

EXERCICE 1**Partie A : Étude d'une suite de fonctions**

- 1) a) • $f_k(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x e^{kx} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ (C'est une croissance comparée sachant que $k > 0$)
 • $f_k(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x e^{kx} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ (C'est le produit de deux fonctions tendant vers $+\infty$ sachant que $k > 0$)

$$\lim_{-\infty} f_k = 0 \text{ et } \lim_{+\infty} f_k = +\infty$$

- b) f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_k(x) = 1 \times e^{kx} + k(x+1)e^{kx} = k \left(x + \frac{k+1}{k} \right) e^{kx}$

x	$-\infty$	$-\frac{k+1}{k}$	-1	0	$+\infty$
$f'_k(x)$		$-$	0	$+$	
f_k	0	$\searrow$	$\frac{-1}{ke^{k+1}}$	$\nearrow 0$	$\nearrow 1 \nearrow +\infty$

- 2) a) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) - f_k(x) &= (x+1)e^{(k+1)x} - (x+1)e^{kx} \\ &= (x+1)e^{kx}(e^x - 1) \end{aligned}$$

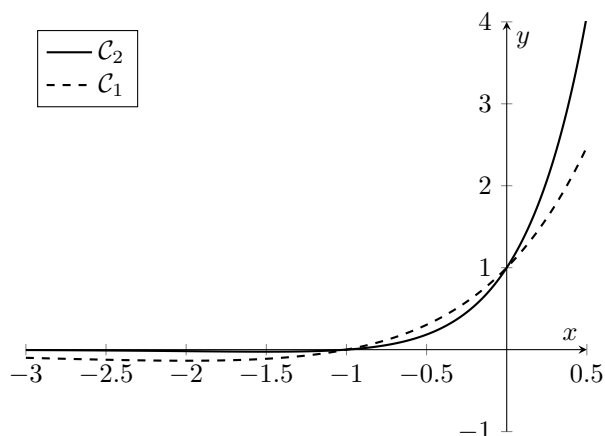
on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	
$e^x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	
$f_{k+1}(x) - f_k(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\mathcal{C}_{k+1}$ est au dessus de $\mathcal{C}_k$ sur $] -\infty; -1[$ et $]0; +\infty[$ et $\mathcal{C}_{k+1}$ est en dessous de $\mathcal{C}_k$ sur $] -1, 0[$

Elles se coupent aux points $A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- b) A faire avec soin.



Partie B : Étude d'une suite implicite

- 3) a) On fixe $k \in \mathbb{N}^*$,
- D'une part, les variations de f_k montrent que $\forall x \in]-\infty; -1[, f_k(x) < 0$ donc $f_k(x) = k$ n'a pas de solutions sur $] -\infty; -1[$;
 - D'autre part, f_k est continue et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$, elle réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$ donc $\exists! x \in [-1; +\infty[: f(x) = k$
- En conclusion :

L'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée u_k

- b) $f_1(0) = 1$ et u_1 est l'unique solution de l'équation $f_1(x) = 1$ donc $u_1 = 0$

- 4) a) $f_k(-1) = 0, \quad f_k(u_k) = k \quad \text{et} \quad f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right) = \left(\frac{\ln(k)}{k} + 1\right) e^{\ln(k)} = \ln(k) + k$

donc $f_k(-1) \leq f_k(u_k) \leq f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$

sachant de plus que $-1, \quad u_k \quad \text{et} \quad \frac{\ln(k)}{k}$ appartiennent à $[-1; +\infty[$,

et f_k est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$ on en déduit :

pour tout entier $k \geq 1$, on a : $0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}$

- b) On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (*croissances comparées*) donc l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes permettent d'affirmer : la suite (u_k) converge et $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$

- 5) a) On sait que $f_k(u_k) = k$ donc $(u_k + 1)e^{ku_k} = k$ et comme $u_k + 1 > 0$ on en déduit successivement :
- $$e^{ku_k} = \frac{k}{u_k + 1}, \quad ku_k = \ln(k) - \ln(1 + u_k) \quad \text{et enfin :}$$

$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}.$

- b) L'égalité précédente donne pour $k \geq 2$: $\frac{u_k}{\frac{\ln(k)}{k}} = 1 - \frac{\ln(u_k + 1)}{\ln(k)}$

et sachant que (u_k) converge vers 0 il vient : $\frac{u_k}{\frac{\ln(k)}{k}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$ et ainsi :

$u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$

- 6) Appliquons ici successivement les deux théorèmes de convergence pour deux séries à termes positifs :

- $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$ et $\frac{\ln(k)}{k} \geq 0$ donc $\sum_{k \geq 1} u_k$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{k}$ sont des séries de même nature.
- pour tout $k \geq 3, 0 \leq \frac{1}{k} \leq \frac{\ln(k)}{k}$ et $\sum \frac{1}{k}$ diverge donc $\sum \frac{\ln(k)}{k}$ diverge.

la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ diverge

- 7) a) On sait que : $u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}$ et $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $\left(\frac{\ln(k)}{k} - u_k\right) \sim \frac{u_k}{k}$
- et sachant que : $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$, il vient :

