

CHAPITRE 3

Valeurs propres et vecteurs propres

*Une idée qui ne peut servir qu'une seule fois est une astuce.
Sinon, elle devient une méthode.*

GEORGE PÓLYA

Mathématicien américain d'origine hongroise
et suisse (1887-1985).

Ce chapitre est un préliminaire à la réduction des matrices et endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie qui est l'un des objectifs du programme de deuxième année. Il sera complété par le chapitre « diagonalisation ». Le chapitre commence par des rappels de première année sur des polynômes d'endomorphismes et de matrices pour ensuite définir la notion de valeur propre et de vecteur propre.

1

Rappels : polynômes d'endomorphismes et de matrices

Rappelons que, pour un endomorphisme φ de E , les applications $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi \dots$ sont parfaitement définies et linéaires. Les **puissances** de φ sont les applications :

$$\varphi^0 = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ compositions}}.$$

Remarque. Comme pour les matrices, il existe une version de la formule du binôme de Newton dans le cas des endomorphismes. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$ qui *commutent* ($\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$). Alors pour tout entier naturel p ,

$$(\varphi + \psi)^p = (\varphi + \psi) \circ (\varphi + \psi) \circ \dots \circ (\varphi + \psi) = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \varphi^i \circ \psi^{p-i}.$$

Exemple. Calculons les puissances de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (2x + y, 2y). \end{cases}$$

Remarquons que $\varphi = 2\text{id}_{\mathbb{R}^2} + \psi$, où ψ est l'endomorphisme défini par $\psi(x, y) = (y, 0)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Or, ψ^2 est l'application nulle. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\psi^2((x, y)) = \psi(\psi(x, y)) = \psi((y, 0)) = (0, 0).$$

Puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,

$$\psi^k = \psi^2 \circ \psi^{k-2} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Comme les endomorphismes $2\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ et ψ commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \varphi^n &= (2\text{id}_{\mathbb{R}^2} + \psi)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2\text{id}_{\mathbb{R}^2})^{n-k} \circ \psi^k = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} (2\text{id}_{\mathbb{R}^2})^{n-k} \circ \psi^k \\ &= \binom{n}{0} 2^n \text{id}_{\mathbb{R}^2} \circ \psi^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} \text{id}_{\mathbb{R}^2} \circ \psi^1 = 2^n \text{id}_{\mathbb{R}^2} + n 2^{n-1} \psi. \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^n((x, y)) = 2^{n-1}(2x + ny, 2y).$$

DÉFINITIONS

polynôme de matrice, d'endomorphisme

Soient $P(x) = \sum_{i=0}^p a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

- Le **polynôme de matrice** $P(A)$ est défini par $P(A) = \sum_{i=0}^p a_i A^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Un polynôme P est **annulateur** de A si $P(A) = 0_n$.

- Le **polynôme d'endomorphisme** $P(\varphi)$ est défini par $P(\varphi) = \sum_{i=0}^p a_i \varphi^i \in \mathcal{L}(E)$.

Un polynôme P est **annulateur** de φ si $P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Règles de calcul

On démontre que pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$,

$$(\lambda P)(A) = \lambda P(A) \quad \text{et} \quad (P + Q)(A) = P(A) + Q(A).$$

Retenons également la propriété de commutativité :

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A) = (QP)(A).$$

On a de même avec des endomorphismes

$$(\lambda P)(\varphi) = \lambda P(\varphi), \quad (P + Q)(\varphi) = P(\varphi) + Q(\varphi) \quad \text{et} \quad (PQ)(\varphi) = P(\varphi) \circ Q(\varphi) = Q(\varphi) \circ P(\varphi) = (QP)(\varphi).$$

Exemple. Reprenons l'exemple de $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $\varphi((x, y)) = (2x + y, x)$.

Vérifions que le polynôme P défini par $P(t) = t^2 - 2t - 1$ est annulateur de φ . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi^2((x, y)) &= \varphi(\varphi((x, y))) = \varphi((2x + y, x)) \\ &= (2(2x + y) + x, 2x + y) = (5x + 2y, 2x + y); \\ -2\varphi((x, y)) &= (-4x - 2y, -2x); \\ -\text{id}_E(x, y) &= (-x, -y). \end{aligned}$$

$$\varphi^2((x, y)) - 2\varphi((x, y)) - \text{id}_{\mathbb{R}^2}(x, y) = (0, 0).$$

Comme cela est valable pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on écrit simplement $\varphi^2 - 2\varphi - \text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

Exercice 1



✦ 🎵 🧠 Existence d'un polynôme annulateur

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En étudiant la famille $(I_n, A, \dots, A^p)$ pour un entier p bien choisi, montrer que A admet un polynôme annulateur. p. 24

VP1

Exercice 2



♦♦ Exemples

Les questions sont indépendantes.

