biaisées par la taille.

30) *Biais par la taille : le cas de variables à densité.*
Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0[$ et soit X une variable aléatoire de densité f. On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ finie et strictement positive. On définit la fonction g par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{\mathbb{E}(X)} f(x)$$

30.a) Montrer que g définit une densité de variable aléatoire positive. Soit une variable aléatoire X^* dont la densité est g. On dit que X^* *suit la loi de X biaisé par la taille.*

30.b) Soit a un réel strictement positif.
(i) Montrer que la variable aléatoire aX possède pour densité $z \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{z}{a}\right)$.
(ii) En déduire que $(aX)^*$ et $a \times X^*$ possèdent la même loi.

30.c) Une propriété importante. Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. Montrer que $\mathbb{E}(Xh(X))$ est bien défini et que

$$\mathbb{E}\left(h\left(X^*\right)\right) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \mathbb{E}(Xh(X))$$

$\star \star \star$

On pose alors la définition suivante, *que la variable X soit à densité ou non* : si X est une variable aléatoire réelle positive d'espérance $\mathbb{E}(X)$ strictement positive, on dit qu'une variable aléatoire positive X^* *suit la loi de X biaisée par la taille* si on a

$$\mathbb{E}\left(h\left(X^*\right)\right) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \mathbb{E}(Xh(X))$$

pour toute fonction $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ bornée et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, et, par extension naturelle, pour toute fonction h telle que $X.h(X)$ admette une espérance.

31) Dans cette question, on se fixe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions croissantes. Soit X une variable aléatoire telle que les espérances $\mathbb{E}(f(X)), \mathbb{E}(g(X))$ et $\mathbb{E}(f(X).g(X))$ sont bien définies.

31.a) Montrer que quels que soient les réels x_1 et x_2, on a $\big(f(x_1)-f(x_2)\big)\big(g(x_1)-g(x_2)\big)\geq 0$

31.b) Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. Montrer que

$$\mathbb{E}\Big(\big(f(X_1)-f(X_2)\big)\big(g(X_1)-g(X_2)\big)\Big) = 2\mathbb{E}(f(X)\cdot g(X)) - 2\mathbb{E}(f(X))\cdot\mathbb{E}(g(X))$$

31.c) En déduire que $\mathbb{E}(f(X).g(X))\geq \mathbb{E}(f(X)).\mathbb{E}(g(X))$.

32) Dans cette question, on suppose que X est une variable aléatoire positive d'espérance strictement positive, et telle que $\mathbb{E}\left(X^{m+1}\right)$ existe pour un entier $m\geq 1$ donné. On suppose aussi que X^* est une variable aléatoire positive qui suit la loi de X biaisée par la taille.

32.a) Soit p un entier naturel tel que $1\leq p\leq m$. (i) Montrer que pour tout réel $x\geq 0$, on a $0\leq x^p\leq 1+x^{m+1}$. (ii) Montrer que $\mathbb{E}(X^p)$ existe.

32.b) Montrer que $\mathbb{E}\left(X^{m+1}\right)\geq \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(X^m)$.

32.c) En déduire que $\mathbb{E}\left((X^*)^m\right)\geq \mathbb{E}(X^m)$.

33) Pour A un événement, on note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire définie par $\mathbb{1}_A(\omega)=1$ si $\omega\in A$ et $\mathbb{1}_A(\omega)=0$ sinon. Pour tout t réel, on définit la fonction g_t par $\forall x\in\mathbb{R}, g_t(x)=\mathbb{1}_{]t,+\infty[}(x)$.

33.a) Montrer que la fonction g_t est croissante sur $\mathbb{R}$.

33.b) Soit X une variable aléatoire positive, admettant une espérance. Montrer que pour tout t réel, $\mathbb{E}\big(Xg_t(X)\big)$ est bien défini et que :

$$\mathbb{E}\big(Xg_t(X)\big)\geq \mathbb{E}(X)\mathbb{P}(X>t)$$

33.c) Montrer que pour tout t réel, $\mathbb{P}(X^*>t)\geq\mathbb{P}(X>t)$.

34) Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires positives, indépendantes, non nécessairement de même loi. On suppose qu'elles admettent toutes une espérance strictement positive, et on note $\mu_i=\mathbb{E}(X_i)$. De plus, on pose $\mu=\sum_{i=1}^n\mu_i$, et $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$.

34.a) Donner $\mathbb{E}(S_n)$.

34.b) Soit J une variable aléatoire à valeurs dans $\{1,\dots,n\}$, de loi définie par $\forall k\in\{1,\dots,n\}, \mathbb{P}(J=k)=\mu_k/\mu$. Quelle est la loi de J si les variables aléatoires X_i sont de même loi?

$\star\star\star$

On considère $X_1^*,\dots,X_n^*$ des variables aléatoires indépendantes, indépendantes de $X_1,\dots,X_n$, telles que, pour tout entier i tel que $1\leq i\leq n$, X_i^* suive la loi de X_i biaisée par la taille.
On suppose que J à valeurs dans $\{1,\dots,n\}$, est indépendante de $X_1, X_1^*,\dots,X_n,X_n^*$, de loi définie par

$$\forall k\in\{1,\dots,n\}, \mathbb{P}(J=k)=\mu_k/\mu$$

On considère la variable aléatoire $X_J=\sum_{j=1}^n X_j\mathbb{1}_{\{J=j\}}$ et on définit $T_n=S_n-X_J+X_J^*$
Autrement dit, on choisit un indice aléatoire J et, dans la somme $\sum_{i=1}^n X_i$, on remplace X_J par X_J^*

34.c) Soit $h:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ bornée et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.
(i) Montrer que :

$$h(T_n)=\sum_{i=1}^n h(T_n)\mathbb{1}_{\{J=i\}}=\sum_{i=1}^n h\left(S_n-X_i+X_i^*\right)\mathbb{1}_{\{J=i\}}.$$

(ii) En déduire que :

$$\mathbb{E}(h(T_n))=\sum_{i=1}^n\mathbb{P}(J=i)\mathbb{E}\left(h\left(S_n-X_i+X_i^*\right)\right)$$

34.d) Pour $i\in\{1,\dots,n\}$, montrer que pour tout réel s,

$$\mathbb{E}\left(h\left(s+X_i^*\right)\right)=\frac{1}{\mu_i}\mathbb{E}(X_i\cdot h(s+X_i))$$

On admettra qu'on en déduit l'égalité $\mathbb{E}\left(h\left(S_n-X_i+X_i^*\right)\right)=\frac{1}{\mu_i}\mathbb{E}(X_i h(S_n))$

34.e) En déduire que $\mathbb{E}(h(T_n))=\mathbb{E}(S_n h(S_n))/\mathbb{E}(S_n)$.

34.f) Conclure que T_n suit la loi de S_n biaisée par la taille.

FIN DU SUJET