

Exercice : Autour de la loi exponentielle.

- 1) • $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$,
 • f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
 • f est nulle sur $] -\infty; 0[$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt$ (en cas de convergence)

Pour $x \in [0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt &= \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^x \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{car } \lambda > 0 \end{aligned}$$

En conclusion :

f est une densité de probabilité.

- 2) a) Soit $A > 0$,
 Les fonctions $t \mapsto t^{n+1}$ et $t \mapsto -e^{-\lambda t}$ sont C^1 sur $[0, A]$ donc par intégration par parties :

$$\int_0^A t^{n+1} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[t^{n+1} (-e^{-\lambda t}) \right]_0^A - \int_0^A (n+1) t^n (-e^{-\lambda t}) dt$$

donc

$$\int_0^A t^{n+1} \lambda e^{-\lambda t} dt = -A^{n+1} e^{-\lambda A} + \frac{n+1}{\lambda} \int_0^A t^n \lambda e^{-\lambda t} dt$$

- b) Montrons, par récurrence sur n , que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge et $I_n = \frac{n!}{\lambda^n}$.

- Pour $n = 0$,

d'une part, on a vu à la question 1) que I_0 est convergente et vaut 1, d'autre part, $\frac{0!}{\lambda^0} = 1$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que I_n converge et $I_n = \frac{n!}{\lambda^n}$,

on sait d'après la question 2) a) que pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A t^{n+1} \lambda e^{-\lambda t} dt = -A^{n+1} e^{-\lambda A} + \frac{n+1}{\lambda} \int_0^A t^n \lambda e^{-\lambda t} dt$$

sachant que l'intégrale I_n converge et vaut $\frac{n!}{\lambda^n}$ on a : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t^n \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{n!}{\lambda^n}$

et $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^{n+1} e^{-\lambda A} = 0$ (croissances comparées)

il vient que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t^{n+1} \lambda e^{-\lambda t} dt = 0 + \frac{n+1}{\lambda} \frac{n!}{\lambda^n}$

donc l'intégrale I_{n+1} converge et vaut $\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+1}}$

En conclusion :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge et $I_n = \frac{n!}{\lambda^n}$

- c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \frac{n!}{\lambda^n} = +\infty$ (C'est une croissance comparée lorsque $\lambda > 0$)

La suite (I_n) tend vers $+\infty$

- 3) a) On fixe $t \in \mathbb{R}$,
 f est nulle sur $] -\infty; 0[$ donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{tx} dx \quad (\text{en cas de convergence}) \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{x(t-\lambda)} dx \end{aligned}$$

Disjonction de cas :

- Si $t \geq \lambda$ alors $\forall x > 0, e^{x(t-\lambda)} \geq 1$ donc (Théorème de convergence par comparaison)

$$\int_0^{+\infty} e^{x(t-\lambda)} dx \text{ diverge}$$

- Si $t < \lambda$ alors $F : x \mapsto \frac{1}{t-\lambda} e^{x(t-\lambda)}$ est une primitive de la fonction intégrée et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{x(t-\lambda)} dx \text{ converge}$$

En conclusion, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{tx} dx$ converge si, et seulement si, $t < \lambda$,

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } G \text{ est }] -\infty; \lambda[}$$

- b) En utilisant la primitive F définie à la question précédente on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{x(t-\lambda)} dx &= \lim_{+\infty} F - F(0) \\ &= 0 - \frac{\lambda}{t-\lambda} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout } t \in] -\infty; \lambda[, \quad G(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}}$$

- c) Soit $t \in] -\lambda; \lambda[$,
 en utilisant l'expression de la question 2)b) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{\lambda^n} \frac{t^n}{n!} \quad (\text{en cas de convergence}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^n \quad (\text{ c'est une série convergente car } \left| \frac{t}{\lambda} \right| < 1) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{t}{\lambda}} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \end{aligned}$$

On retrouve l'expression de G trouvée à la question 3)

$$\boxed{\text{pour tout } t \in] -\lambda; \lambda[, \quad G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \frac{t^n}{n!}}$$

- d) L'expression trouvée à la question 3)b) permet d'établir par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad G^{(n)} : x \mapsto \frac{\lambda n!}{(\lambda - t)^{n+1}}$$

En $t = 0$ on obtient $G^{(n)}(0) = \frac{n!}{\lambda^n}$ et ainsi

$$\boxed{G^{(n)}(0) = I_n}$$

Problème

Partie I : Etude spectrale de A .