1. Donner un polynôme annulateur à l'endomorphisme $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P' \in \mathbb{R}_n[x]$.

p. 24

2. Même question avec $\psi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P(x+7) \in \mathbb{R}_n[x]$.

On pourra remarquer que $\psi(P) - P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

VP2

Exemples. Polynômes d'une matrice diagonale, triangulaire.

Posons :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{bmatrix} t_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & t_n \end{bmatrix}.$$

Alors

$$P(D) = \begin{bmatrix} P(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P(d_n) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P(T) = \begin{bmatrix} P(t_1) & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & P(t_n) \end{bmatrix}.$$

Remarque. Notez que si tous les coefficients diagonaux d_i sont racines du polynôme P , alors P est un polynôme annulateur de D .

Exercice 3



Les questions sont indépendantes.

1. Soient A, B deux matrices carrées semblables.
Montrer que tout polynôme annulateur de A est annulateur de B .
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[x]$ annulateur de A .
Montrer que si $P(0) \neq 0$ alors A est inversible.

p. 24

#VP3

PROPOSITION

polynôme d'endomorphisme, de matrice

Soient E un espace vectoriel de dimension finie dont $\mathcal{B}$ est une base et φ un endomorphisme de E .
Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)^k = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k).$$

Plus généralement, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$,

$$P(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(\varphi)).$$

Preuve. • Le premier point s'obtient par un raisonnement par récurrence sur k à partir de la formule

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{k+1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi).$$

- Le second point découle du premier et de la linéarité de l'application $\varphi \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

2

Valeurs propres, vecteurs propres, cas matriciel

2.1

Premières définitions

DÉFINITIONS

valeurs propre, vecteur propre

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On dit que λ est une **valeur propre** de A et que X est un **vecteur propre** pour A associé à la valeur propre λ si

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

Exemple. Posons

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de sorte que

$$AX = 0 \cdot X, \quad AY = Y \quad \text{et} \quad AZ = -2Z.$$

Comme X , Y et Z sont des matrices-colonnes non nulles, 0, 1 et -2 sont des valeurs propres de A .

 **Attention.** Un vecteur propre est toujours non nul.

DÉFINITION

spectre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le **spectre** de A , noté $\text{Sp}(A)$, est l'ensemble des valeurs propres de A .

Exemple. En reprenant l'exemple précédent, $\{0; 1; -2\} \subset \text{Sp}(A)$.

Python. Voici le code pour obtenir une approximation des valeurs propres.

Editeur

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
# On importe la sous-bibliothèque
    linalg
A=np.array([[1,3,0],[0,-2,0],[-1,-2,0]])
# On définit la matrice A
print(al.eigvals(A))
```

Console

