Devoir à la maison pour vendredi 19 septembre 2025 .

- *On rappelle que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \pi \approx 3{,}14$$

- *On admet la propriété suivante qui ne sert que dans la fin de la partie 3* ,

  pour toute suite double $(u_{n,p})$ de réels positifs ou nuls, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right)$$ dès qu'une des deux expressions est constituée de séries convergentes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

Dans ce problème, on dira que la suite (u_n) vérifie $(\mathscr{L})$ lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 \qquad \textit{(la somme existe et vaut 1)}$$

Partie 1

1) Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$, on note $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in [\![0;N]\!],\ b_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \notin [\![0;N]\!],\ b_n = 0.$$

   a) Montrer que (b_n) vérifie $(\mathscr{L})$.

   b) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} nb_n$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} nb_n$.

2) On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $c_0 = 0$ et $\forall n \in [\![1;+\infty[\![,\ c_n = \dfrac{1}{2^n}$.

   a) Montrer que (c_n) vérifie $(\mathscr{L})$.

   b) Montrer que $\sum nc_n$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} nc_n$.

3) On note $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \dfrac{2^n}{n!}e^{-2}$.

   a) Montrer que (d_n) vérifie $(\mathscr{L})$.

   b) Montrer que $\sum nd_n$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} nd_n$.

4) A l'aide des séries usuelles déterminer une suite (e_n) vérifiant $(\mathscr{L})$ mais telle que $\sum ne_n$ diverge.

Partie 2.

Soit (u_n) une suite vérifiant $(\mathscr{L})$, on note la fonction $f_u : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$

1) a) Montrer que que f_u est définie sur $[0,1]$.

   b) Donner les valeurs de $f_u(0)$ et $f_u(1)$.

   c) Montrer que f_u est croissante sur $[0,1]$.

2) On reprend la suite (b_n) de la partie 1 et on s'intéresse ici à $f_b : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

   a) Montrer f_b est définie sur $\mathbb{R}$.

   b) Justifier que f_b est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f_b(x) = (1-p+px)^N$.

   d) En déduire $f_b'(1)$.

3) On reprend la suite (c_n) de la partie 1 et on s'intéresse ici à $f_c : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

a) Montrer que l'ensemble de définition de f_c est $]-2\,,\,2\,[$.

(Il s'agit ici de déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ converge)

b) Exprimer pour tout $x \in]-2\,,\,2\,[$, $f_c(x)$ en fonction de x sans la notation $\sum$.

c) En déduire que f_c est dérivable sur $]-2\,,\,2\,[$.

d) Montrer que $f_c'(1) = 2$.

Partie 3.

Soit (u_n) une suite vérifiant $(\mathscr{L})$, on note ici f la fonction $\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \end{array}$.

(f est la restriction de f_u au segment $[0,1]$).

Le but de cette partie est de démontrer que f est continue en 1, puis sous condition que f est dérivable en 1.

On note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

1) Déterminer les variations des suites (S_n) et (R_n) ainsi que leur limite.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le signe de $x^k - x^{k+1}$ sur le segment $[0,1]$.

3) a) Soit $x \in [0,1]$.

i. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k(1-x^k) = R_n(x^{n+1}-1) + \sum_{k=0}^{n} R_k(x^k - x^{k+1})$

ii. En déduire que : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x^k - x^{k+1})$ *On justifiera bien l'existence de ces deux sommes.*

b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) \leqslant R_0(1-x^N) + R_N$$

Indication on majorera séparément : $\sum_{k=0}^{N-1} R_k(x^k - x^{k+1})$ *et* $\sum_{k=N}^{+\infty} R_k(x^k - x^{k+1})$

c) En déduire que $\lim_{x\to 1} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) = 0$.

Indication : On utilisera ici la définition quantifiée des différentes limites.

d) En déduire que f est continue en 1.

4) a) Montrer que : $\sum_{k\geqslant 0} k u_k$ converge si et seulement si, $\sum_{k\geqslant 0} R_k$ converge.

et qu'en cas de convergence : $\sum_{k=0}^{+\infty} k u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k$.

b) On suppose dans cette question que $\sum_{k\geqslant 0} k u_k$ converge,

i. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x^k - 1)$$

ii. En déduire que f est dérivable en 1.

On pourra pour cela utiliser 3) pour une suite qui vérifie les mêmes propriétés que la suite (u_n).

iii. Exprimer $f'(1)$ en fonction des u_k.

FIN DU SUJET