

Questions préliminaires sur la loi exponentielle.

- 1) X a pour densité la fonction f définie par $\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } 0 \leq t \end{cases}$

et pour fonction de répartition F_X définie par : $\begin{cases} F_X(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$.

- 2) X admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ ACV $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt$ CV et alors $E(X) = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt$.
Pour $A > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^A \lambda t e^{-\lambda t} dt &= \left[-t e^{-\lambda t} \right]_0^A - \int_0^A (-e^{-\lambda t}) dt && \text{Intégration par parties} \\ &= -A e^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda} \int_0^A \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 + \frac{1}{\lambda} \times 1 && \text{Croissance comparée et } f \text{ est une densité} \end{aligned}$$

$$\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

X^2 admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ ACV $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$ CV et alors $E(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$.
Pour $A > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^A \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt &= \left[-t^2 e^{-\lambda t} \right]_0^A - \int_0^A 2t(-e^{-\lambda t}) dt && \text{Intégration par parties} \\ &= -A^2 e^{-\lambda A} + \frac{2}{\lambda} \int_0^A \lambda t e^{-\lambda t} dt \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 + \frac{2}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} && \text{Croissance comparée et calcul de } E(X) \end{aligned}$$

donc X^2 admet une espérance et $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$

et enfin $\boxed{X \text{ possède une variance}}$ et (formule de Kœnig-Huygens) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$

$$\boxed{V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

- 3) Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^{*2}$,

$$\begin{aligned} P_{X>t_1}(X > t_1 + t_2) &= \frac{P((X > t_1) \cap (X > t_1 + t_2))}{P(X > t_1)} \\ &= \frac{P(X > t_1 + t_2)}{P(X > t_1)} && (\text{car } (X > t_1 + t_2) \subset (X > t_1)) \\ &= \frac{e^{-\lambda(t_1+t_2)}}{e^{-\lambda t_1}} \\ &= e^{-\lambda t_2} = \mathbb{P}(X > t_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{X>t_1}(X > t_1 + t_2) = P(X > t_2)}$$

La loi exponentielle est sans mémoire :

Si X est un temps d'attente et si à t_1 on attend toujours alors le temps d'attente suit la même loi qu'au début.

Partie 1. Processus de Poisson.

4) Montrons cette propriété par récurrence sur n en la notant $\mathcal{P}(n)$.

- Pour $n = 1$, $T_1 = S_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ donc T_1 de densité $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

$$\text{et } \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

$\mathcal{P}(1)$ est vraie

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie,

$T_{n+1} = T_n + S_{n+1}$, et T_n et S_{n+1} sont indépendantes (*lemme de coalition*)

donc avec le rappel ❶ on peut affirmer que T_{n+1} est de densité : $f_{T_{n+1}} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_n}(t) f_{S_{n+1}}(x-t) dt$

$$\begin{aligned} f_{T_{n+1}}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_n}(t) f_{S_{n+1}}(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \times \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \lambda^{n+1} e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \mathbb{1}_{] -\infty, x]}(t) dt \end{aligned}$$

donc si $x < 0$, $f_{T_{n+1}}(x) = 0$

$$\text{et si } x \geq 0, f_{T_{n+1}}(x) = \lambda^{n+1} e^{-\lambda x} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt = \lambda^{n+1} e^{-\lambda x} \frac{x^n}{n!}.$$

$$f_{T_{n+1}}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \quad (\text{on a } \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie})$$

En conclusion :

Pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire T_n admet pour densité $f_{T_n} : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

5) Les S_k admettent une espérance et $T_n = \sum_{k=1}^n$ donc (*linéarité*) T_n admet une espérance et $E(T_n) = \sum_{k=1}^n E(S_k)$

et comme $E(S_k) = \frac{1}{\lambda}$ on obtient : $E(T_n) = \frac{n}{\lambda}$

Les S_k admettent une variance et $T_n = \sum_{k=1}^n$ donc (*indépendance des S_k*) T_n admet une variance et $V(T_n) = \sum_{k=1}^n V(S_k)$

et comme $V(S_k) = \frac{1}{\lambda^2}$ on obtient : $V(T_n) = \frac{n}{\lambda^2}$