```
>>> # script executed
[ 0.  1. -2.]
```

Selon ce calcul, -2 , 0 et 1 sont toutes les valeurs propres de la matrice A . On conjecture donc que $\text{Sp}(A) = \{-2; 0; 1\}$.

2.2 Caractérisations des valeurs propres

THÉORÈME

caractérisation avec l'inversibilité

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) Le réel λ est une valeur propre de A .
- ii) La matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Autrement dit, $\text{Sp}(A)$ est l'ensemble des réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, \quad AX = \lambda X \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, \quad (A - \lambda I_n)X = 0_{n,1} \\ &\iff \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\} \\ &\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible.} \end{aligned}$$

La dernière équivalence est une conséquence de la formule du rang. ■

Remarque. En particulier, 0 est valeur propre si et seulement si la matrice A n'est pas inversible.

COROLLAIRE

matrices triangulaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A est une matrice triangulaire,
alors les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de A .

Preuve. Notons $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice $A - \lambda I_n$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont les réels $a_{ii} - \lambda$ où $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
Il suffit ensuite de rappeler qu'une matrice triangulaire n'est pas inversible si et seulement si au moins l'un de ses coefficients diagonaux est nul.



Attention. C'est grossièrement faux si la matrice n'est pas triangulaire.

On pourra par exemple vérifier que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ n'admet aucune valeur propre réelle.

2.3 Les sous-espaces propres $E_\lambda(A)$

DÉFINITION

$E_\lambda(A)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout réel λ , on pose

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}.$$

En remarquant que $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$, on en déduit que :

PROPOSITION

structure de $E_\lambda(A)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$ si et seulement si λ est une valeur propre de A .

Remarque. La formule du rang donne alors $\dim(E_\lambda(A)) + \text{rg}(A - \lambda I_n) = n$.

Vocabulaire. Si $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$ alors on parle de **l'espace propre associé à la valeur propre λ** . Dans ce cas,

$$1 \leq \dim(E_\lambda(A)) \leq n.$$

Exercice 4



◆ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que si A et B sont semblables alors $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$ et les sous-espaces propres de A et B associés à la même valeur propre ont même dimension.

p. 24

2. 🎵 **Transformation affine du spectre**

Donner le lien entre le spectre de A et celui de $\alpha A + \beta I_n$?

VP4

Exemple. Le cas diagonal.

Si A est une matrice diagonale, alors les valeurs propres de A sont exactement les coefficients diagonaux de A et pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$, la dimension de $E_\lambda(A)$ est égale au nombre de fois où λ apparaît sur la diagonale de A .

Exercice 5



◆🎵 **Vrai ou Faux?** Pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ alors $\lambda^2 \in \text{Sp}(A^2)$.

✓ ×

2. Si $\lambda^2 \in \text{Sp}(A^2)$ alors $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

✓ ×

3. $\text{Sp}(A) = \text{Sp}({}^t A)$.

✓ ×

p. 25

4. $E_\lambda(A) = E_\lambda({}^t A)$.

✓ ×

5. $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda({}^t A))$.

✓ ×

6. Si A est inversible, $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ssi $\lambda^{-1} \in \text{Sp}(A^{-1})$.

✓ ×

VP5

Exercice 6



◆🎵 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si la somme des coefficients de A sur chaque ligne vaut 1 alors $1 \in \text{Sp}(A)$.

p. ??

2. Est-ce encore vrai si la somme des coefficients de A sur chaque colonne vaut 1?

VP6

3

Valeurs propres, vecteurs propres, cas des endomorphismes

3.1 Définitions et exemples

Reprenons et adaptons les définitions au cas des endomorphismes d'un espace vectoriel E .

DÉFINITIONS

valeur propre, vecteur propre, spectre

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$. On dit que λ est une **valeur propre** de φ et que u est un **vecteur propre** pour φ associé à la valeur propre λ si

$$\varphi(u) = \lambda u \quad \text{et} \quad u \neq 0_E.$$

- L'ensemble des valeurs propres de φ est le **spectre** de φ , il est noté $\text{Sp}(\varphi)$.

Exemple. Posons $u = (1, 0, -2)$, $v = (0, 0, 1)$, $w = (1, 1, -2)$ et

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + 2y, 3y, 2x - 4y + 2z) \end{cases}$$

On a $\varphi(u) = u$, $\varphi(v) = 2v$ et $\varphi(w) = 3w$. Comme u , v et w sont non nuls, 1, 2 et 3 sont trois valeurs propres de φ . C'est-à-dire, $\{1; 2; 3\} \subset \text{Sp}(\varphi)$.

Remarque. Le vecteur u (non nul) est un vecteur propre de φ si et seulement si la droite vectorielle $\text{Vect}(u)$ est stable par φ .

Preuve. Raisonnons par double implication.

$\Rightarrow$ Si u est vecteur propre de φ alors pour tout $v = \mu u \in \text{Vect}(u)$,

$$\varphi(v) = \varphi(\mu u) = \mu \varphi(u) = \mu \lambda u \in \text{Vect}(u).$$

