

DEVOIR SURVEILLÉ

MATHÉMATIQUES

samedi 31 janvier 2026

(2 heures)

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les conclusions.*

La calculatrice n'est pas autorisée.

Ce sujet comporte 4 pages.

Il comprend un exercice et un problème. La fin du problème constitue une ouverture, proposée à titre indicatif, et établit un lien avec l'exercice. Elle ne sera pas prise en compte dans le barème.

Les différentes parties du problème sont étroitement liées ; il est conseillé de traiter les questions dans l'ordre.

Notation :

On note $\mathbb{R}_4[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 4, muni de la base canonique

$$\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3, X^4).$$

Rappels :

- La matrice de passage de la base B_1 vers la base B_2 est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base B_2 exprimés dans la base B_1 .
- On appelle *matrice stochastique par lignes* une matrice carrée à coefficients réels positifs ou nuls et dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.
- On appelle *matrice stochastique par colonnes* une matrice carrée à coefficients réels positifs ou nuls et dont la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1.
- Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
On dit que la suite (M_n) converge vers une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ lorsque :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, q\}, \quad (M_n)_{i,j} \longrightarrow M_{i,j} \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Autrement dit, une suite de matrices converge chacun de ses coefficients converge.

On note alors

$$M_n \longrightarrow M.$$

Exercice : Autour de la loi exponentielle.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0 \quad \text{si } x < 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{sinon}$$

1) Montrer que f est une densité de probabilité. Illustrer graphiquement ce résultat.

2) On note pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt$

Remarque : I_n est appelé moment d'ordre n de la loi exponentielle : $I_n = E(X^n)$.

On remarque que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t^n \lambda e^{-\lambda t} dt$ sont égales en cas de convergence.

a) Montrer que pour tout réel $A > 0$

$$\int_0^A t^{n+1} \lambda e^{-\lambda t} dt = -A^{n+1} e^{-\lambda A} + \frac{n+1}{\lambda} \int_0^A t^n \lambda e^{-\lambda t} dt$$

b) En déduire, par récurrence sur n , que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge et $I_n = \frac{n!}{\lambda^n}$.

c) Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

3) On note G la fonction : $t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{tx} dx$.

Remarque : G est appelée fonction génératrice des moments de la loi exponentielle : $G : t \mapsto E(e^{tX})$.

a) Montrer que l'ensemble de définition de G est $] -\infty ; \lambda[$.

(Autrement dit : Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{tx} dx$ converge équivaut à $t < \lambda$)

b) Montrer que pour tout $t \in] -\infty ; \lambda[$, $G(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$.

c) Vérifier que pour tout $t \in] -\lambda ; \lambda[$, $G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \frac{t^n}{n!}$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G^{(n)}(0) = I_n$. (où $G^{(n)}$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de G)

Indication : En utilisant l'expression obtenue à la question 3)b, déterminer une formule explicite de $G^{(n)}(t)$ par récurrence sur n , puis conclure en $t = 0$.

Problème

Dans tout le problème, on considère la même matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$$

Partie I : Étude spectrale de A .

4) Déterminer le spectre de A .

5) La matrice A est-elle diagonalisable ?

6) Justifier que $T : P(X) \mapsto (X - 1)P'(X)$ permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

Indication : D'une part une application de $\mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}_4[X]$ et d'autre part une application linéaire.

On notera : $T : \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$, définie par : $T(P) = (X - 1)P'$.

7) Déterminer la matrice de l'endomorphisme T dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_4[X]$.

8) Montrer que pour chaque k de $\llbracket 0; 4 \rrbracket$ le polynôme $P_k = (X - 1)^k$ est un vecteur propre de T .

9) Justifier que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ et donner Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$

10) Déterminer une matrice $\Delta \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = Q\Delta Q^{-1}$

- 11) a) Rappeler la formule du binôme de Newton pour des nombres réels.
 b) En s'inspirant de la formule du binôme de Newton, proposer sans la justifier une expression de $(P+Q)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.
 c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X-1)^k$.
(Indication : on pourra utiliser $X = 1 + (X-1)$)
 d) En déduire l'inverse de la matrice Q .
- 12) Montrer que : $\left(\frac{1}{20}A\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_{\mathcal{M}_5(\mathbb{R})}$

Partie II : Étude d'une nouvelle matrice.