6) Les S_k sont indépendantes et suivent la loi exponentielle d'espérance $\mu = \frac{1}{\lambda}$ et de variance $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

donc le théorème central limite permet d'affirmer que $\left(\frac{T_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} \right)$ converge en loi vers une variable suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

$\left(\frac{\lambda T_n - n}{\sqrt{n}} \right)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

7) Interprétation : N_t est le nombre de bus arrivé dans l'intervalle $]0, t]$

$(N_t \geq n)$: " dans l'intervalle $]0, t]$ il est passé n bus ou plus "

$(T_n \leq t)$: " le n -ième bus passe à l'instant t ou avant "

on en déduit que (*on peut détailler la double inclusion*)

$(N_t \geq n) = (T_n \leq t)$

Remarque : ici on ne tient jamais compte du bus qui part à $T_0 = 0$.

8) On définit sur $\mathbb{R}_+^*$, $h : t \mapsto P(T_n \leq t) - \left(1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$.

h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\begin{aligned} h'(x) &= f_{T_n}(x) - \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} - \lambda e^{-\lambda t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} - \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ on peut en déduire que h est la fonction nulle.

$$\text{Pour tout } n \geq 1, \quad P(T_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

9) On déduit des deux questions précédentes que $P(N_t \geq n) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ et $P(N_t \geq n+1) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!}$
or $P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1)$ donc

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$N_t \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \lambda t, \quad E(N_t) = \lambda t \text{ et } V(N_t) = \lambda t$$

10) $N_{t+x} - N_t$ est le nombre de bus passés dans l'intervalle $]t, t+x]$. La loi exponentielle vérifie la propriété sans mémoire, donc on peut supposer que le processus redémarre après l'instant t .

Il est donc naturel de conjecturer que $N_{t+x} - N_t$ suit la même loi que N_x , c'est à dire loi de Poisson de paramètre λx .

$$N_{t+x} - N_t \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \lambda x$$

- 11) $\triangleright W_t$ est Le temps écoulé depuis le passage du bus avant l'arrivée de l'usager.
 $\triangleright L_t$ est la durée entre les deux bus : celui pris par l'usager et le précédent.
 $\triangleright N_t$ est Le nombre de bus passés dans l'intervalle $]0, t]$.
 $\triangleright Z_t$ est Le temps d'attente du bus par l'usager.

12) a) $N_{t+x} - N_t$ est le nombre de bus passés dans l'intervalle $]t, t+x]$

$$(N_{t+x} - N_t = 0) : \text{" aucun bus ne passe dans l'intervalle }]t, t+x] \text{"}$$

b) $N_t - N_{t-x}$ est le nombre de bus passés dans l'intervalle $]t-x, t]$

$$(N_t - N_{t-x} = 0) : \text{" aucun bus ne passe dans l'intervalle }]t-x, t] \text{"}$$

c) Pour t et x deux réels positifs, $(N_{t+x} - N_t = 0) = (Z_t > x)$

Pour t et x deux réels positifs vérifiant $t-x > 0$,

$$(N_t - N_{t-x} = 0) = (W_t > x)$$

Partie 2 Analyse empirique.

13) L'usager a observé qu'entre les deux bus il y avait une moyenne de 10 minutes, or l'espérance d'une variable suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est égale à $\frac{1}{\lambda}$ ce qui justifie le choix

$$\lambda = \frac{1}{10}$$

- 14) a) U prend ses valeurs dans $]0, 1[$ (car f est nulle en dehors de $]0, 1[$) donc
 $1 - U$ est à valeurs dans $]0, 1[$ et $\ln(1 - U)$ est à valeurs dans $]-\infty; 0[$ et enfin comme $\lambda > 0$:

$$Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \text{ prend ses valeurs dans }]0, +\infty[$$

Pour $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \leq x\right) \\ &= P(\ln(1 - U) \geq -\lambda x) \quad \text{car } \lambda > 0 \\ &= P(1 - U \geq \exp(-\lambda x)) \quad \text{car } t \mapsto e^t \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &= P(U \leq 1 - \exp(-\lambda x)) \\ &= F_U(1 - \exp(-\lambda x)) \\ &= 1 - \exp(-\lambda x) \quad \text{car } 1 - \exp(-\lambda x) \in]0, 1[\text{ et } U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[) \end{aligned}$$

$$\text{donc } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x) & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

Y suit une loi exponentielle de paramètre λ

- b) On peut en déduire que la simulation de X peut se faire avec la fonction suivante :

```
def simul_exp(lambd):
    x = rd.random()
    y = -1/lambd * m.log(1-x)
    return y
```

- 15) T_n est une somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre λ donc

```
def simul_T(n):
    T = 0
    for k in range(n):
        T += simul_exp(lambd)
    return T
```

- 16) La fonction Python suivante permet de simuler la réalisation de N_t .