Le sous-espace $\text{Vect}(u)$ est stable par φ .

$\Leftarrow$ Réciproquement, si $\text{Vect}(u)$ est stable par φ alors $\varphi(u) \in \text{Vect}(u)$. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(u) = \lambda u$. C'est-à-dire que u (non nul) est vecteur propre de φ .

Exercice 7



◆ Exemples

Les questions sont indépendantes.

On pose $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow \mathbb{R}_n[x] \\ P & \mapsto P' + 2P \end{cases}$ et $\psi : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto f' \end{cases}$

p. ??

1. Étudier les valeurs propres de l'endomorphisme φ .
2. Montrer que tout réel est valeur propre de ψ .

Remarque. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons l'endomorphisme

$$\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto AX. \end{cases}$$

Les valeurs propres (et vecteurs propres) de φ_A correspondent exactement aux valeurs propres (et vecteurs propres) de la matrice A .

DÉFINITION - PROPOSITION

 $E_\lambda(\varphi)$

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit le sous-espace vectoriel $E_\lambda(\varphi)$ de E par

$$E_\lambda(\varphi) = \{u \in E \mid \varphi(u) = \lambda u\} = \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_E).$$

Remarques.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(\varphi)$ est un espace stable par φ .
- $E_\lambda(\varphi)$ est bien un s.e.v de E puisque c'est le noyau d'une application linéaire.
- Si λ est une valeur propre, on dit que $E_\lambda(\varphi)$ est l'**espace propre associé à la valeur propre λ** .

3.2 Précision en dimension finie

THÉORÈME

lien matrice et endomorphisme

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$, une base de E .

- Si on note**
- U la matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.
 - $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, la matrice de l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$.

Alors, u est vecteur propre de l'endomorphisme φ pour la valeur propre λ si et seulement si U est vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre λ .

Preuve. Nous avons vu au chapitre précédent que AU est la matrice colonne des coordonnées de $\varphi(u)$ dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi

$$AU = \lambda U \iff \varphi(u) = \lambda u.$$

Application. Soient A et B deux matrices semblables. Elles représentent le même endomorphisme φ dans des bases différentes. On retrouve alors

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(B) \quad (\text{voir exercice 4}).$$

PROPOSITION

caractérisations en dimension finie

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- i) Le réel λ est valeur propre de φ .
- ii) L'endomorphisme $\varphi - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injectif.
- iii) L'endomorphisme $\varphi - \lambda \text{id}_E$ n'est pas bijectif.
- iv) $\text{rg}(\varphi - \lambda \text{id}_E) < \dim E$.

Preuve. Raisonnons par équivalences. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$	$\iff$	$\exists u \in E \setminus \{0_E\}, \quad \varphi(u) = \lambda u$	
	$\iff$	$\exists u \in E \setminus \{0_E\}, \quad (\varphi - \lambda \text{id}_E)(u) = 0_E$	
	$\iff$	$\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_E) \neq \{0_E\}$	
	$\iff$	$\varphi - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injective	
	$\iff$	$\varphi - \lambda \text{id}_E$ n'est pas bijective	car $\varphi - \lambda \text{id}_E$ est un endomorphisme de dimension finie
	$\iff$	$\varphi - \lambda \text{id}_E$ n'est pas surjective	
	$\iff$	$\text{Im}(\varphi - \lambda \text{id}_E) \neq E$	
	$\iff$	$\text{rg}(\varphi - \lambda \text{id}_E) < \dim(E)$	car $\text{Im}(\varphi - \lambda \text{id}_E) \subset E$ avec égalité si et seulement s'il y a égalité des dimensions.

3.3 Précisions pour des endomorphismes remarquables

Les homothéties

Pour rappel, une homothétie de E de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est l'application

$$\lambda \text{ id}_E : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ u & \mapsto \lambda \cdot u. \end{cases}$$

- Le polynôme P d'expression $P(x) = x - \lambda$ est un polynôme annulateur de l'homothétie de rapport λ .
- Tout vecteur non nul de E est vecteur propre pour la valeur propre λ .

Exercice 8



♦♦♦ 🎵 🔑 La réciproque

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que tout vecteur non nul est vecteur propre de φ .
Montrer que φ est une homothétie.

p. 25

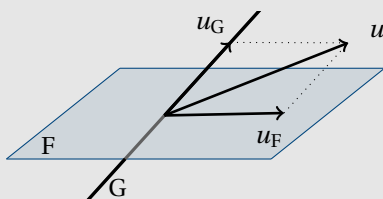
VP8

Les projecteurs

DÉFINITION (RAPPEL)

projecteur

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.



Ainsi pour tout $u \in E$, il existe une unique décomposition
 $u = u_F + u_G$ où $(u_F, u_G) \in F \times G$. On pose

$$p : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ u & \mapsto u_F. \end{cases}$$

Cette application est linéaire, elle est appelée le **projecteur** sur F parallèlement à G .

Remarque. On montre que p est un projecteur sur $F = \text{Im}(p)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(p)$. En particulier, le noyau et l'image d'un projecteur sont supplémentaires dans E .

$$\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E.$$

Exercice 9



1. Savez-vous prouver cette remarque?
