Correction du devoir maison rendu le 19/09/2025

Partie 1

1) a) • $p \in]0,1[$ donc pour tout n, $b_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \geqslant 0$ *(expression toujours valable si $n > N$)*

• de plus $\underline{b_n \text{ est nul pour } n > N}$ donc la série converge et sa somme vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} b_k &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \\ &= (p+(1-p))^N \qquad \textit{(formule du binôme)} \\ &= 1\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{(b_n) \text{ vérifie } (\mathscr{L})}$$

b) nb_n est nul pour $n > N$ donc la série converge et sa somme vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} kb_k &= \sum_{k=0}^{N} k\binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \\ &= \sum_{k=1}^{N} N\binom{N-1}{k-1} p^k (1-p)^{N-k} \\ &= Np \sum_{k=1}^{N} \binom{N-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{N-k} \\ &= Np \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \\ &= Np(p+(1-p))^{N-1} \qquad \textit{(formule du binôme)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 0} nb_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} nb_n = Np}$$

2) a) • $c_0 = 0 \geqslant 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $c_n = \dfrac{1}{2^n} \geqslant 0$

• de plus :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} c_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \qquad \textit{(car } c_0 = 0\textit{)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1 \qquad \textit{(Série géométrique de raison } \tfrac{1}{2} \in]-1,1[\textit{)}\end{aligned}$$

donc $\sum c_n$ converge de sa somme vaut 1.

En conclusion :

$$\boxed{(c_n) \text{ vérifie } (\mathscr{L})}$$

b) On sait que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{1}{2^{n-1}}$ existe et vaut $\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4$ *(série géométrique dérivée d'ordre 1)*

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{1}{2^n}$ existe et vaut 2

$$\boxed{\sum nc_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} nc_n = 2}$$

3) a) • pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \dfrac{2^n}{n!} e^{-2} \geqslant 0$

• de plus on sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ existe et vaut e^2 *(série exponentielle)* donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} d_n$ existe et vaut 1.

En conclusion :

$$\boxed{(d_n) \text{ vérifie } (\mathscr{L})}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k d_k &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{2^k}{k!} e^{-2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{2^k}{k!} e^{-2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} e^{-2} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{(k)!} e^{-2} \\ &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2\, e^2\, e^{-2} = 2 \qquad \textit{(série exponentielle)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum n d_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} n d_n = 2}$$

4) En posant $\boxed{e_0 = 0 \text{ et pour } n \geqslant 1,\ e_n = \dfrac{6}{(n\pi)^2}}$ on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e_n = 1$ *(d'après le rappel au début de l'énoncé)*

et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} n e_n$ diverge car $n e_n = \dfrac{6}{\pi^2 n}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ diverge *(série harmonique)*.

On a bien défini une suite (e_n) vérifiant $(\mathscr{L})$ mais telle que $\sum n e_n$ diverge.

Partie 2.

1) a) Soit $x \in [0, 1]$,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n x^n \leqslant u_n$ et comme (u_n) vérifie $(\mathscr{L})$ donc $\sum u_n$ converge

donc *(théorème de convergence)* $\sum u_n x^n$ converge.

pour tout $x \in [0, 1]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ existe donc

$$\boxed{f_u \text{ est définie sur } [0, 1]}$$

b) $\boxed{f_u(0) = u_0}$ et $\boxed{f_u(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1}$ (car (u_n) vérifie $\mathcal{L}$)

c) Soient x_1 et x_2 dans $[0, 1]$ tels que $x_1 < x_2$,

comme (u_n) est à termes positifs ou nuls, $\forall k \in \mathbb{N}, u_k x_1^k \leqslant u_k x_2^k$

en sommant pour k allant de 0 à un entier n on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k x_1^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k x_2^k$

et en passant à la limite on obtient : $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, *(On peut passer à la limite car les deux sommes existent)*

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } [0, 1]}$$

2) a) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la suite est nulle à partir de $N + 1$ donc la série $\sum b_n x^n$ est convergente ainsi :

$$\boxed{f_b \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f_b(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k x^k$ donc f_b est une fonction polynomiale et ainsi :

$$\boxed{f_b \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_b(x) &= \sum_{k=0}^{N} b_k x^k \\ &= \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} x^k \\ &= \binom{N}{k} (1-p)^{N-k} (px)^k \\ &= (1-p+px)^N \qquad \textit{(formule du binôme)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f_b(x) = (1-p+px)^N}$$

d) La formule précédente donne pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f_b'(x) = Np(1-p+px)^{N-1}$

$$\boxed{f_b'(1) = Np}$$

3) a) On sait que $\sum q^n$ converge si, et seulement si, $-1 < q < 1$

donc $\sum \left(\frac{x}{2}\right)^n$ converge si, et seulement si, $x \in]-2, 2[$

or $c_n x^n = \left(\frac{x}{2}\right)^n$ donc

$$\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f_c \text{ est }]-2\,,\,2\,[}$$

b) Soit $x \in]-2\,,\,2\,[$,

$$\begin{aligned} f_c(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \frac{x}{2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \qquad \textit{(série géométrique)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-2\,,\,2\,[,\ \ f_c(x) = \frac{x}{2-x}}$$

c) $x \longmapsto \dfrac{x}{2-x}$ est une fraction rationnelle définie sur $]-2\,,\,2\,[$ donc elle est dérivable sur cet intervalle.

$$\boxed{f_c \text{ est dérivable sur }]-2\,,\,2\,[}$$

d) L'expression précédente donne $\forall x \in]-2\,,\,2\,[,\ \ f_c'(x) = \dfrac{1}{2-x} + \dfrac{x}{(2-x)^2} = \dfrac{2}{(2-x)^2}$ ce qui entraîne bien :

$$\boxed{f_c'(1) = 2}$$

Partie 3.

