$\boxed{\text{Correction du devoir surveillé du samedi 15 mars 2025}}$

C'est quasiment le sujet d'un de mes collègues donné en décembre 2023. Vous trouverez en annexe sa correction. Cela vous permettra de comparer les attentes des différents professeurs/correcteurs. Mais je ne sais pas si sa correction est vraiment rédigée, il faudrait lui demander. Parfois je ne suis pas d'accord avec lui mais il n'est pas là pour se défendre. A vous de vous faire votre propre opinion.

Problème I

Partie A Un résultat général

1) • $[0,+\infty[$ est stable par f et $u_0 \in [0,+\infty[$ donc *(récurrence)* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,+\infty[}$

• Pour un $n \in \mathbb{N}$, on applique la propriété donnée en introduction avec $x = u_{n+1}$ et $y = u_n$ et il vient : $|f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leqslant q|u_{n+1} - u_n|$ et avec la relation de récurrence;

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |\delta_{n+1}| \leq q \cdot |\delta_n|}$$

2) Raisonnons par récurrence :
• pour $n = 0$: $q^0 = 1$ donc on a bien $|\delta_0| \leq q^0.|\delta_0|$
• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\delta_n| \leq q^n.|\delta_0|$,

$$\begin{aligned} |\delta_{n+1}| &\leq q \cdot |\delta_n| \\ &\leq q \cdot q^n.|\delta_0| \\ &\leq q^{n+1}.|\delta_0| \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |\delta_n| \leq q^n.|\delta_0|}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |\delta_n| \leq q^n.|\delta_0|$ et $\sum_{n\geq 0} q^n.|\delta_0|$ est convergente *(série géométrique de raison $q \in]-1,1[$)*, donc *(Théorème de convergence par comparaison)* la série $\sum_{n\geq 0} \delta_n$ est absolument convergente donc (ACV⇒CV)

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 0} \delta_n \text{ est convergente}}$$

On a une somme télescopique donc $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k$ et $\sum_{n\geq 0} \delta_n$ est convergente donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 0} \text{ converge vers } \ell = u_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n}$$

4) Pour $x_0 \in [0;+\infty[$, on a $\forall x \in [0;+\infty[,\ |f(x) - f(x_0)| \leq q|x - x_0|$ donc en faisant tendre x vers x_0 on obtient bien $\lim_{x_0} f = f(x_0)$ et ainsi : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$
On peut alors passer à la limite sur la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = u_{n+1}$ et obtenir $\boxed{f(\ell) = \ell}$

5) La relation du préambule appliquée à ℓ et ℓ' donne $|\ell - \ell'| \leqslant q|\ell - \ell'|$, il vient $(1-q)|\ell - \ell'| \leqslant 0$ et comme $1 - q > 0$ on a $|\ell - \ell'| \leqslant 0$ donc $0 \leqslant |\ell - \ell'| \leqslant 0$ et ainsi $\boxed{\ell = \ell'}$

6) On a montré que quel que soit u_0, la suite u converge vers l'unique solution de l'équation de $f(\ell) = \ell$ donc $\boxed{u \text{ converge vers limite indépendante de la valeur de } u_0}$

Partie B Un exemple.

7) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc *(Théorème des accroissements finis)* pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \exists c \in \mathbb{R}_+$: $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$, or $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|}$$

8) **8.a)** *Classique*

```
a, b, N = 0, 1, 100
x = [ a + k*(b-a)/N for k in range(N+1) ]     # Subdivision de [a,b] en N segments
y = [ m.exp(-1/2*t) for t in x ]
plt.plot(x, y, 'k')             # La courbe
plt.plot(x, x, 'r--',)          # La droite
plt.show()
```

(efficace avec numpy)

```
x = np.linspace(0, 1, 100)    # Subdivision de [0,1] en 100 segments
y = np.exp(-1/2*x)
plt.plot(x,y,'k')             # La courbe
plt.plot(x,x,'r--',)          # La droite
plt.show()
```

8.b) ℓ est l'abscisse du point d'intersection : $\boxed{\ell \approx 0{,}7}$ *(on peut estimer une imprécision de l'ordre de* 0,01*)*

9) **9.a)** i.

```
def g(x):
    return x-exp(-x/2)       # on définit la fontion x -> x-f(x)

a, b = 0, 1
while b-a > 2*10**(-7):
    m = (a+b)/2
    if g(m) > 0: b=m         # On utilise ici le fait que la fonction g est croissante
    else : a=m
print((a+b)/2)
```

ii. A chaque tour de boucle on divise par 2 l'encadrement $[a,b]$ de ℓ et on fait un appel à f.
on cherche le premier n pour lequel $\dfrac{1}{2^n} < 2.10^{-7}$ donc pour lequel $n+1 > 7\dfrac{\ln(10)}{\ln(2)}$
en utilisant la calculatrice il vient : $\boxed{\text{La fonction précédente fait 23 appels à la fonction } f}$