$\left(\frac{\ln(k)}{k} - u_k\right) \sim \frac{\ln(k)}{k^2}$

- b) On sait (*croissances comparées*) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ donc il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x > A, \quad \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \leq 1$

ce qui entraîne que :

$$\boxed{\text{il existe } N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall k \geq N, \quad \frac{\ln(k)}{k^2} \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}}$$

c) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ est décroissante et continue sur $[k-1, k]$ donc $g(k) \leq \int_{k-1}^k g(x) dx$ ce qui donne :

$$\boxed{\text{pour tout } k \geq 2, \quad \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leq 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)}$$

d) • D'une part : $\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\sum_{k \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$ converge

• D'autre part : on vient de montrer au question 7)b)c) que pour tout k supérieur à un $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq \frac{\ln(k)}{k^2} \leq 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$$

donc (théorème de convergence) $\sum_{k \geq 2} \frac{\ln(k)}{k^2}$ converge.

• Et la question 7)a) a montré : $\left(\frac{\ln(k)}{k} - u_k \right) \sim \frac{\ln(k)}{k^2} \quad (\geq 0)$

donc (théorème de convergence)

$$\boxed{\text{la série } \sum_{k \geq 1} \left(\frac{\ln(k)}{k} - u_k \right) \text{ est convergente}}$$

EXERCICE 2

8) Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} aI + bJ + cK &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b & b \\ b & a & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $aI + bJ + cK = 0_{3 \times 3} \iff a = b = c = 0$ et ainsi : (I, J, K) est une famille libre.

de plus $\mathcal{E} = \text{Vect}(I, J, K)$ donc

$$\boxed{(I, J, K) \text{ est une base de } \mathcal{E} \text{ et } \dim(\mathcal{E}) = 3}$$

9) Les matrices I, J et K sont symétriques à coefficients réels donc (théorème spectral)

$$\boxed{\text{les matrices } I, J \text{ et } K \text{ sont diagonalisables}}$$

$$10) \quad a) \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{J^3 = 2J}$$

b) Soit $\lambda \in \text{Sp}(J)$ et $X \neq 0_{3 \times 1}$ tels que $JX = \lambda X$,

la relation $J^3 = 2J$ entraîne $J^3 X = 2JX$ puis $\lambda^3 X = 2\lambda X$ et $(\lambda^3 - 2\lambda)X = 0_{3 \times 1}$

et comme $X \neq 0_{3 \times 1}$ il vient $(\lambda^3 - 2\lambda) = 0$ qui équivaut à $\lambda \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } J \text{ appartiennent à l'ensemble } \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}}$$

$$11) \quad a) \quad JU_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}U_1 \quad \text{et} \quad JU_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0U_2$$

de plus U_1 et U_2 sont non nuls donc $\boxed{U_1 \text{ et } U_2 \text{ sont des vecteurs propres de } J}$

$$b) \quad (J + \sqrt{2}I) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases}$$

$$\boxed{U_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } J \text{ associé à la valeur propre } -\sqrt{2}}$$

12) a) On remarque que (U_1, U_2, U_3) est une famille orthogonale de 3 vecteurs non nuls de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc

$$\boxed{(U_1, U_2, U_3) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

$$b) \quad (U_1, U_2, U_3) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ formée de vecteurs propres de } J \text{ donc en posant } P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{on a } P \text{ inversible et } P^{-1}JP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

13) a) On remarque que $KU_1 = U_1$, $KU_2 = -U_2$ et $KU_3 = U_3$ donc

$$\boxed{(U_1, U_2, U_3) \text{ est aussi une base de vecteurs propres de } K}$$

$$b) \quad \text{La formule de changement de base donne } \boxed{P^{-1}KP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

14) a) $M = aI + bJ + cK$ donc

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= aI + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} + c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + c \end{pmatrix}}$$

b) M et cette matrice diagonale sont semblables donc elles ont même spectre.

$$\boxed{\text{Sp}(M) = \{ a + b\sqrt{2} + c ; a - c ; a - b\sqrt{2} + c \}}$$

$$15) \quad a) \quad s(I) = (1, 1, 1) \quad s(J) = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) \quad s(K) = (1, -1, 1) \text{ donc } \boxed{S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}}$$

$$b) \quad \text{rg}(S) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \stackrel{L_i \leftarrow L_i - L_1}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \stackrel{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} = 3$$

donc la matrice S est inversible donc $\boxed{\text{l'application linéaire } s \text{ est bijective}}$

16) a) (Une matrice diagonalisable avec une unique valeur propre est une matrice d'homothétie)

$$\text{On peut aussi résoudre } \begin{cases} a + b\sqrt{2} + c = a - c \\ a - b\sqrt{2} + c = a - c \end{cases} \text{ qui équivaut à } b = c = 0$$

$$\boxed{\text{Les matrices de } \mathcal{E} \text{ n'ayant qu'une valeur propre sont les matrices de } \text{Vect}(I)}$$

b) Les matrices de $\mathcal{E}$ qui ont pour spectre $\{-1, 1\}$ sont les antécédents par s des triplets :

$$(1, 1, -1) \quad (1, -1, 1) \quad (-1, 1, 1) \quad (-1, -1, 1) \quad (-1, 1, -1) \quad (1, -1, -1)$$

comme s est bijective on peut conclure :

