

DEVOIR SURVEILLÉ

MATHÉMATIQUES

samedi 14 mars 2026

(3 heures)

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les conclusions.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Ce sujet comporte 7 pages.

Il comprend quatre parties pouvant être traitées séparément, mais elles ne sont pas indépendantes.

Rappels et précisions

① Densité de la somme de variables aléatoires indépendantes à densité.

On rappelle que, si deux variables aléatoires réelles U_1 et U_2 sont indépendantes de densités respectives f_{U_1} et f_{U_2} , alors $U_1 + U_2$ est une variable aléatoire de densité

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U_1}(t) f_{U_2}(x-t) dt$$

② Théorème central limite.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires admettant toutes une espérance μ et une variance σ^2 non nulle, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad M_n^* = \frac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Si les X_n sont mutuellement indépendantes,

alors ① $(S_n^*)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

② $(M_n^*)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

③ Dans les questions d'informatique on supposera que les modules utiles ont été importés par les instructions suivantes :

```
import math as m
import numpy as np
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Ce problème étudie un modèle probabiliste appelé *processus de Poisson*. L'étude de ce modèle est menée dans la partie 1. La partie 2 est consacrée à des simulations en Python illustrant ce modèle. Cette modélisation conduit à un phénomène appelé *paradoxe de l'inspection*, étudié dans la partie 3. La partie 4 étudie une autre application.

Dans tout le problème, on suppose que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Pour les interprétations, on se placera dans la situation suivante :

λ désigne un réel strictement positif.

On suppose qu'à un arrêt de bus, les durées séparant deux passages successifs de bus sont indépendantes et suivent toutes une même loi exponentielle de paramètre λ .

On note $T_0 = 0$, puis $T_1, T_2, \dots$ les instants de passage successifs des bus.

On note pour $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = T_k - T_{k-1}$ de sorte que la suite $(S_k)_{k \geq 1}$ est formée de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ .

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=1}^n S_k$.

Un usager arrive à l'arrêt à l'instant $t \in \mathbb{R}_+^*$ pour prendre le bus.

Questions préliminaires sur la loi exponentielle.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

- 1) Rappeler une densité de probabilité et la fonction de répartition de X .
- 2) Démontrer que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- 3) Démontrer que pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $P(X > t_1 + t_2 \mid X > t_1) = P(X > t_2)$ et interpréter cette égalité.

Partie 1. Processus de Poisson.

- 4) Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire T_n admet pour densité

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t).$$

Indication : on utilisera ici le rappel ❶.

- 5) Déterminer l'espérance et la variance de T_n (*Indication : Il est préférable ici de ne pas utiliser la densité f_{T_n} .*)
- 6) Justifier que la suite $\left(\frac{\lambda T_n - n}{\sqrt{n}} \right)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi usuelle que l'on précisera.

On définit pour tout $t > 0$,

$$N_t = \max(\{n \in \mathbb{N} \mid T_n \leq t\}).$$

- 7) Interpréter N_t et justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t > 0$,

$$(N_t \geq n) = (T_n \leq t).$$

- 8) À l'aide de la densité obtenue à la question 4), montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$P(T_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Indication : Pour montrer $f(t) = g(t)$ on peut commencer par montrer que $t \mapsto f(t) - g(t)$ est constante