On note J la matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, et on définit

$$M = \frac{1}{20}(A + 4J).$$

- 13) Exprimer J^2 en fonction de J puis montrer, par récurrence sur n , que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 5^{n-1}J$.
 14) Calculer JA et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(A + 4J)^n = A^n + \sum_{k=1}^n 4^k 5^{k-1} A^{n-k} J$.
On pourra raisonner par récurrence.
 15) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$M^n = \frac{1}{20^n} A^n + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{5 \cdot 20^r} A^r J.$$

Partie III : Limite d'une somme de matrices.

- 16) (*Question de cours*)

Soit q un réel appartenant à $] -1, 1[$, démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1}{1-q}$

- 17) On note $K = \frac{1}{20}A$, on a vu à la question 12) que (K^n) converge vers $0_{\mathcal{M}_5(\mathbb{R})}$.

Le but de cette question est de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} K^k = (I_5 - K)^{-1}$$

- a) Montrer que $(I_5 - K)$ est inversible.
 b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} K^k\right)(I_5 - K) = I_5 - K^n$$

- c) Conclure.

- 18) a) Justifier que la suite de matrices $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite en fonction de A et J . On notera L cette limite.
 b) Que peut-on remarquer sur les colonnes de L .

Partie IV : Chaîne de Markov et horloge aléatoire

On conserve la matrice M définie précédemment.

19) Montrer que la matrice M est stochastique et préciser si elle est stochastique par lignes ou par colonnes.

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $i, j \in \{1, \dots, 5\}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i \mid X_n = j) = (M)_{i,j}.$$

On note $p_n \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne de loi de X_n , défini par $(p_n)_i = \mathbb{P}(X_n = i)$.

20) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{n+1} = Mp_n,$$

puis en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n = M^n p_0.$$

21) Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et tous $i, j \in \{1, \dots, 5\}$,

$$(M^n)_{i,j} = \mathbb{P}(X_n = i \mid X_0 = j).$$

Interpréter, en termes probabilistes, la convergence des coefficients de (M^n) établie à la question 18).

22) *Le but de cette question est de diagonaliser M en utilisant les résultats de la partie I et II.*

a) Montrer que les vecteurs propres de la matrice A associés aux valeurs propres 1, 2, 3, 4 sont également des vecteurs propres de M . Préciser les valeurs propres correspondantes de M .

b) Montrer que 1 est une valeur propre de M et de vecteur propre associé $U = (I - K)^{-1} \mathbb{1}_5$.

où $\mathbb{1}_5$ est la matrice colonne remplie de 1.

Pour le vecteur propre on pourra remarquer $J = \mathbb{1}_5 \mathbb{1}_5^T$ et montrer que : $KU = U - \mathbb{1}_5$ et $\mathbb{1}_5^T U = 5$

c) En déduire que la matrice M est diagonalisable et préciser l'ensemble de ses valeurs propres.

On notera P et $\mu_1, \dots, \mu_5$ tels que :

$$M = PDP^{-1}, \quad D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_5).$$

La suite est hors barème.

On introduit maintenant une horloge aléatoire.

Soit $\lambda > 0$. On considère une suite $(S_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle de paramètre λ , indépendante de la suite (X_n) .

On définit

$$T_0 = 0, \quad T_n = \sum_{k=1}^n S_k, \quad N_t = \max\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\},$$

et on pose

$$Y_t = X_{N_t} \quad (t \geq 0).$$

On note enfin

$$q(t) = (\mathbb{P}(Y_t = 1), \dots, \mathbb{P}(Y_t = 5))^T.$$

On admet que pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

23) Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$q(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} M^n p_0.$$

24) Montrer que

$$q(t) = P \left(e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} D^n \right) P^{-1} p_0.$$

25) En déduire que

$$e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} D^n = \text{diag}(e^{\lambda t(\mu_1-1)}, \dots, e^{\lambda t(\mu_5-1)}),$$

puis donner une expression explicite de $q(t)$.

26) En déduire la limite de $q(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$ et interpréter ce résultat.