- 4) La matrice A est triangulaire donc le spectre est lu sur la diagonale : $\boxed{\text{Sp}(A) = \{0, 1, 2, 3, 4\}}$
- 5) A est une matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ avec 5 valeurs propres distinctes donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$
- 6) • Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$

on a $\deg(P) \leq 4$ donc $\deg(P) \leq 3$ et ainsi $(X-1)P'(X) \in \mathbb{R}_4[X]$ donc

T permet de définir une application de $\mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}_4[X]$

- Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_4[X]^2$,

$$\begin{aligned} T(\alpha P + \beta Q) &= (X-1)(\alpha P + \beta Q)' \\ &= (X-1)(\alpha P' + \beta Q') \\ &= \alpha(X-1)P' + \beta(X-1)Q' \\ &= \alpha T(P) + \beta T(Q) \end{aligned}$$

donc T est linéaire

En conclusion :

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_4[X]}$$

- 7) $T(X^0) = 0$ et pour chaque $k \geq 1$, $T(X^k) = (X-1)(kX^{k-1}) = kX^k - kX^{k-1}$ donc

$$\boxed{\text{la matrice de } T \text{ dans la base } \mathcal{C} \text{ est } A}$$

- 8) $T(P_0) = 0$ et pour chaque $k \geq 1$, $T(P_k) = (X-1)P'_k = (X-1)(k(X-1)^{k-1})$ donc $T(P_k) = kP_k$

$$\boxed{\text{pour chaque } k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, P_k \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à la valeur propre } k}$$

- 9) • Les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 sont 5 vecteurs propres associés à 5 valeurs propres distinctes donc ils forment une famille libre.

- la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$ est 5.

donc (en dimension n une famille libre de n vecteurs est une base)

$$\boxed{\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4) \text{ est une base de } \mathbb{R}_4[X]}$$

En développant tous ces polynômes on obtient ;

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & P_1 &= -1 + X, & P_2 &= 1 - 2X + X^2, \\ P_3 &= -1 + 3X - 3X^2 + X^3, & P_4 &= 1 - 4X + 6X^2 - 4X^3 + X^4 \end{aligned}$$

on obtient la matrice de passage de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 10) La matrice de T dans la base $\mathcal{B}$ est $\boxed{\Delta = \text{Diag}(0, 1, 2, 3, 4)}$ et la matrice de T dans $\mathcal{C}$ est A ,

sachant que Q est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$ la formule de changement de base donne la relation :

$$\boxed{A = Q\Delta Q^{-1}}$$

- 11) a) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$

- b) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, (P(X) + Q(X))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P(X)^{n-k} Q(X)^k}$

La démonstration est identique à celle faite dans $\mathbb{R}$ car les propriétés utilisées sur les opérations $+$ et $\times$ sont les mêmes dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

c)

$$\begin{aligned} X^n &= (1 + (X - 1))^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (X - 1)^k \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X - 1)^k}$$

d) L'inverse de Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$

or la question précédente nous permet d'exprimer tous les vecteurs de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ et ainsi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12) La formule changement de bases pour l'endomorphisme T^n donne $A^n = Q\Delta^n Q^{-1}$

Rédaction qui évite la récurrence.

Avec la notation des matrices élémentaires $E_{i,j}$ en déduit :

$$\left(\frac{1}{20}A\right)^n = \left(\frac{1}{20}\right)^n Q E_{2,2} Q^{-1} + \left(\frac{2}{20}\right)^n Q E_{3,3} Q^{-1} + \left(\frac{3}{20}\right)^n Q E_{4,4} Q^{-1} + \left(\frac{4}{20}\right)^n Q E_{5,5} Q^{-1}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{20}A\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_{\mathcal{M}_5(\mathbb{R})}}$$

Partie II : Étude d'une nouvelle matrice.

