

CONCOURS BLANC

MATHÉMATIQUES

lundi 9 mars 2026

(2 heures)

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les conclusions.*

La calculatrice n'est pas autorisée.

Ce sujet comporte 4 pages.

Il comprend trois exercices totalement indépendants.

Rappel et précision pour l'exercice 3.

Définition de la convergence en loi.

Soient X une variable aléatoire réelle et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles.

On note F la fonction de répartition de X et D l'ensemble des réels où F est discontinue.

Dire que (X_n) converge en loi vers X signifie que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = F(x)$

On admet que l'ensemble D des points de discontinuité de F est au plus dénombrable et qu'ainsi $\mathbb{R} \setminus D$ n'est pas bornée.

EXERCICE 1

Partie A : Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = (x+1)e^{kx}$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- 1) a) Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Dresser le tableau de variations de f_k en faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et 0 .
- 2) a) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$ et déterminer leurs points d'intersection.
b) Représenter sur un même graphique l'allure de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.

Partie B : Étude d'une suite implicite

- 3) a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée u_k .
b) Déterminer explicitement u_1 .
- 4) a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a : $0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}$
b) En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.
- 5) a) Soit $k \geq 1$ un entier, montrer que : $u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}$.
b) En déduire que $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.
- 6) Quelle est la nature de la série $\sum_{k \geq 1} u_k$?
- 7) Le but de cette question est de démontrer que la série $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{\ln(k)}{k} - u_k \right)$ est convergente.
- a) Montrer que : $\left(\frac{\ln(k)}{k} - u_k \right) \sim \frac{\ln(k)}{k^2}$
b) Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall k \geq N, \quad \frac{\ln(k)}{k^2} \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$.
c) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leq 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$
d) Conclure

EXERCICE 2

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels. On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on considère $\mathcal{E} = \text{Vect}(I, J, K)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par les matrices I, J et K .

- 8) Montrer que (I, J, K) est une base de $\mathcal{E}$, en déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
9) Justifier sans calcul que les matrices I, J et K sont diagonalisables.
10) a) Exprimer la matrice J^3 comme un multiple de J .
b) En déduire que les valeurs propres de J appartiennent à l'ensemble $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

On pose $U_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- 11) a) Vérifier que U_1 et U_2 sont des vecteurs propres de J .
b) Déterminer un vecteur propre U_3 de J associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.
12) a) Justifier que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
b) Donner une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- 13) a) Montrer que (U_1, U_2, U_3) est aussi une base de vecteurs propres de K .
b) Déterminer la matrice $P^{-1}KP$.
14) Soit M une matrice de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ dans la base (I, J, K) .
a) Exprimer la matrice $P^{-1}MP$ sous la forme d'un tableau de nombres dépendant de a, b et c .
b) En déduire les valeurs propres de M .

15) On considère l'application linéaire $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$s(M) = s(aI + bJ + cK) = (a + b\sqrt{2} + c, a - c, a - b\sqrt{2} + c)$$

pour toute matrice $M = aI + bJ + cK$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- a) Donner la matrice S de s relativement à la base (I, J, K) de $\mathcal{E}$ et à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
 - b) Montrer que l'application linéaire s est bijective.
- 16) a) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{E}$ possédant une unique valeur propre.
b) Déterminer le nombre de matrices de $\mathcal{E}$ qui ont pour spectre $\{-1, 1\}$.

EXERCICE 3

Les parties B et C de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie A : La variable aléatoire V

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$, on note V la variable aléatoire définie par :

$$V = \frac{1}{\sqrt{U}}$$

- 17) a) Justifier que V est à valeurs dans $[1, +\infty[$.
b) Montrer que la fonction de répartition de V est donnée par :

$$F_V(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- c) En déduire que V est une variable aléatoire à densité, et donner une densité f_V de V .
- 18) Déterminer si V admet une espérance et une variance, et calculer leurs valeurs éventuelles.

La variable aléatoire V suit une loi de Pareto, les compagnies d'assurance utilisent cette loi pour modéliser les montants des sinistres. Afin d'établir des prévisions, un actuair e étudie une suite $(V_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la même loi que V , la variable aléatoire V_i représente le coût du i -ième sinistre survenu à partir d'un instant donné.

Partie B : Loi du sinistre le plus coûteux

Pour tout entier $n \geq 1$ on définit une variable aléatoire M_n en posant : $M_n = \max(V_1, \dots, V_n)$

On note F_n la fonction de répartition de M_n .

- 19) a) Montrer que $F_n = (F_V)^n$ pour tout entier $n \geq 1$.
b) Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
c) Justifier que la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ ne converge en loi vers aucune variable aléatoire.

On considère une variable aléatoire W dont la fonction de répartition F_W est définie par :

$$F_W(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire $\frac{M_n}{\sqrt{n}}$.

- 20) a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour tout $x > 0$.
b) Conclure quant à la convergence en loi de la suite $\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$.

Partie C : Nombre de sinistres graves

On rappelle que $(V_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi que V (voir **Partie A**).

On suppose que le nombre de sinistres se produisant au cours d'une année est donné par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On s'intéresse au nombre de sinistres dont le coût dépasse un certain montant $A > 1$. On note ainsi T la variable aléatoire égale au nombre d'éléments de $\{V_1, \dots, V_N\}$ prenant une valeur supérieure à A , formellement :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \left| \{i \in \llbracket 1, N(\omega) \rrbracket ; V_i(\omega) > A\} \right|,$$

où la notation $|\cdot|$ désigne le cardinal.

21) Exprimer $P(N = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

22) Quel est l'ensemble $T(\Omega)$ des valeurs prises par T ?

23) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifier que la loi conditionnelle de T sachant $(N = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{A^2}\right)$.

b) Donner la valeur de $P_{(N=n)}(T = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.

24) Calculer $P(T = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis reconnaître la loi de T .

25) En moyenne, combien de sinistres avec un coût supérieur à A surviennent en un an ?