

MATHÉMATIQUES

samedi 14 mars 2026

(4 heures)

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les conclusions.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Ce sujet comporte 5 pages.

Il comprend deux problèmes totalement indépendants.

Rappels et précisions

① Densité de la somme de variables aléatoires indépendantes à densité.

On rappelle que, si deux variables aléatoires réelles U_1 et U_2 sont indépendantes de densités respectives f_{U_1} et f_{U_2} , alors $U_1 + U_2$ est une variable aléatoire de densité

$$x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U_1}(t) f_{U_2}(x-t) dt$$

② Théorème central limite.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires admettant toutes une espérance μ et une variance σ^2 non nulle, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad M_n^* = \frac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Si les X_n sont mutuellement indépendantes,

alors ① $(S_n^*)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

② $(M_n^*)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Premier problème : Processus de Poisson.

Ce problème étudie un modèle probabiliste appelé *processus de Poisson*. L'étude de ce modèle est menée dans la partie 1. Cette modélisation conduit au *paradoxe de l'inspection*, étudié dans la partie 2. La partie 3 étudie une autre application.

Dans tout le problème, on suppose que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

λ désigne un réel strictement positif.

On note $T_0 = 0$, puis $T_1, T_2, \dots$ les instants successifs d'occurrence d'événements aléatoires.

On note pour $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = T_k - T_{k-1}$ et on suppose que la suite $(S_k)_{k \geq 1}$ est formée de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ .

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=1}^n S_k$.

Question préliminaire sur la loi exponentielle.

- 1) Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

Démontrer que pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $P(X > t_1 + t_2 \mid X > t_1) = P(X > t_2)$ et interpréter cette égalité.

Partie 1. Processus de Poisson.

- 2) Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire T_n admet pour densité

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t).$$

- 3) Déterminer l'espérance et la variance de T_n .

- 4) Justifier que la suite $\left(\frac{\lambda T_n - n}{\sqrt{n}}\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi usuelle que l'on précisera.

On définit pour tout $t > 0$,

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N} \mid T_n \leq t\}.$$

- 5) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t > 0$,

$$(N_t \geq n) = (T_n \leq t).$$

- 6) À l'aide de la densité obtenue à la question 2), montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$P(T_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Indication : Pour montrer $f(t) = g(t)$ on peut commencer par montrer que $t \mapsto f(t) - g(t)$ est constante

- 7) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Reconnaître la loi de N_t , puis donner son espérance et sa variance.

- 8) Expliquer pourquoi il paraît raisonnable de faire la conjecture suivante :

Pour tous x et t deux réels positifs : la variable aléatoire $N_{x+t} - N_t$ suit la loi de Poisson de paramètre λx .

Nous allons mettre en évidence ce résultat dans la partie 2 et **nous l'admettrons** dans les parties 3 et 4.

On admettra en particulier pour la suite du problème que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad P(N_{x+t} - N_t = 0) = e^{-\lambda x}$$

On définit pour $t > 0$ les événements suivants :

$$W_t = t - T_{N_t} \quad Z_t = T_{N_t+1} - t \quad L_t = T_{N_t+1} - T_{N_t}$$

Plus précisément : si N_t prend la valeur $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$W_t = t - T_n \quad Z_t = T_{n+1} - t \quad L_t = T_{n+1} - T_n$$

Ces variables représentent respectivement le temps écoulé depuis le dernier événement avant l'instant t , le temps restant avant l'événement suivant, et la longueur de l'intervalle entre ces deux événements.

- 9) Exprimer les deux événements $(N_{t+x} - N_t = 0)$ et $(N_t - N_{t-x} = 0)$ avec les variables Z_t et W_t .

(On précisera pour quels réels x et t ces égalités sont vraies)

Partie 2 : Analyse théorique du paradoxe.

On fixe un t dans $\mathbb{R}_+^*$

On appelle *paradoxe de l'inspection* le phénomène suivant : lorsqu'un instant t est choisi indépendamment du processus, l'intervalle contenant t est en moyenne plus long que l'intervalle moyen séparant deux bus successifs.

Le but de cette question est de déterminer l'espérance des trois variables aléatoires L_t , W_t et Z_t définies à la fin la partie 1.