13) On remarque que $J^2 = 5J$

Montrons, par récurrence sur n , que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 5^{n-1}J$

• Pour $n = 1$,

d'une part $J^1 = J$ et d'autre part $5^{1-1}J = 1J = J$

donc la propriété est vérifiée pour $n = 1$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $J^n = 5^{n-1}J$,

$$\begin{aligned} J^{n+1} &= J^n \times J \\ &= 5^{n-1}J \times J && (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= 5^{n-1}J^2 \\ &= 5^{n-1}.5J && (\text{remarque ci-dessus}) \\ J^{n+1} &= 5^n J \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, J^n = 5^{n-1}J}$$

14) On remarque que : $JA = 0_{\mathcal{M}_5(\mathbb{R})}$,

montrons, par récurrence sur n , que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(A + 4J)^n = A^n + \sum_{k=1}^n 4^k 5^{k-1} A^{n-k} J$

• Pour $n = 1$,

d'une part $(A + 4J)^1 = A + 4J$

d'autre part $A^1 + \sum_{k=1}^1 4^k 5^{k-1} A^{1-k} J = A^1 + 4 \times 1 \times A^0 J = A + 4J$

La propriété est vraie pour $n = 1$.

- Soit n tel que $(A + 4J)^n = A^n + \sum_{k=1}^n 4^k 5^{k-1} A^{n-k} J$

$$\begin{aligned}
 (A + 4J)^{n+1} &= (A + 4J)(A + 4J)^n \\
 &= (A + 4J) \left(A^n + \sum_{k=1}^n 4^k 5^{k-1} A^{n-k} J \right) \\
 &= A^{n+1} + \sum_{k=1}^n 4^k 5^{k-1} A^{n+1-k} J + \underbrace{4JA^n}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^n 4^{k+1} 5^{k-1} JA^{n-k} J}_{=4^{n+1} 5^{n-1} J^2} \\
 &= A^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} 4^k 5^{k-1} A^{n+1-k} J
 \end{aligned}$$

En conclusion :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(A + 4J)^n = A^n + \sum_{k=1}^n 4^k 5^{k-1} A^{n-k} J$

15) Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 M^n &= \left(\frac{1}{20}(A + 4J) \right)^n \\
 &= \frac{A^n}{20^n} + \sum_{k=1}^n \frac{4^k 5^{k-1}}{20^n} A^{n-k} J \\
 &= \frac{A^n}{20^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{5} \frac{1}{20^{n-k}} A^{n-k} J \\
 &= \frac{A^n}{20^n} + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{5} \frac{1}{20^r} A^r J \quad (r \leftarrow n - k)
 \end{aligned}$$

donc

$$M^n = \frac{1}{20^n} A^n + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{5 \cdot 20^r} A^r J.$$

Partie III : Limite d'une somme de matrices.

16) (Question de cours)

Soit q un réel appartenant à $] -1, 1[$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} q^k &= \frac{1 - q^n}{1 - q} && \text{car } q \neq 1 \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - q} && q^n \rightarrow 0 \text{ car } |q| < 1
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1 - q}$$

17) a) $I_5 - K$ est une matrice triangulaire supérieure avec sur la diagonale que des coefficients non nuls : 1, $\frac{19}{20}$, $\frac{18}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{16}{20}$, donc

$$(I_5 - K) \text{ est inversible}$$

b)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{n-1} K^k \right) (I_5 - K) &= \sum_{k=0}^{n-1} K^k (I_5 - K) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (K^k - K^{k+1}) \\ &= K^0 - K^n \quad (\text{Telescopage}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \left(\sum_{k=0}^{n-1} K^k \right) (I_5 - K) = I_5 - K^n}$$

c) La relation précédente donne :

$$\sum_{k=0}^{n-1} K^k = (I_5 - K)^{-1} - \underbrace{K^n (I_5 - K)^{-1}}_{\text{les coefficients sont des combinaisons linéaires de ceux de } K^n}$$