Exactement 6 matrices de $\mathcal{E}$ ont pour spectre $\{-1, 1\}$

EXERCICE 3

Partie A : La variable aléatoire V

17) a) Le tableau de variations de $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0, 1]$ est :

x	0	1
g	$+\infty$	1

or U est à valeurs dans $]0, 1]$ et $V = g(U)$ donc V est à valeurs dans $[1; +\infty[$

En effet : $1 = P(U \in]0, 1]) \leq P(g(U) \in g(]0, 1]))$ donc $P(V \in [1; +\infty]) = 1$

b) V est à valeurs dans $[1; +\infty[$ donc $\forall x < 1, F_V(x) = 0$.

Pour $x \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 F_V(x) &= P(V \leq x) \\
 &= P\left(\frac{1}{\sqrt{U}} \leq x\right) \\
 &= P\left(\frac{1}{U} \leq x^2\right) \quad \text{car } x > 0 \text{ et } U > 0 \\
 &= P\left(\frac{1}{x^2} \leq U\right) \\
 &= P\left(\frac{1}{x^2} < U\right) \quad \text{car } U \text{ est à densité} \\
 &= 1 - F_U\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{x^2} \quad \text{car } \frac{1}{x^2} \in]0, 1]
 \end{aligned}$$

la fonction de répartition de V est : $F_V(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

c) • F_V est de classe C^1 sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

• de plus $F_V(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F_V(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F_V(x) = 0$ donc F_V est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$

donc V est une variable à densité et une de ses densités est définie par

$$f_V(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

18) V admet une espérance si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_V(t) dt$ ACV ce qui équivaut ici à $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt$ convergente.

Or pour $A > 1$, $\int_1^A \frac{2}{t^2} dt = \left[-\frac{2}{t}\right]_1^A = 2 - \frac{2}{A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 2$ donc V admet une espérance

et $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_V(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{2}{t^2} dt = 2$ donc $E(V) = 2$

V^2 admet une espérance si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_V(t) dt$ ACV ce qui équivaut ici à $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t} dt$ convergente.

Or pour $A > 1$, $\int_1^A \frac{2}{t} dt = \left[2 \ln(t) \right]_1^A = 2 \ln(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$ donc V^2 n'admet pas d'espérance.

V n'admet pas de variance

Partie B : Loi du sinistre le plus coûteux

- 19) a) V_i est à valeurs dans $[1; +\infty[$ donc $M_n = \max(V_1, \dots, V_n)$ est à valeurs dans $[1; +\infty[$.
 donc pour $x < 1$, $F_{M_n}(x) = 0$ et ainsi $F_{M_n}(x) = (F_V(x))^n$
 Pour $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= P(M_n \leq x) \\ &= P(\max(V_1, \dots, V_n) \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^n P(V_i \leq x) \quad (\text{car les } V_i \text{ sont indépendantes}) \\ &= (F_V(x))^n \end{aligned}$$

$F_n = (F_V)^n$ pour tout entier $n \geq 1$

- b) • Pour $x < 1$, $F_V(x) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$.

• Pour $x \geq 1$, $1 - \frac{1}{x^2} \in [0, 1[$ donc $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$

- c) Si (M_n) convergeait en loi vers X de fonction de répartition de F , alors on aurait $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D, F(x) = 0$
 Ce qui est incompatible avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ ne converge en loi vers aucune variable aléatoire

- 20) a) On fixe $x > 0$, on a pour tout $n \geq \frac{1}{x^2}$,

$$\begin{aligned} G_n(x) &= P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \\ &= P(M_n \leq x\sqrt{n}) \\ &= F_n(x\sqrt{n}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{n x^2}\right)^n \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

- b) On vient de voir que $\forall x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = F_W(x)$ or on a de plus $\forall x \leq 0$, $G_n(x) = 0$ et $F_W(x) = 0$
 donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = F_W(x)$ autrement dit :

la suite $\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de même loi que W

Partie C : Nombre de sinistres graves

- 21) (Question de cours) $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

- 22) $T(\Omega) = \mathbb{N}$

23) a) Sachant ($N = n$) :

l'expérience est constituée de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (succès : ($V_i > A$) de probabilité $\frac{1}{A^2}$), T est le nombre de succès donc :

la loi conditionnelle de T sachant ($N = n$) est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{A^2}\right)$

Remarque : Pour trouver la probabilité de ($V_i > A$) on a utilisé la fonction de répartition de V trouvée à la question 17)b)

b)

$$\text{Si } k \leq n, \quad P_{(N=n)}(T = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k}$$

$$\text{Si } k > n, \quad P_{(N=n)}(T = k) = 0$$

24) Pour $k \in \mathbb{N}$, (en posant $p = \frac{1}{A^2}$)

$$\begin{aligned} P(T = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(T = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda} p^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \quad (\text{série exponentielle}) \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

Et ainsi

T suit la loi de Poisson de paramètre λp

25) L'espérance de T est λp .

En un an le nombre de sinistre moyen est égal à λp