Explication : On construit $T_1, T_2, \dots$ et on s'arrête dès que T_n dépasse strictement t , N_t est l'entier précédent.

```
def simul_N(t):
    T, n = 0, 0
    while T <= t:
        T += simul_exp(lambd)
        n += 1
    return n-1
```

- 17) La fonction donnée permet de simuler la réalisation de la variable W_t .

Explication :

La fonction simule l'arrivée successive des bus, on a toujours deux bus consécutifs, on s'arrête quand $T_1 \leq t < T_2$.
 Les fonctions suivantes permettent de simuler la réalisation de Z_t et L_t .

<pre>def simul_Z(t): T1 = 0 T2 = simul_exp(lambd) while T2 <= t: T1 = T2 T2 += simul_exp(lambd) return T2 - t</pre>	<pre>def simul_L(t): T1 = 0 T2 = simul_exp(lambd) while T2 <= t: T1 = T2 T2 += simul_exp(lambd) return T2 - T1</pre>
--	---

Remarque : La variable $T1$ est inutile pour simuler Z_t .

18) Explication : La liste E contient N réalisations de la variable W_t .

Pour chaque x_k de la liste x , $\frac{k+1}{N}$ est la fréquence des valeurs $\leq x_k$ donc pour N grand cela estime la probabilité de $P(W_t \leq x_k)$

```
plt.figure("Fonct. de repartition de W")
E = [ simul_W(t) for _ in range(N)]
x = sorted(E)
y = [ (k+1)/N for k in range(N)]
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

19) Dans le programme suivant il suffit de remplacer X par une des lettres W , Z et L .

