BCPST 2_A

DEVOIR SURVEILLE

MATHÉMATIQUES - INFORMATIQUE

Samedi 27 septembre 2025

(3 heures)

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre. ***La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements*** *entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités* ***à encadrer*** *leurs résultats.*

Une partie des points du barème sera expressément réservée à l'appréciation de la qualité de l'orthographe ainsi qu'à la clarté et à la mise en valeur des conclusions.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Ce sujet comporte 4 pages.

Ce sujet est formé de 3 exercices et un problème totalement indépendants.

EXERCICE 1 Autour d'une intégrale

Soient a et b deux entiers naturels. On définit :

$$f_{a,b} : x \mapsto x^a(1-x)^b \quad \text{et} \quad I_{a,b} = \int_0^1 f_{a,b}(x)\mathrm{d}x$$

1) Représenter graphiquement les fonctions $f_{1,1}$ et $f_{2,1}$ sur le segment $[0,1]$.

2) Calculer $I_{0,n}$ pour tout entier naturel n.

3) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a \neq 0$. Trouver une relation entre $I_{a,b}$ et $I_{a-1,b+1}$.

4) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall b \in \mathbb{N}, \quad I_{a,b} = \frac{a!\ b!}{(a+b+1)!}$$

5) Déterminer la limite de la suite de terme général $\dfrac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}}$.

6) Soit u une suite réelle et ℓ un réel.
Donner la définition, avec quantificateurs, de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

7) En déduire l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait :

$$\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} \leqslant \frac{1}{2}$$

8) En déduire que pour tout $n \geq n_0$ on a : $I_{n,n} \leqslant \dfrac{2^{n_0} I_{n_0,n_0}}{2^n}$.

9) Déterminer la nature de la série de terme général $I_{n,n}$.

10) **a)** Déterminer un équivalent de $\ln\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En déduire la limite de $\exp\left((2n+1)\ln\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) On admet l'équivalent suivant (dit de Stirling) :

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

En déduire un équivalent de $4^n I_{n,n}$.

d) Déterminer la nature de la série de terme général $4^n I_{n,n}$.

EXERCICE 2 : Etude de deux séries.

Rappel : Pour α un réel strictement positif $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$

---

11) **a)** Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \dfrac{dt}{t} \leqslant \dfrac{1}{p}$.

b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad 0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \dfrac{1}{p} - \ln(k) \leqslant 1$.

12) Soit $x \in [0,1[$, montrer que la série de terme général $\dfrac{x^n}{n}$ converge

13) *Le but de cette question est d'exprimer la somme de cette série en fonction de x.*

a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et t un réel tel que $t \in [0,1[$, donner l'expression rationnelle[1] de $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} t^n$.

b) Soit x un réel tel que $0 \leqslant x < 1$.
En intégrant entre 0 et x l'égalité trouvée à la question précédente, montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^N}{1-t}dt$$

Montrer alors que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^N}{1-t}dt \leqslant \dfrac{1}{1-x}\,\dfrac{x^{N+1}}{N+1}$.

c) En déduire une expression de la somme de la série de terme général $\dfrac{x^n}{n}$ en fonction de $x \in [0,1[$.

14) **a)** Pour tout x de $]0,1[$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\ln(n)x^n$.

b) En déduire que, pour tout x de $[0,1[$, la série de terme général $\ln(n)x^n$ est convergente.

15) On pose maintenant $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \ln(n)x^n$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$.

Le but de cette question est de trouver un équivalent simple de $S(x)$ lorsque x est au voisinage de 1^-.

a) Montrer, en utilisant la question **11)**, que :

$$\forall x \in [0,1[\quad \forall N \in \mathbb{N}^*,\quad 0 \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{x^n}{p}\right) - S_N(x) \leqslant \sum_{n=1}^{N} x^n$$

b) Vérifier d'autre part que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{x^n}{p}\right) = \frac{1}{1-x}\left(\sum_{p=1}^{N}\frac{x^p}{p} - \sum_{p=1}^{N}\frac{x^{N+1}}{p}\right)$.

c) Déduire de **a)** et de **b)** que :

$$\forall x \in [0,1[,\quad \forall N \in \mathbb{N}^*,\quad 0 \leqslant \frac{1}{1-x}\left(\sum_{p=1}^{N}\frac{x^p}{p} - x^{N+1}\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}\right) - S_N(x) \leqslant \frac{x}{1-x}$$

d) Justifier que : $\lim\limits_{N\to+\infty} x^{N+1}\displaystyle\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p} = 0$.

e) Déduire de la question **13)c)** et des résultats établis en **15) c), d)** que :

$$S(x) \underset{x\to1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

---

1. Quotient de deux polynômes

EXERCICE 3 : Informatique.

Dans cet exercice, les fonctions natives `max`, `sum`, `set` ainsi que le module `numpy` ne sont pas autorisés.

16) Sur une liste.

Dans cette question les fonctions prennent pour argument une liste de nombres [2].

Par exemple :

`L1 = [6.2, 5, 2.0, 5, 2., 2.]` ou `L2 = [ -3, -1, -2, -3, -5]` ou `L3 = [-1, 1, 3.5, 5]`

- **a)** Ecrire une fonction `maxi(L)` qui renvoie le maximum d'une liste de nombres. Donner le résultat renvoyé par cette fonction pour les trois exemples `L1`, `L2` et `L3`.
- **b)** Ecrire une fonction `somme(L)` qui renvoie la somme des éléments d'une liste de nombres.
- **c)** Ecrire une fonction `distinct(L)` qui renvoie la liste des éléments distincts d'une liste de nombres. Par exemple avec l'exemple `L1` cette fonction devra renvoyer `[6.2, 5, 2.0]`.