2. Vérifier que $\text{id}_E - p$ est un projecteur. Préciser ses éléments caractéristiques.

p. ??

VP9

THÉORÈME

caractérisation d'un projecteur

Soit $p : E \rightarrow E$ une application. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) p est un projecteur.
- ii) p est linéaire et $p \circ p = p$.

Résultat admis.

Spectre d'un projecteur.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E de sorte que p soit le projecteur sur F parallèlement à G . Afin que F ou G ne soient pas réduits à $\{0_E\}$, on suppose dans la suite que $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p \neq \text{id}_E$.

- Pour tout $u \in F$ non nul, $p(u) = u$. Le vecteur u est donc vecteur propre pour la valeur propre 1.
Pour tout $u \in G$ non nul, $p(u) = 0_E$. Le vecteur u est donc vecteur propre pour la valeur propre 0. On a donc

$$\{0; 1\} \subset \text{Sp}(p).$$

Réciproquement, supposons que p admet une valeur propre λ associée à un vecteur propre u

$$p(u) = \lambda u \quad \text{puis} \quad p(p(u)) = \lambda^2 u.$$

Or on a aussi $p(p(u)) = p \circ p(u) = p(u) = \lambda u$. Comme u est non nul, $\lambda^2 = \lambda$ et $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. On a donc

$$\text{Sp}(p) \subset \{0; 1\}.$$

En résumé, par double-inclusion

$$\text{Sp}(p) = \{0; 1\}.$$

- Le polynôme d'expression $x^2 - x = x(x - 1)$ est un polynôme annulateur de p . Notons que les valeurs propres de p sont des racines du polynôme.
- D'après les résultats précédents sur les projecteurs,

$$F = \text{Im}(p) = E_1(p) \quad \text{et} \quad G = \text{Ker}(p) = E_0(p).$$

D'où

$$E = F \oplus G = E_1(p) \oplus E_0(p).$$

Autrement dit, E se décompose suivant les espaces propres de p .

Exercice 10



✧ Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On définit les applications :

$$p_a : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{1+a^2} (x + ay, ax + a^2 y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad q : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2} (x + y, x + y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Justifier que les applications p_a et q sont des projecteurs.
2. Vérifier que $(1, a)$ est vecteur propre de $p_a \circ q$.
3. En déduire l'unique valeur a pour laquelle $p_a \circ q$ est un projecteur.

p. 26

#VP10

Les symétries

Reprenons E , un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. On définit alors la symétrie par rapport à F parallèlement à G comme l'application :

$$s : u \in E \mapsto u_F - u_G \in E.$$

On montre que s est une application linéaire.

Exercice 11



♦ Les symétries

1. Faire un dessin similaire au cas des projecteurs pour illustrer la situation.
2. Préciser $s \circ s$. En déduire un polynôme annulateur.
3. On suppose que $s \neq \pm \text{id}_E$.
Étudier les valeurs propres de s et préciser les espaces propres à l'aide de F et G .
4. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G .
Vérifier que $s = 2p - \text{id}_E$. Retrouver les résultats de la question 3.

p. 26

#VP11

THÉORÈME

polynômes et valeurs propres

Soient $Q \in \mathbb{R}[x]$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Si u est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ ,
alors $Q(\varphi)(u) = Q(\lambda) \cdot u$.

Preuve. Par récurrence, on traite le cas des monômes $Q(x) = x^k$. Puis, par linéarité, on étend la relation à tous les polynômes. ■

Exercice 12



♦ Rédiger cette preuve précisément.

p. 26

VP12

COROLLAIRE

valeurs propres et racines

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} \rightarrow \lambda \text{ est valeur propre de } \varphi. \\ \rightarrow P \text{ est un polynôme annulateur de } \varphi. \end{cases}$

Alors λ est une racine du polynôme P .

Preuve. Soit u un vecteur propre associé à la valeur propre λ . D'après l'énoncé précédent

$$P(\varphi)(u) = P(\lambda)u.$$

Or, P est un polynôme annulateur de φ ,

$$P(\varphi)(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}(u) = 0_E.$$

Ainsi $P(\lambda)u = 0_E$, puis $P(\lambda) = 0$ car u est non nul (c'est un vecteur propre). En conclusion, λ est une racine de P . ■

Exemple. Soient E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Le polynôme d'expression x^p est annulateur de φ . Il ne peut avoir d'autre valeur propre que 0. De plus, φ ne peut être injectif, 0 est bien une valeur propre de φ . Finalement

$$\text{Sp}(\varphi) = \{0\}.$$

Remarques.

• On a des énoncés équivalents avec les matrices.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Q \in \mathbb{R}[x]$ et X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , alors

$$Q(A)X = Q(\lambda)X.$$

De plus, si Q est annulateur de A , λ est une racine de Q .

• La réciproque du corollaire est fausse. Une racine d'un polynôme annulateur n'est pas nécessairement une valeur propre. En effet, si P est annulateur de φ et $\alpha \notin \text{Sp}(\varphi)$, le polynôme d'expression $(x - \alpha)P(x)$ est encore un polynôme annulateur. Pour en savoir plus, on pourra consulter l'exercice 35, p. 19.

• Notons que le nombre de valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie est fini. En effet, nous avons vu en exercice qu'il existe toujours un polynôme annulateur P non nul de l'endomorphisme, il y a alors au plus $\deg(P)$ racines, au plus $\deg(P)$ valeurs propres.