- 9) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Reconnaître la loi de N_t , puis donner son espérance et sa variance.

10) Expliquer pourquoi il paraît raisonnable de faire la conjecture suivante :

Pour tous x et t deux réels positifs : la variable aléatoire $N_{x+t} - N_t$ suit la loi de Poisson de paramètre λx .

Nous allons mettre en évidence ce résultat dans la partie 2 et nous l'admettrons dans les parties 3 et 4.

On admettra en particulier, pour la suite du problème, que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad P(N_{x+t} - N_t = 0) = e^{-\lambda x}$$

On définit pour $t > 0$ les événements suivants :

$$W_t = t - T_{N_t} \quad Z_t = T_{N_t+1} - t \quad L_t = T_{N_t+1} - T_{N_t}$$

Plus précisément : si N_t prend la valeur $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$W_t = t - T_n \quad Z_t = T_{n+1} - t \quad L_t = T_{n+1} - T_n$$

11) Associer les variables aléatoires N_t , W_t , Z_t et L_t aux interprétations suivantes :

- ★ Le temps écoulé depuis le passage du bus avant l'arrivée de l'usager.
- ★ la durée entre les deux bus : celui pris par l'usager et le précédent.
- ★ Le nombre de bus passés dans l'intervalle $]0, t]$.
- ★ Le temps d'attente du bus par l'usager.

- 12) a) Interpréter avec précision l'événement $(N_{t+x} - N_t = 0)$ pour t et x deux réels strictement positifs.
b) Interpréter avec précision l'événement $(N_t - N_{t-x} = 0)$ pour t et x deux réels strictement positifs vérifiant $t - x > 0$.
c) Exprimer les deux événements $(N_{t+x} - N_t = 0)$ et $(N_t - N_{t-x} = 0)$ avec les variables Z_t et W_t .

Partie 2 Analyse empirique.

L'usager prenant le bus tous les matins observe qu'il attend en moyenne 10 minutes avant de pouvoir monter dans un bus. En étudiant les passages des bus pendant une journée, il constate que l'intervalle moyen entre deux bus successifs est également de 10 minutes. Pourtant, s'il observe attentivement les deux bus qui encadrent son arrivée à l'arrêt, il remarque que la durée moyenne entre ces deux bus est d'environ 20 minutes.

Ce phénomène surprenant est connu sous le nom de *paradoxe de l'inspection*.

Les simulations de la partie 2 permettent d'étudier cette situation et de mettre en évidence ce phénomène.

Le but de la partie 3 sera la démonstration des conjectures formulées dans la partie 2.

On suppose dans cette partie que l'unité de temps est la minute et que $\lambda = \frac{1}{10} \text{ min}^{-1}$.

Dans toute cette partie on considère que `lambd` et `N` désignent deux variables globales qu'on initialise avec les affectations suivantes : `lambd = 0.1` et `N = 10000`

`lambd` désigne la valeur du paramètre λ et `N` le nombre de simulations pour faire les différentes estimations probabilistes.

- 13) Expliquer pourquoi le choix $\lambda = \frac{1}{10}$ est cohérent avec la situation décrite au début de cette partie.
- 14) a) Montrer que si U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$ alors $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ .
b) Ecrire une fonction Python `simul_exp(lambd)` permettant de simuler la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre `lambd`.
- 15) Ecrire une fonction Python `simul_gamma(lambd, n)` permettant de simuler la réalisation de T_n .
- 16) Ecrire une fonction `simul_N(t)` Python permettant de simuler la réalisation de N_t .

(on utilisera ici la relation de la question 7)

17) La fonction suivante permet de simuler la réalisation d'une des trois variables Z_t , W_t , L_t .

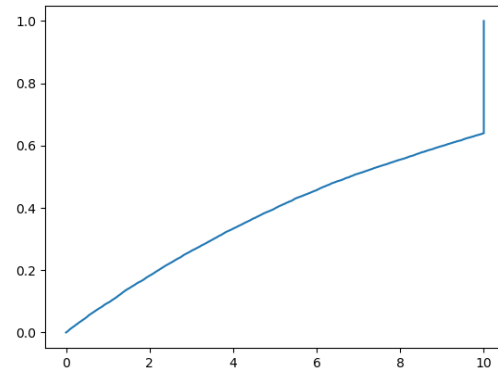
```
def simul_X(t):
    # X = Z, W ou L
    T1 = 0
    T2 = simul_exp(lambd)
    while T2 <= t:
        T1 = T2
        T2 += simul_exp(lambd)
    return t-T1
```

Identifier la variable simulée dans la fonction précédente puis donner des fonctions permettant de simuler les deux autres.

18) Compléter la fonction suivante pour obtenir une estimation de la fonction de répartition de W_t