- 10) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $P(Z_t > x) = e^{-\lambda x}$
 b) En déduire la loi suivie par Z_t , puis déterminer son espérance et sa variance.
- 11) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$,
 Montrer que : $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$
 On admet que l'on peut généraliser cette formule pour X une variable aléatoire (*quelconque*) à valeurs positives admettant une espérance par la formule suivante :
- $$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > x) dx$$
- 12) a) Justifier que $(W_t = t) = (N_t = 0)$, en déduire la probabilité de $(W_t = t)$.
 b) Montrer que pour tout $x \in [0, t]$, $P(W_t > x) = e^{-\lambda x}$.
 c) La variable W_t est-elle une variable à densité?
 d) Calculer l'espérance de W_t en utilisant la formule admise à la question 11) .
- 13) En déduire $E(L_t)$.
- 14) Expliquer pourquoi après une période transitoire on observe le paradoxe décrit au début de la partie 2.

Partie 3 Application : Deux instants choisis au hasard.

On considère deux instants choisis indépendamment et uniformément dans un intervalle de temps de longueur $T > 0$. On note U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, T]$.

On s'intéresse à la probabilité que les deux instants U et V appartiennent au même intervalle entre deux événements consécutifs du processus.

- 15) a) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-V$.
 b) En déduire une densité de la variable aléatoire $D = U - V$.
 c) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire D .
- 16) a) Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire $\Delta = |U - V|$ est :

$$F_{\Delta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2xT - x^2}{T^2} & \text{si } 0 \leq x \leq T \\ 1 & \text{si } x > T \end{cases}$$

- b) Interpréter géométriquement la formule précédente.
On pourra remarquer que : Prendre deux variables (U, V) indépendantes et uniformes dans $[0, T]$ revient à prendre aux hasards un point du carré $[0, T]^2$.
 c) Montrer que la variable aléatoire Δ est à densité et déterminer une de ses densités.

D'après le résultat admis en fin de Partie 1, pour tout $d \geq 0$, la probabilité qu'aucun bus ne passe pendant une durée d est égale à $e^{-\lambda d}$. Par conséquent on admet que :

$$p = P(\text{les deux usagers prennent le même bus}) = E\left(e^{-\lambda|U-V|}\right).$$

(Espérance de la variable $e^{-\lambda|U-V|}$)

- 17) a) Montrer que

$$p = \int_0^T e^{-\lambda x} f_{\Delta}(x) dx$$

où f_{Δ} est une densité de la variable aléatoire Δ déterminée à la question précédente.

- b) En déduire que

$$p = \frac{2}{T^2} \int_0^T (T-x)e^{-\lambda x} dx.$$

- c) Calculer cette intégrale et montrer que

$$p = \frac{2(\lambda T - 1 + e^{-\lambda T})}{\lambda^2 T^2}.$$

18) On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{4}$.

- a) Montrer que $g(x) = 0$ à une unique solution sur l'intervalle $] -\infty; 0[$, que l'on notera α .

(On pourra étudier les variations de g')

On admet que : $\alpha \approx -2.56$ à 10^{-2} près.

- b) En déduire pour $\lambda = \frac{1}{10}$ une valeur approchée de T_* pour lequel $p = \frac{1}{2}$.
c) Interpréter cette valeur T_* au vu de la situation étudiée dans cette partie 3.

Deuxième problème : Un modèle déterministe pour la propagation des épidémies

Question préliminaire

On considère une fonction $N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$N'(t) = -\frac{1}{\tau} N(t)$$

où $\tau > 0$ est une constante et $N(0) = N_0 > 0$.

- 1) a) Résoudre cette équation différentielle.
b) On suppose que $N(t)$ représente le nombre moyen d'individus se trouvant encore dans un certain état à l'instant t parmi une population initiale de taille N_0 .
On note T la durée passée dans cet état par un individu. La proportion d'individus encore dans cet état à l'instant t est alors $\frac{N(t)}{N_0}$, ce qui conduit au modèle $P(T > t) = \frac{N(t)}{N_0}$.
c) Reconnaître la loi de la variable aléatoire T .
d) Justifier que, dans ce modèle, le paramètre τ soit appelé la durée de vie moyenne dans cet état.