Exercice 13



❖ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner un polynôme annulateur de φ de degré 2.
2. En déduire les valeurs propres de φ .

p. 27

VP13

5

Somme directe de sous-espaces propres

THÉORÈME

somme directe des espaces propres

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ désignent p valeurs propres deux à deux distinctes de φ ,

alors la somme $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\varphi)$ est directe.

Preuve par récurrence

Preuve. Justifions par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } (u_1, u_2, \dots, u_k) \in E_{\lambda_1}(\varphi) \times E_{\lambda_2}(\varphi) \times \dots \times E_{\lambda_k}(\varphi) \\ \sum_{j=1}^k u_j = 0_E \Rightarrow u_1 = \dots = u_k = 0_E. \end{array} \right.$$

→ **Initialisation.** La propriété $\mathcal{P}(1)$ est directement vraie.

→ **Hérédité.** Soit $k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$ et supposons $\mathcal{P}(k)$. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_{k+1}) \in E_{\lambda_1}(\varphi) \times E_{\lambda_2}(\varphi) \times \dots \times E_{\lambda_{k+1}}(\varphi)$ tels que

$$\sum_{j=1}^{k+1} u_j = 0_E \quad (L_1).$$

Par linéarité de φ , on obtient

$$0_E = \varphi(0_E) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{k+1} u_j\right) = \sum_{j=1}^{k+1} \varphi(u_j) = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j + \lambda_{k+1} u_{k+1} \quad (L_2)$$

On effectue ensuite $\lambda_{k+1} L_1 - L_2$ pour éliminer le terme en u_{k+1} et obtenir

$$\sum_{j=1}^k \underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_j)}_{\in E_{\lambda_j}(\varphi)} u_j = 0_E.$$

D'après $\mathcal{P}(k)$, on a

$$\forall j \in \llbracket 1; k \rrbracket, \quad (\lambda_{k+1} - \lambda_j) u_j = 0_E.$$

Par construction $\lambda_{k+1} \neq \lambda_j$, donc $u_j = 0_E$ pour tout $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$. Puis en reprenant L_1 , $u_{k+1} = 0_E$. Dès lors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

→ **Conclusion.** Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie. En particulier, on obtient l'énoncé avec $\mathcal{P}(p)$. ■

Preuve les polynômes de Lagrange

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts, il existe p polynômes, notés L_i , appartenant à $\mathbb{R}_{p-1}[x]$ tels que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 14



◆◆ ♪ Existence des polynômes de Lagrange

1. Prouver cet énoncé avec l'application linéaire

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}_{p-1}[x] & \rightarrow \mathbb{R}^p \\ P & \mapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_p)). \end{cases}$$

2. a) *Exemples*

p. 27

On suppose dans cette question uniquement que $p = 3$ et $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 1$.
Préciser les trois polynômes de Lagrange.

- b) Donner l'expression de L_i dans le cas général.

3. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$, $P(x) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) L_i$.

VP14

Preuve. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in E_{\lambda_1}(\varphi) \times E_{\lambda_2}(\varphi) \times \dots \times E_{\lambda_p}(\varphi)$ tel que

$$\sum_{j=1}^p u_j = 0_E \quad (\star)$$

Montrons que chaque u_j vaut 0_E pour justifier que la somme est directe.

Par définition des espaces propres, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$.

Soient $L_1, L_2, \dots, L_p$, les polynômes de Lagrange associés à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ (distincts deux à deux). Soit $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. Pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, d'après le théorème précédent

$$L_i(\varphi)(u_j) = L_i(\lambda_j) u_j = \delta_{i,j} \cdot u_j.$$

Puis par linéarité de l'application $L_i(\varphi)$,

$$L_i(\varphi) \left(\sum_{j=1}^p u_j \right) = \sum_{j=1}^p L_i(\varphi)(u_j) = \sum_{j=1}^p \delta_{i,j} \cdot u_j = u_i.$$

Or, par application de l'endomorphisme $L_i(\varphi)$ aux deux membres de l'égalité $(\star)$, on a aussi

$$L_i(\varphi) \left(\sum_{j=1}^p u_j \right) = L_i(\varphi)(0_E) = 0_E.$$

Il vient $u_i = 0_E$. Finalement, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $u_i = 0_E$. La somme $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\varphi)$ est directe. ■

COROLLAIRE

en dimension finie

Si on suppose de plus que E est de dimension finie, alors

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(\varphi)) \leq \dim(E).$$

Preuve. On sait que

$$\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\varphi) \subset E \quad \text{puis} \quad \dim \left(\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\varphi) \right) \leq \dim E.$$

Or la somme des sous-espaces propres est directe,

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(\varphi)) = \dim \left(\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\varphi) \right).$$

Le résultat s'en déduit. ■

COROLLAIRE

famille libre de vecteurs propres

Soit φ un endomorphisme de E .

Si les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ sont des vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres distinctes,
alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre de E .