```
t = 10
plt.figure("Fonct. de repartition de W")
E = [ ... for k in range(N)]
x = sorted(E)
y = [ ... for k in range(N)]
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

Le programme donne l'affichage ci-contre :



À la vue de cette courbe, pensez-vous que W_t est une variable aléatoire à densité?

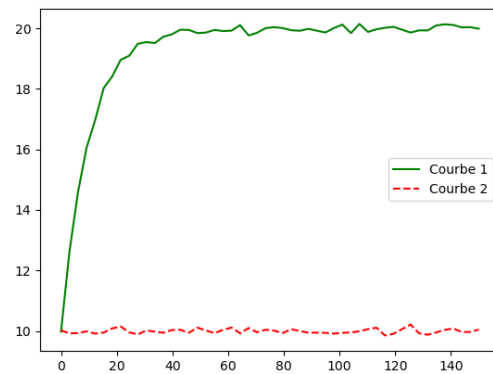
19) X représentant une des lettres W, Z et L.

Ecrire des fonctions $\text{esp_X}(t)$ qui renvoient une estimation de l'espérance de X_t à l'aide d'une série de N simulations.

20) On complète les programmes précédents avec les lignes ci-dessous et obtient les courbes ci-contre

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = np.linspace(0, 150)
y = [ esp_L(t) for t in x ]
plt.plot(x, y, 'g', label = 'Courbe 1')
y = [ esp_Z(t) for t in x ]
plt.plot(x, y, 'r--', label = 'Courbe 2')
plt.legend()
plt.show()
```



Analyser ces deux courbes et expliquer le lien avec le problème étudié. On commentera en particulier la présence d'une période transitoire et d'un régime permanent.

Estimer l'instant à partir duquel on a atteint le régime permanent.

On considère les quatre programmes suivants (avec $t = 100$ min) :

Programme 1

```
def simul_N_1(t, x):
    T, n = 0, 0
    while T <= t:
        T += simul_exp(lambd)
        n += 1
    a = n-1
    while T <= t + x:
        T += simul_exp(lambd)
        n += 1
    return n - 1 - a

def proba(t,x):
    s = 0
    for k in range(N):
        if simul_N_1(t, x) == 0:
            s += 1
    return s/N
```

Programme 2

```
def simul_N2(t, x):
    T = 0
    n = 0
    while T <= t:
        T += simul_exp(lambd)
    while T <= t + x:
        T += simul_exp(lambd)
        n += 1
    return n

def proba(t,x):
    s = 0
    for k in range(N):
        s += simul_N2(t, x)
    return s/N
```

Programme 3

```
def simul_N_3(t, x):
    N1 = simul_N(t)
    N2 = simul_N(t+x)
    return N2-N1

def proba(t,x):
    s = 0
    for k in range(N):
        if simul_N_3(t, x) == 0:
            s += 1
    return s/N
```

Programme 4

```
def simul_N_4(t, x):
    T = 0
    while T <= t:
        T += simul_exp(lambd)
    return T - t > x

def proba(t,x):
    s = 0
    for k in range(N):
        if simul_N_4(t, x):
            s += 1
    return s/N
```

Les lignes suivantes sont exécutées après la définition des fonctions précédentes :

```
plt.figure("N_{t+x} - N_t = 0")
x = np.linspace(1,10)
y = [proba(t,k) for k in x]
plt.plot(x, y)
y = np.exp(-lambd*x)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

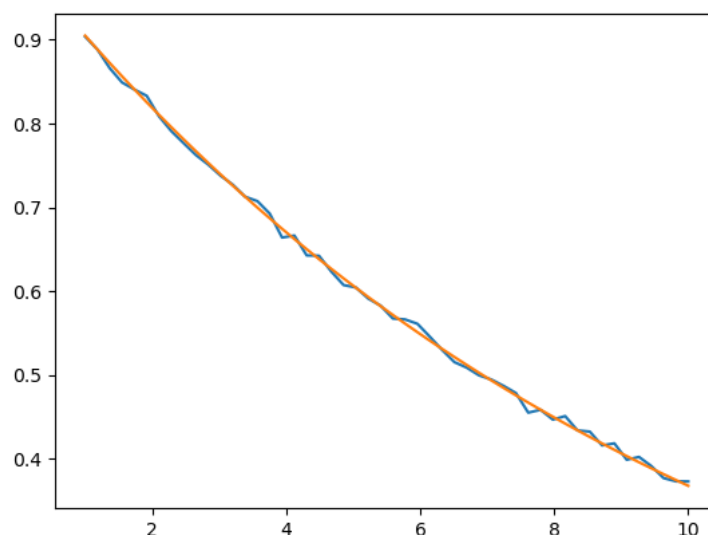
La première courbe correspond aux probabilités estimées par simulation, tandis que la seconde représente la fonction théorique : $x \mapsto e^{-\lambda x}$.

21) Déterminer quels programmes permettent effectivement de vérifier la conjecture établie à la fin de la partie 1 :

$$\mathbb{P}(N_{t+x} - N_t = 0) = e^{-\lambda x}.$$

Indication : Deux des programmes conviennent.

La figure obtenue par un bon programme est :



- 22) a) Commenter la figure obtenue.
Que suggère-t-elle concernant la conjecture formulée à la fin de la partie 1 ?
- b) Quelles variables du programme doit-on modifier pour améliorer cette conjecture ?

Partie 3 Analyse théorique du paradoxe.

On fixe un t dans $\mathbb{R}_+^*$ (l'instant auquel l'utilisateur se présente à l'arrêt de bus)

Le but de cette question est de déterminer l'espérance des trois variables aléatoires L_t , W_t et Z_t définies à la fin de la partie 1.

- 23) a) En utilisant le résultat à la fin de la partie 1 montrer que pour tout $x \geq 0$, $P(Z_t > x) = e^{-\lambda x}$
 b) En déduire la loi suivie par Z_t , puis déterminer son espérance et sa variance.