```
def Esp_X(t):
    s = 0
    for k in range(N):
        s += simul_X(t)
    return s/N
```

Explication : On estime l'espérance avec la moyenne arithmétique d'un grand nombre de simulations

(Loi des grands nombres)

20) *(Ici on estime les espérances avec une série de N simulations)*

La courbe 1 représente l'espérance de L_t en fonction de l'instant t .

La courbe 2 représente l'espérance de Z_t en fonction de l'instant t .

Le temps d'attente du bus (courbe 2) est en moyenne d'environ 10 minutes comme l'utilisateur l'a constaté.

Au delà d'une période de transitoire (environ 50 min) la durée entre les deux bus qui encadrent t (courbe 1) est en moyenne d'environ 20 min.

Remarque : certains utilisent $5 \times \frac{1}{\lambda}$, mais il faudrait savoir d'où cela vient et pourquoi cela s'applique ici.

21) Les programmes corrects sont le 1 et 4.

Ce n'est pas le programme 3 car on simule indépendamment N_t et N_{t+x} , on pourrait même renvoyer des résultats négatifs.

Ce n'est pas le programme 2 car la fonction `proba(t, x)` n'estime pas la probabilité mais une espérance.

22) a) La courbe régulière est la représentation de : $x \mapsto e^{-\lambda x}$ et la courbe moins régulière est estimation de $x \mapsto P(N_{t+x} - N_t = 0)$ pour $t = 100$.

Les courbes sont très proches, cela confirme la conjecture faite en fin de la partie 1 :

$$P((N_{t+x} - N_t) = 0) = e^{-\lambda x}$$

b) Pour tester encore cette conjecture on peut augmenter la valeur de N le nombre de simulations et modifier la valeur de t .

Partie 3 Analyse théorique du paradoxe.

23) a) On a vu à la question 12)c) que $(Z_t > x) = (N_{t+x} - N_t = 0)$ et on a admis que $P((N_{t+x} - N_t = 0)) = e^{-\lambda x}$

$$\text{pour tout } x \geq 0, P(Z_t > x) = e^{-\lambda x}$$

b) Z_t est à valeurs positives et pour tout $x \geq 0$, $P(Z_t \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$

$$Z_t \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda), \quad E(Z_t) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(Z_t) = \frac{1}{\lambda^2}$$

24) (Question ultra-classique)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n P(X = i) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n P(X = i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i P(X = i) \quad (\text{Somme triangulaire}) \\
 &= \sum_{i=1}^n i P(X = i) \\
 &= \sum_{i=0}^n i P(X = i) \\
 &= E(X)
 \end{aligned}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$$

- 25) a) $(W_t = t)$ est l'événement : " il n'y a pas eu de bus dans l'intervalle $]0, t]$ " donc $(W_t = t) = (N_t = 0)$, sachant de plus que N_t suit la loi $\mathcal{P}(\lambda t)$, il vient :

$$P(W_t = t) = e^{-\lambda t}$$

- b) Pour $x \in [0, t]$, on a vu à la question 12)c) que $(N_t - N_{t-x} = 0) = (W_t > x)$ et on a admis à la question 10) que $(N_t - N_{t-x})$ suit la loi de Poisson de paramètre λx , en particulier $P(N_t - N_{t-x} = 0) = e^{-\lambda x}$

$$\text{pour tout } x \in [0, t], \quad P(W_t > x) = e^{-\lambda x}$$

- c) $P(W_t = t) = e^{-\lambda t} \neq 0$ donc

La variable W_t n'est pas une variable aléatoire à densité

- d) W_t est à valeurs positives, on peut appliquer la formule de la question 24).
pour tout $x \in [0, t]$, $P(W_t > x) = e^{-\lambda x}$ et pour $x > t$, $P(W_t > x) = 0$ donc

$$\begin{aligned}
 E(W_t) &= \int_0^{+\infty} P(W_t > x) dx \\
 &= \int_0^t e^{-\lambda x} dx \\
 &= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^t
 \end{aligned}$$

$$E(W_t) = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

- 26) $L_t = Z_t + W_t$ donc en utilisant la linéarité de $E(.)$ et les résultats précédents on obtient :

$$\begin{aligned}
 E(L_t) &= E(Z_t) + E(W_t) \\
 &= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})
 \end{aligned}$$

$$E(L_t) = \frac{1}{\lambda} (2 - e^{-\lambda t})$$

- 27) Quand $t \rightarrow +\infty$, $2 - e^{-\lambda t} \rightarrow 2$ de manière exponentielle, après une période de transition on a $E(L_t) \approx 2E(Z_t)$
La durée moyenne entre les deux bus qui encadrent t est en moyenne le double du temps d'attente de l'utilisateur.

Après une période transitoire on observe le paradoxe vu à la partie 2

Partie 4 Application : Deux usagers à l'arrêt de bus.

28) a)

```
def meme_bus(t1, t2, lambd):
    U = t1 + (t2-t1) * rd.random()
    V = t1 + (t2-t1) * rd.random()
    U, V = min(U, V), max(U, V)
    s = 0
    while s <= U :
        s += simul_exp(lambd)
    return s > V
```

b) On approche la probabilité par une étude fréquentielle (*application de la loi des grands nombres*)