17) Sur une liste de listes de nombres.

Dans cette question les fonctions prennent pour argument une liste de listes de nombres.

Par exemple : `L = [[1.2, 2.5, 2.0, 5.2], [ 3, -1, 2, 3, -5], [2.5, 3.5, 5]]`

- **a)** Ecrire une fonction `maxi2(L)` qui renvoie le maximum des éléments des sous-listes de `L`. Par exemple avec l'exemple `L` cette fonction devra renvoyer `5.2`.
- **b)** Ecrire une fonction `somme2(L)` qui renvoie la somme des éléments des sous-listes de `L`. Par exemple avec l'exemple `L` cette fonction devra renvoyer `23.9`.
- **c)** Ecrire une fonction `long_max(L)` qui prend pour argument une liste de listes de nombres et qui renvoie la longueur maximale de ses sous-listes. Par exemple avec l'exemple `L` cette fonction devra renvoyer `5`.
- **d)** Ecrire une fonction `rajoute_0(L)` qui ajoute des zéros à la fin de toutes les sous listes de sorte qu'elles aient toute la même longueur. *(on ne rajoute rien sur les listes les plus grandes)* Par exemple avec `L` cette fonction devra renvoyer

  `[[1.2, 2.5, 2.0, 5.2, 0], [ 3, -1, 2, 3, -5], [2.5, 3.5, 5, 0, 0] ]` .

18) Sur un tableau n lignes p colonnes.

On modélise ces tableaux n lignes p colonnes par des listes contenant n listes de longueur p.

Un exemple avec le tableau 3 lignes et 5 colonnes :

```
T = [ [2,2,0,4,5],
      [6,2,5,3,6],
      [0,1,2,3,4] ]
```

- **a)** Ecrire une fonction `max_lignes(T)` qui prend en entrée un tableau `T` et qui renvoie la liste des maximums de chaque ligne. Sur l'exemple `T` cette fonction doit renvoyer `[5, 6, 4]`
- **b)** Ecrire une fonction `max_colonnes(T)` qui prend en entrée un tableau `T` et qui renvoie la liste des maximums de chaque colonne. Sur l'exemple `T` cette fonction doit renvoyer `[6,2,5,4,6]`
- **c)** Que renvoient les deux fonctions précédentes pour les tableaux suivants ?

```
T1 = [ [2*i-j  for j in range(1, 5)]  for i in range(1, 4) ]

T2 = [ [i**2+j**2  for j in range(-5, 6)]  for i in range(-5, 6) ]
```

2. flottants ou entiers

PROBLEME : Approximation d'intégrales.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux réels vérifiant $a < b$. On note pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\quad x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$

Partie 1

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, on note (S_n) la suite définie par : $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$

On suppose que la fonction f est de classe C^1 sur $[a,b]$, sa dérivée est donc bornée sur $[a,b]$.
On pose $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \in [a,b],\ \ |f'(t)| \leqslant M$.

Le but de cette partie est de démontrer que (S_n) converge vers l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$

19) Montrer que pour α et β dans $[a,b]$: $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = (\beta-\alpha)f(\alpha) + \int_\alpha^\beta (\beta-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$

20) En déduire que pour α et β dans $[a,b]$ vérifiant $\alpha < \beta$: $\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta \big(f(t)-f(\alpha)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{2}$

21) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t)-f(x_k))\,dt$

22) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - S_n\right| \leqslant M\dfrac{(b-a)^2}{2n}$

23) Conclure et donner le nom de cette méthode numérique.

Partie 2

Ici, toujours pour une fonction f définie sur $[a,b]$ on note (T_n) la suite définie par $T_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$.

On suppose ici que f est de classe C^2 sur $[a,b]$ et ainsi sa dérivée seconde est bornée sur $[a,b]$ $\quad (a < b)$.
On pose $M_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \in [a,b],\quad |f''(t)| \leqslant M_2$.

Le but de cette partie est de montrer que (T_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et plus rapidement que (S_n) .

24) Montrer que pour α et β dans $[a,b]$: $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t = (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\beta-t)(t-\alpha)f''(t)\mathrm{d}t$

25) Montrer que $\displaystyle\int_\alpha^\beta (\beta-t)(t-\alpha)\,\mathrm{d}t = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$ *(Un intégration par parties peut vous éviter de longs calculs)*

26) En déduire que pour α et β dans $[a,b]$ vérifiant $\alpha < \beta$: $\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta \left(f(t) - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant M_2\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}$

27) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt - T_n\right| \leqslant M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}$

28) Conclure.

29) Expliquer avec soin et à l'aide d'une figure, pourquoi cette méthode est dite "des trapèzes" [3].

Partie 3

30) Ecrire une fonction `somme_rectangle(f, a, b, n)` qui renvoie la somme S_n de la partie 1.

31) Ecrire une fonction `somme_trapeze(f, a, b, n)` qui renvoie la somme T_n de la partie 2.

32) Ecrire un programme permettant de comparer graphiquement le comportement des suites (S_n) et (T_n) pour f la fonction $x \longmapsto e^{-(x^2)}$ et $(a,b) = (-1,1)$.

FIN DU SUJET

3. L'aire d'un trapèze est donnée par la formule / hauteur$\times$(petite base + grande base)/2