9.b)

```
u = 1
for k in range(21):
    u = f(u)
    print(u, k+1)
```

qui donne l'affichage :

```
0.6065306597126334 1
0.738403149974731 2
0.691286050428152 3
0.7077650963100007 4
0.7019574087066186 5
0.7039987458045501 6
0.7032805630018437 7
0.7035331503530152 8
0.703444304176034 9
0.7034755540387092 10
0.7034645623673519 11
0.7034684285036162 12
0.7034670686525295 13
0.703467546957921 14
0.7034673787217809 15
0.7034674378961016 16
0.703467417082498 17
0.703467424403344 18
0.7034674218283558 19
0.7034674227340658 20
0.7034674224154971 21
```

Comme nous l'avons vu en classe (merci Tom) il y a une erreur d'énoncé : on nous donne u_{19} et u_{20} et non u_{20} et u_{21}
C'est embêtant cette erreur pour ceux qui ont réfléchis sur la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1})

9.c) Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes avec $(u_{2n}) \searrow$ et $(u_{2n+1}) \nearrow$ *(à détailler)*

On a donc $u_{19} \leqslant \ell \leqslant u_{20}$ d'où $\dfrac{u_{19}+u_{20}}{2}$ est une valeur approchée au niveau de précision $\dfrac{u_{20}-u_{19}}{2}$.

$$\boxed{\ell \approx 0.703467422 \text{ à } 10^{-9} \text{ près}}$$

Problème II

Partie A Quelques intégrales généralisées.

10) Commençons par montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$ est convergente.

- $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}t = 1$ converge
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que l'intégrale I_n converge,

  pour $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x t^{n+1} e^{-t} \mathrm{d}t = \left[t^{n+1}(-e^{-t})\right]_0^x + (n+1)\int_0^x t^{n+1} e^{-t} \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} (n+1)I_n$

  donc l'intégrale $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} \mathrm{d}t$ converge, ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t \text{ est convergente}}$$

On a $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant t^n e^{-t} |\sin(t)| \leqslant t^n e^{-t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$ est convergente

donc *(théorème de convergence)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$ est absolument convergente et ainsi :

$$\boxed{S_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt \text{ est convergente}}$$

On montre de même que

$$\boxed{C_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt \text{ est convergente}}$$

11) Soit $x > 0$,

(rédaction très efficace) On fait une double intégration par parties

(C'est possible car toutes les fonctions sont de classe C^∞)

$$\int_0^x e^{-t} \sin(t) dt = [(-e^{-t})\sin(t)]_0^x + [(-e^{-t})\cos(t)]_0^x - \int_0^x e^{-t} \sin(t) dt$$

donc

$$\int_0^x e^{-t} \sin(t) dt = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))\right)$$

or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $x \longmapsto (\cos(x) + \sin(x))$ est bornée donc $\boxed{S_0 = \dfrac{1}{2}}$

12) Ici on utilise exceptionnellement l'intégration par parties sur des intégrales impropres

(On a montré la convergence de toutes les intégrales et on fera bien attention que toutes les limites existent)

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt \\ &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t} \sin(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}\left(-e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= 0 \quad + \frac{1}{n+1} S_{n+1} - \frac{1}{n+1} C_{n+1} \end{aligned}$$

donc $\boxed{S_{n+1} - C_{n+1} = (n+1)S_n}$

de même

$$\begin{aligned}
C_n &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\cos(t)dt \\
&= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}e^{-t}\cos(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}\left(-e^{-t}\cos(t)-e^{-t}\sin(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \quad 0 \qquad + \frac{1}{n+1}C_{n+1} + \frac{1}{n+1}S_{n+1}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{S_{n+1}+C_{n+1}=(n+1)C_n}$

13) *(non corrigé, voir annexe)*

14) *(non corrigé, voir annexe)*

15) Soit $k\in\mathbb{N}$,
Effectuons le changement de variable $x=t^4$
• la fonction $\phi : t \longmapsto t^4$ est de classe C^1 et strictement croissante sur $[0;+\infty[$
• $\mathrm{d}x = 4t^3\mathrm{d}t$

$$\int_0^{+\infty} x^k\cdot g(x)dx = \int_0^{+\infty} t^{4k}\cdot g(t^4)\cdot 4t^3\mathrm{d}t \qquad \textit{(en cas de convergence)}$$

or on remarque que $\int_0^{+\infty} t^{4k}\cdot g(t^4)\cdot 4t^3\mathrm{d}t = int_0^{+\infty} t^{4k+3}e^{-t}\sin(t)dt$

donc $\int_0^{+\infty} x^k\cdot g(x)dx$ converge et vaut S_{4k+3} et comme on a démontré en **14)** que $S_{4k+3}=0$ on a bien :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^k\cdot g(x)dx = 0}$$