Preuve. Soient $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_p u_p = 0_E.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\mu_i u_i \in E_{\lambda_i}(\varphi)$. Comme la somme $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(\varphi)$ est directe, par définition,

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \mu_i u_i = 0_E.$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, u_i est un vecteur propre. Il est donc non nul et $\mu_i = 0$. Finalement, la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre. ■

COROLLAIRE

majoration du nombre de valeurs propres

Soit φ un endomorphisme de E de dimension finie. Alors le nombre de valeurs propres de φ est inférieur ou égal à la dimension de l'espace :

$$\text{Card}(\text{Sp}(\varphi)) \leq \dim(E).$$

Preuve. Si λ est valeur propre de φ , $\dim(E_{\lambda}(\varphi)) \geq 1$. On a donc la minoration

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} \dim(E_{\lambda}(\varphi)) \geq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} 1 = \text{Card}(\text{Sp}(\varphi)).$$

D'où le résultat d'après le corollaire précédent en dimension finie. ■

Remarque. Matriciellement, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Card}(\text{Sp}(A)) \leq n.$$

On a vu, au début du cours, que 0, 1 et -2 sont trois valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On peut donc en déduire qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres. D'où l'égalité $\text{Sp}(A) = \{-2; 0; 1\}$.

6

Recherche de valeurs propres et vecteurs propres

Cette section détaille les différentes méthodes pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice. Elles sont essentiellement basées sur la méthode du pivot de Gauss.

6.1 Recherche des valeurs propres

Rappelons que :

- Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$.
- Le rang est invariant par transposition et opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Exemple. On pose $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Procédons par opérations élémentaires pour se ramener à un système triangulaire.

$$\begin{aligned}
 \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} && L_3 \leftrightarrow L_1 \\
 &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -\lambda & 2 & -1 \end{bmatrix} && \begin{aligned} L_3 &\leftarrow 2L_3 - \lambda L_1 \\ L_2 &\leftarrow 2L_2 + 3L_1 \end{aligned} \\
 &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 2-2\lambda & 3-3\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & \lambda^2 - \lambda - 2 \end{bmatrix} && \begin{aligned} C_2 &\leftarrow C_2/2 \\ &(\text{et factorisation}) \end{aligned} \\
 &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 3-3\lambda \\ 0 & 2-\lambda & (\lambda+1)(\lambda-2) \end{bmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\
 &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & (\lambda+1)(\lambda-2) \\ 0 & 1-\lambda & 3(1-\lambda) \end{bmatrix} && C_2 \leftarrow 3C_2 - C_3 \\
 \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & * & * \\ 0 & (2-\lambda)(\lambda+4) & * \\ 0 & 0 & 3(1-\lambda) \end{bmatrix} && \begin{aligned} &\text{Il est inutile de calculer} \\ &\text{les coefficients } *. \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Ainsi λ est valeur propre si et seulement si $\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$. C'est équivalent à

$$(2 - \lambda)(\lambda + 4) = 0 \quad \text{ou} \quad 3(1 - \lambda) = 0.$$

Finalement

$$\text{Sp}(A) = \{-4; 1; 2\}.$$

Remarques.

- Notez bien l'échange $L_3 \leftrightarrow L_1$ au début du pivot de Gauss. C'est particulièrement utile pour avoir un pivot qui ne dépend pas de λ .
- Si on dispose d'un polynôme annulateur de petit degré, on peut se limiter à regarder le rang sur les quelques racines du polynôme pour déterminer les valeurs propres.

6.2 Recherche des vecteurs propres

Expliquons maintenant comment calculer les vecteurs propres de la matrice A connaissant les valeurs propres.

- Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned}
 X \in E_1(A) &\iff \\
 AX = X &\iff \begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \\
 &\iff X = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff X \in \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Finalement

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Déterminons les autres sous-espaces propres.

- Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = 2X \iff \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = 4y \\ z = 2(y - x) \end{cases} \iff X = \begin{bmatrix} x \\ 3x/4 \\ -x/2 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right).$$

- Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = -4X \iff \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x = z. \end{cases}$$

On trouve

$$E_{-4}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Exercice 15



- ♦ Soient $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ et $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. On admet que $P(A) = 0_3$.

p. 27

1. Donner les racines de P . Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A ?
2. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre, déterminer une base du sous-espace propre associé.

#VP15