On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) = \gamma I(t), \end{cases}$$

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = 0.$$

Ici, β, γ, S_0 et I_0 sont des réels strictement positifs.

On admettra qu'il existe une solution $t \mapsto (S(t), I(t), R(t))$ sur $\mathbb{R}_+$.

- 2) Si, à l'instant $t \geq 0$, $S(t)$ représente le nombre de personnes n'ayant pas encore contracté la maladie (*Saines*), $I(t)$ le nombre de personnes infectées (*Infectées*) et $R(t)$ le nombre de personnes guéries (*Recouvrées*).
On suppose que seuls les individus infectés peuvent transmettre la maladie et que les individus guéris sont définitivement immunisés.
a) Expliquer brièvement en quoi ce système est pertinent pour décrire la propagation d'une épidémie et sous quelles hypothèses il est pertinent.
(On pourra interpréter ce système ligne par ligne).
b) Expliquer pourquoi, sous ces hypothèses, $1/\gamma$ peut-être interprété comme la période de contagiosité de chaque individu infecté.
- 3) a) Exprimer $S(t)$ en fonction de S_0 , β et $\int_0^t I(s)ds$. En déduire que $S(t) > 0$ pour tout $t > 0$.
b) De même, montrer que $I(t) > 0$ pour tout $t > 0$. En déduire que $R(t) > 0$ pour tout $t > 0$.
c) Montrer que $S + I + R$ ne dépend pas du temps. En déduire que ces quantités sont toutes bornées.
d) Montrer que $S(t)$ et $R(t)$ tendent quand $t \rightarrow +\infty$, vers des quantités qu'on notera respectivement S_∞ et R_∞ . En déduire que $I(t)$ tend quand $t \rightarrow +\infty$, vers une quantité qu'on notera I_∞ .

- 4) a) Supposons que $S_\infty \geq \gamma/\beta$. Montrer qu'alors I est croissante et en déduire une contradiction.
 b) Montrer que $I_\infty = 0$.
 c) Tracer les tableaux de variations de S , I et R . On distinguera les cas $\beta S_0/\gamma \leq 1$ et $\beta S_0/\gamma > 1$.
- 5) Montrer que l'épidémie se propage, c'est-à-dire que le maximum de $t \mapsto I(t)$ sera strictement plus grand que I_0 , si et seulement si $\beta S_0/\gamma > 1$.
- 6) Montrer que $\ln S - \frac{\beta}{\gamma}(S + I)$ ne dépend pas du temps.
- 7) a) En déduire une relation sur S_∞ , S_0 , I_0 , β et γ .
 b) En déduire que, si l'on considère S_∞ comme une fonction de I_0 , alors S_∞ est strictement décroissante en I_0 . Cela vous paraît-il logique?
- 8) a) À l'aide de la relation déduite à la question 6), calculer le maximum de $t \mapsto I(t)$ en fonction de β , γ , I_0 et S_0 , dans le cas où $\beta S_0/\gamma > 1$.
 b) On suppose que $\beta S_0/\gamma = 4$, que $S_0 = 7 \times 10^7$ et que $I_0 = 1$. À l'aide de la relation $\ln 4 \simeq 1,4$, calculer une approximation du maximum de $t \mapsto I(t)/S_0$.
 On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t), \\ E'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha E(t), \\ I'(t) = \alpha E(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) = \gamma I(t), \end{cases}$$

$$S(0) = S_0, \quad E(0) = 0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = 0.$$

Ici, α , β , γ , S_0 et I_0 sont des réels strictement positifs.

On admettra qu'il existe une solution $t \mapsto (S(t), E(t), I(t), R(t))$ sur $\mathbb{R}_+$.

On admettra également que $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ restent strictement positifs pour tous les temps $t > 0$.

- 9) a) Comment interpréter la quantité $E(t)$?
 b) Étudier cette équation (*on pourra commencer par tracer le tableau de variations de $t \mapsto E(t) + I(t)$*). Trouver en particulier une condition garantissant la propagation de l'épidémie et calculer le maximum de $t \mapsto E(t) + I(t)$.

FIN du SUJET