```
t1, t2, lambd = 120, 180, 0.1
N = 10000
s = 0
for k in range(N):
    if meme_bus(t1, t2, lambd):
        s += 1
print(s/N)
```

29) a) V suit la loi uniforme sur $[0, T]$ donc par la stabilité des lois uniformes par transformation affine, $-V$ suit la loi uniforme sur $[-T, 0]$

$$t \mapsto \frac{1}{T} \mathbb{1}_{[-T, 0]} \text{ est une densité de } -V$$

b) U et $-V$ sont indépendantes et à densité donc on peut utiliser le rappel ❶ et ainsi

$$\begin{aligned} f_D(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_{-V}(x-t) dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0, T]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[-T, 0]}(x-t) dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0, T]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[x, x+T]}(t) dt \end{aligned}$$

donc

$$f_D : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -T \\ \frac{T+x}{T^2} & \text{si } -T \leq x \leq 0 \\ \frac{T-x}{T^2} & \text{si } 0 \leq x \leq T \\ 0 & \text{si } x > T \end{cases}$$

c) En intégrant sur chaque intervalle en respectant les contraintes $\lim_{-\infty} F = 0$, F continue et $\lim_{+\infty} F = 1$ on obtient la fonction de répartition de la variable aléatoire D :

$$F_D : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -T \\ \frac{(T+x)^2}{2T^2} & \text{si } -T \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{(T-x)^2}{2T^2} & \text{si } 0 \leq x \leq T \\ 1 & \text{si } x > T \end{cases}$$

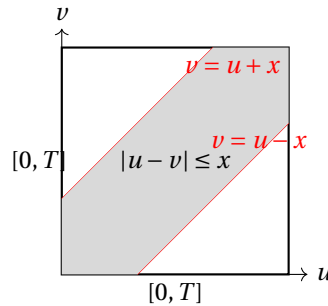
30) a) Δ est à valeurs dans $[0, T]$ et pour $x \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} F_{\Delta}(x) &= P(\Delta \leq x) \\ &= P(-x \leq D \leq x) \\ &= F_D(x) - F_D(-x) \\ &= 1 - \frac{(T-x)^2}{2T^2} - \frac{(T-x)^2}{2T^2} \quad (\text{En utilisant le résultat de 29)c}) \end{aligned}$$

On en déduit la fonction de répartition de la variable aléatoire $\Delta = |U - V|$:

$$F_{\Delta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2xT - x^2}{T^2} & \text{si } 0 \leq x \leq T \\ 1 & \text{si } x > T \end{cases}$$

b) Sur la figure suivante, la probabilité de $|U - V| \leq x$ est l'aire du domaine en gris sur l'aire du carré : T^2



L'aire de la partie grise est : $T^2 - (T - x)^2$, on retrouve bien le résultat de la question 30) a).

c) La fonction F_{Δ} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé de 0 et T donc La variable aléatoire Δ est à densité en dérivant sur chaque intervalle on obtient une de ses densités :

$$f_{\Delta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2(T - x)}{T^2} & \text{si } 0 \leq x \leq T \\ 0 & \text{si } x > T \end{cases}$$

31) a) Δ est à densité et à valeurs dans $[0, T]$ donc : $E(e^{-\lambda\Delta}) = \int_0^T e^{-\lambda x} f_{\Delta}(x) dx$

(car ici cette intégrale est absolument convergente)

On a bien

$$p = \int_0^T e^{-\lambda x} f_{\Delta}(x) dx$$

b)

$$\begin{aligned} p &= \int_0^T e^{-\lambda x} f_{\Delta}(x) dx \\ &= \int_0^T e^{-\lambda x} \frac{2(T - x)}{T^2} dx \end{aligned}$$

donc

$$p = \frac{2}{T^2} \int_0^T (T - x) e^{-\lambda x} dx.$$

c)

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{T^2} \int_0^T e^{-\lambda x} (T - x) dx \\ &= \frac{2}{T^2} \left(\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} (T - x) \right]_0^T - \int_0^T \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \right) \quad (\text{intégration par parties avec des fonctions de classe } C^{\infty}) \\ &= \frac{2}{T^2} \left(\frac{T}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda T}) \right) \end{aligned}$$

donc

$$p = \frac{2(\lambda T - 1 + e^{-\lambda T})}{\lambda^2 T^2}.$$

32) a) g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - 1 - \frac{x}{2}$ et $g''(x) = e^x - \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\ln(2)$	0
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	1	$\frac{\ln 2 - 1}{2}$	0

La fonction g' s'annule un et une seule fois en un réel que nous noterons β , on peut remarquer que $\beta < 0$

x	$-\infty$	β	0
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$g(\beta)$	0

On en déduit que : $g(x) = 0$ à une unique solution sur l'intervalle $] -\infty; 0[$, que l'on notera α

- b) On remarque que $p = \frac{1}{2}$ équivaut à $g(-\lambda T) = 0$ donc équivaut à $T = \frac{-\alpha}{\lambda}$.

On en déduit que : $T_* \approx 25,6$ minutes

- c) Si on répète l'expérience chaque jour, avec des arrivées indépendantes et uniformes sur un intervalle de longueur 25 minutes, alors la proportion de jours où les deux usagers prennent le même bus sera proche de $\frac{1}{2}$.

FIN de la CORRECTION