- 24) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$,

$$\text{Montrer que : } E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$$

On admet que l'on peut généraliser cette formule pour X une variable aléatoire (*quelconque*) à valeurs positives admettant une espérance par la formule suivante :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > x) dx$$

- 25) a) Justifier que $(W_t = t) = (N_t = 0)$, en déduire la probabilité de $(W_t = t)$.
 b) Montrer que pour tout $x \in [0, t]$, $P(W_t > x) = e^{-\lambda x}$.
 c) La variable W_t est-elle une variable à densité?
 d) Calculer l'espérance de W_t en utilisant la formule admise à la question 24) .

- 26) En déduire $E(L_t)$.

- 27) Expliquer pourquoi après une période transitoire on observe le paradoxe vu à la partie 2.

Partie 4 Application : Deux usagers à l'arrêt de bus.

Deux usagers se présentent à l'arrêt de bus au hasard entre les instants t_1 et t_2 .

On note $T = t_2 - t_1 > 0$ et l'on considère deux variables aléatoires U et V indépendantes, suivant la loi uniforme sur $[0, T]$. L'instant d'arrivée du premier usager est $t_1 + U$ et celui du second est $t_1 + V$.

On s'intéresse dans cette partie à la probabilité que les deux usagers prennent le même bus.

- 28) a) Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie True si les deux usagers prennent le même bus et False sinon.

```
def meme_bus(t1, t2, lambd):
    U = ...
    V = ...
    U, V = min(U, V), max(U, V)
    T = 0
    while ... :
        ...
        ...
    return ...
```

- b) Ecrire un programme permettant d'estimer la probabilité que les deux usagers prennent le même bus. (On utilisera la fonction précédente avec les valeurs $t_1 = 120$ min, $t_2 = 180$ min et $\lambda = 0,1 \text{ min}^{-1}$)

- 29) a) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-V$.
 b) En déduire une densité de la variable aléatoire $D = U - V$. (On utilisera le rappel ❶)
 c) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire D .

- 30) a) Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire $\Delta = |U - V|$ est :

$$F_{\Delta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2xT - x^2}{T^2} & \text{si } 0 \leq x \leq T \\ 1 & \text{si } x > T \end{cases}$$

- b) Interpréter géométriquement la formule précédente.
Prendre deux variables (U, V) indépendantes et uniformes dans $[0, T]$ revient à prendre aux hasard un point du carré $[0, T]^2$.
- c) Montrer que la variable aléatoire Δ est à densité et déterminer une de ses densités.

D'après le résultat admis en fin de Partie 1, pour tout $d \geq 0$, la probabilité qu'aucun bus ne passe pendant une durée d est égale à $e^{-\lambda d}$.

Par conséquent on admet que :

$$p = P(\text{les deux usagers prennent le même bus}) = E\left(e^{-\lambda|U-V|}\right).$$

(Espérance de la variable $e^{-\lambda|U-V|}$)

- 31) a) Montrer que

$$p = \int_0^T e^{-\lambda x} f_{\Delta}(x) dx$$

où f_{Δ} est une densité de la variable aléatoire Δ déterminée à la question précédente.

- b) En déduire que

$$p = \frac{2}{T^2} \int_0^T (T-x) e^{-\lambda x} dx.$$

- c) Calculer cette intégrale et montrer que

$$p = \frac{2(\lambda T - 1 + e^{-\lambda T})}{\lambda^2 T^2}.$$

- 32) On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{4}$.

- a) Montrer que $g(x) = 0$ à une unique solution sur l'intervalle $] -\infty; 0[$, que l'on notera α .

(On pourra étudier les variations de g')

On admet que : $\alpha \approx -2.56$ à 10^{-2} près.

- b) En déduire pour $\lambda = \frac{1}{10}$ une valeur approchée de T_* pour lequel $p = \frac{1}{2}$.

- c) Interpréter cette valeur T_* au vu de la situation étudiée dans cette partie 4.

FIN du SUJET

Annexe : Commandes Python

Interprétation	Python
Renvoie une copie de la liste L dans l'ordre croissant	<code>sorted(L)</code>
exponentielle d'un réel x	<code>m.exp(x)</code>
logarithme népérien d'un réel x	<code>m.log(x)</code>
Renvoie la réalisation de X suivant la loi $\mathcal{U}([0, 1])$	<code>rd.random()</code>
Renvoie une subdivision de l'intervalle $[a, b]$	<code>np.linspace(a, b)</code>
Génère la courbe des points définis par les listes x et y (abscisses et ordonnées)	<code>plt.plot(x, y)</code>
Affiche le graphique	<code>plt.show()</code>