Or on a montré à la question 12) que $(K)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0_{\mathcal{M}_5(\mathbb{R})}$ donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} K^k = (I_5 - K)^{-1}}$$

18) a) On a vu à la question 15) que : $M^n = \frac{1}{20^n} A^n + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{5 \cdot 20^r} A^r J$. donc $M^n = K^n + \frac{1}{5} \left(\sum_{k=0}^{n-1} K^k \right) J$.

or on a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} K^k = (I_5 - K)^{-1}$ donc (on peut détailler)

$$\boxed{\text{la suite de matrices } (M^n) \text{ converge } L = (I_5 - K)^{-1} J}$$

b) Les colonnes de L sont toutes égales à $(I_5 - K)^{-1} \mathbb{1}_5$, où $\mathbb{1}_5$ est définie dans la partie IV.

Partie IV : Chaîne de Markov et horloge aléatoire

19) $M = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, les coefficients sont bien positifs et la somme de chaque colonne donne 1

$$\boxed{M \text{ est stochastique par colonnes}}$$

20) Appliquer la formule des probabilités totales avec le SCE : $(X_n = j)_{1 \leq j \leq 5}$ on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = M p_n$
Et ensuite un raisonnement par récurrence montre $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = M^n p_0$

21) Appliquer la formule des probabilité totales avec le SCE : $(X_0 = j)_{1 \leq j \leq 5}$
D'après la question 18, la suite de matrices (M^n) converge vers une matrice L dont toutes les colonnes sont identiques.

Interprétation probabiliste : lorsque $n \rightarrow +\infty$, la loi de X_n ne dépend plus de l'état initial X_0 .

La chaîne de Markov converge vers une loi stationnaire.

22) a) Pour $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, si U_k est un vecteur propre de A associé à k il est proportionnel aux coordonnées de $(X - 1)^k$ dans $\mathcal{C}$, il vérifie $JU_k = 0$, (la somme des coefficients du polynôme $(X - 1)^k$ vaut 0)

On a donc $MU_k = \frac{1}{20}AU_k = \frac{k}{20}U_k$ et ainsi les vecteurs propres de la matrice A associés aux valeurs propres 1, 2, 3, 4 sont également des vecteurs propres de M associées aux valeurs propres :

$$\boxed{\frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \frac{3}{20}, \frac{4}{20}}.$$

b) M est stochastique par colonnes donc $\mathbb{1}_5^T M = \mathbb{1}_5^T$ ou encore $M^T \mathbb{1}_5 = \mathbb{1}_5$ donc 1 est valeur propre de M^T

or M^T et M ont le même spectre donc $\boxed{1 \text{ est une valeur propre de } M}$

$U = (I - K)^{-1} \mathbb{1}_5$ donc $(I - K)U = \mathbb{1}_5$ ce qui donne $U - KU = \mathbb{1}_5$ puis $KU = U - \mathbb{1}_5$

en multipliant à gauche par $\mathbb{1}_5^T$ il vient : $\mathbb{1}_5^T KU = \mathbb{1}_5^T U - \mathbb{1}_5^T \mathbb{1}_5$ et ainsi $\mathbb{1}_5^T U = 5$ car $\mathbb{1}_5^T K = 0$

(Les sommes des colonnes de A sont nulles)

On a alors :

$$\begin{aligned} MU &= KU + \frac{1}{5}JU \\ &= U - \mathbb{1}_5 + \frac{1}{5}\mathbb{1}_5\mathbb{1}_5^T U \\ &= U - \mathbb{1}_5 + \frac{1}{5}\mathbb{1}_5(5) \\ &= U \end{aligned}$$

de plus $\mathbb{1}_5^T U = 5$ donne U non nul et ainsi :

$$\boxed{U = (I - K)^{-1} \mathbb{1}_5 \text{ est un vecteur propre associé à } 1}$$

c) M est une matrice 5×5 et on a trouvé 5 valeurs propres distinctes donc

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable et son spectre est } \left\{1, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \frac{3}{20}, \frac{4}{20}\right\}}$$

La suite n'est pas corrigée.