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$ donc $\boxed{(S_n) \text{ est croissante}}$.

La série $\sum_{k \geqslant 0} u_k$ converge et sa somme vaut S donc $\boxed{(S_n) \text{ converge vers } S}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{n+1} - R_n = -u_{n+1} \leqslant 0$ donc $\boxed{(R_n) \text{ est décroissante}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = S - S_n$ et (S_n) converge vers S donc $\boxed{(R_n) \text{ converge vers } 0}$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$\forall x \in [0,1],\ x^k - x^{k+1} = x^k(1-x)$ donc

$$\boxed{\forall x \in \big]0,1\big[,\ x^k - x^{k+1} > 0 \text{ et pour } x \in \big\{0,1\big\},\ x^k - x^{k+1} = 0}$$

3) a) i. pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k(1-x^k) &= \sum_{k=1}^{n} u_k(1-x^k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(R_{k-1}-R_k\big)(1-x^k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(R_{k-1}-R_k\big) - \sum_{k=1}^{n} R_{k-1}x^k + \sum_{k=1}^{n} R_k x^k \\
&= R_0 - R_n - \sum_{k=0}^{n-1} R_k x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} R_k x^k \\
&= R_0 - R_n - \sum_{k=0}^{n} R_k x^{k+1} + R_n x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} R_k x^k - R_0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k(1-x^k) = R_n(x^{n+1}-1) + \sum_{k=0}^{n} R_k(x^k - x^{k+1})}$$

ii. On sait que :

❶ $\sum u_n$ et $\sum u_n x^n$ convergent donc $\sum u_n(1-x^n)$ converge

❷ (R_n) converge vers 0 et (x^n) bornée donc $R_n(x^{n+1}-1)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

la relation de la question précédente permet alors d'affirmer que $\sum R_n(x^n - x^{n+1})$ converge et en passant à la limite on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x^k - x^{k+1})}$$

b) Si $x=1$ l'égalité est immédiate, raisonnons pour $x \in \big[0,1\big[$.
Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \big[0,1\big[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} R_k(x^k - x^{k+1}) &\leqslant R_0 \sum_{k=0}^{N-1} (x^k - x^{k+1}) && \textit{car } (R_n) \textit{ décroissante et } (x^k - x^{k+1}) \geqslant 0 \\
&\leqslant R_0(1-x^N) && \textit{(telescopage)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{+\infty} R_k(x^k - x^{k+1}) &\leqslant R_N \sum_{k=N}^{+\infty} (x^k - x^{k+1}) && \textit{car } (R_n) \textit{ décroissante et } (x^k - x^{k+1}) \geqslant 0 \\
&\leqslant R_N(x^N - 0) && \textit{(série telescopique)} \\
&\leqslant R_N && \textit{car } x \in [0,1[
\end{aligned}$$

or $\displaystyle \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) = \sum_{k=0}^{N-1} R_k(x^k - x^{k+1}) + \sum_{k=N}^{+\infty} R_k(x^k - x^{k+1})$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) \leqslant R_0(1-x^N) + R_N}$$

c) Soit $\varepsilon > 0$,

- d'une part prenons un $N \in \mathbb{N}$ tel que $R_N \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ *(ce N existe car (R_n) converge vers 0).*
- d'autre part sachant que $\lim\limits_{x \to 1} R_0(1-x^N) = 0$,

  on peut prendre un $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [1-\alpha, 1],\ R_0(1-x^N) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

  donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in [1-\alpha, 1],\ 0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) = 0}$

d) On a : $f(1) - f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1 - x^k)$

donc on vient de montrer que $\lim_{x\to 1}(f(1) - f(x)) = 0$ ou encore $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$$\boxed{f \text{ est continue en } 1}$$

4) a) *Ici le signe "=" signifie "de même nature et de somme égale en cas de convergence"*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k u_k &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} u_k \mathbb{1}_{i\leqslant k} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \mathbb{1}_{i\leqslant k} && \textit{(admis au début du sujet)} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} u_k \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} R_{i-1} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} R_k
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 0} k u_k \text{ converge si et seulement si, } \sum_{k\geqslant 0} R_k \text{ converge} \qquad \text{et alors : } \sum_{k=0}^{+\infty} k u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k.}$$

b) i. Soit $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned}
f(1) - f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1 - x^k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x^k - x^{k+1}) && \textit{(d'après 3)a))} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} R_k x^k (1 - x) \\
&= (1 - x)\sum_{k=1}^{+\infty} R_k x^k
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0, 1[, \qquad \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x^k - 1)}$$

ii. La suite (R_n) possède les mêmes propriétés que (u_n) à la question 3) *(à un coefficient près !)*

donc $\lim_{x\to 1} \sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x^k - 1) = 0$ et on en déduit que $\lim_{x\to 1} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$,

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 1}$$

iii. On vient de montrer que $f'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$,

et avec le résultat de la question 4)a) on obtient finalement :

$$\boxed{f'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n u_n}$$

FIN DE LA CORRECTION