» Pour un autre exemple de calcul, voir exercice 30, p. 18.

6.3 Cas particulier de la dimension 2

PROPOSITION

lien avec le déterminant

Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \det(A - \lambda I_2) = 0.$$

Preuve. Raisonnons par équivalence

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\iff A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 16



- ♦ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$.

1. Donner, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, le nombre de valeurs propres réelles de R_α .
2. Retrouver le résultat précédent sachant que r_α , l'endomorphisme canoniquement associé à R_α , est une rotation de centre l'origine et d'angle α .

p. 28

#VP16



Exercices



Exercice 17. ♦♦ ♪ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d_1, \dots, d_n$, des réels deux à deux distincts. Posons $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Montrer que la famille $(D^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{D}_n$ des matrices diagonales. #VP17

>> Solution p. 28

Exercice 18. ♦♦ Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ dont un polynôme annulateur a pour expression $P(x) = x^2 + x - 2$. #VP18

- Justifier que φ est un isomorphisme et exprimer φ^{-1} en fonction de φ et id_E .
- ♣ Démontrer l'existence de deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^n = a_n \varphi + b_n \text{id}_E$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Énoncer la division euclidienne du polynôme x^n par $x^2 + x - 2$. Retrouver le résultat de la question précédente.

>> Solution p. 28

Exercice 19. ♦ Posons $\varphi : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (y + z, x + z, x + y) \in \mathbb{R}^3$. #VP19

- Écrire la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que le polynôme défini par $P(x) = x^2 - x - 2$ annule B .
 - En déduire que la matrice B est inversible et calculer B^{-1} .
- Justifier la bijectivité de φ et expliciter l'application φ^{-1} à l'aide de B .

>> Solution p. 29

Exercice 20. ♦♦♦ **Vecteur cyclique et polynôme annulateur** #VP20

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et φ un endomorphisme de E .

On dit qu'un vecteur $u \in E$ est cyclique pour φ s'il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $\mathcal{B}_{u, \ell} = (u, \varphi(u), \dots, \varphi^{\ell-1}(u))$ soit génératrice de E .

- ♣ Soit u , un vecteur cyclique pour φ . Montrer que $\mathcal{B}_{u, n}$ est une base de E .
- Justifier qu'il existe n réels notés $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ tels que $\varphi^n(u) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(u)$.
- Justifier que le polynôme d'expression $P(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ est annulateur de φ .

>> Solution p. 29

Exercice 21. ♦ ♣ Soient φ, ψ deux endomorphismes nilpotents de E . #VP21

Montrer que si φ, ψ commutent, alors la somme $\varphi + \psi$ est nilpotente.

Un endomorphisme φ est dit nilpotent s'il existe un entier p tel que $\varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (composée p -ième).

>> Solution p. 30

Exercice 22. ♦♦ Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E , admettant un polynôme annulateur de degré m . On note #VP22

$$G = \text{Vect}((f^i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}).$$

- Vérifier que pour tout entier $k \geq m$, $f^k \in G$.
- Soient $(g, h) \in G^2$. Montrer que $g \circ h \in G$. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^k \in G$.
- Montrer que g admet un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à m .

>> Solution p. 30

Exercice 23. ♦♦

d'après EDHEC 2016 #VP23

- Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - \text{id})^2 = 0$, où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
 - Déterminer $(f - \text{id})^2 + f \circ (2\text{id} - f)$.
 - En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (f - \text{id})^2(x) + (f \circ (2\text{id} - f))(x)$.
 - Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
- Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f , dont le degré est égal à p (avec $p \geq 2$), et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
 - Montrer qu'il existe p réels $a_1, \dots, a_p$ avec $a_1 \neq 0$, tels que $P(x) = a_1 x + \dots + a_p x^p$.
 - En déduire que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

c) En quoi cette question est-elle une généralisation de la première question?

>> Solution p. 31

Exercice 24. ♦♦♦ Commutant d'un endomorphisme cyclique, matrice compagnon

VP24

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n . On note $\mathcal{C}(\varphi)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec φ et $\mathbb{R}(\varphi)$ l'ensemble des polynômes en φ . Dit autrement

$$\mathcal{C}(\varphi) = \{\psi \in \mathcal{L}(E) \mid \psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}(\varphi) = \{P(\varphi) \mid P \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Enfin, on dit qu'un endomorphisme h de E est cyclique s'il existe un vecteur $u_0 \in E$ tel que la famille $(u_0, h(u_0), \dots, h^{n-1}(u_0))$ soit une base de E .

1. Montrer que $\mathcal{C}(\varphi)$ et $\mathbb{R}(\varphi)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$, puis que $\mathbb{R}(\varphi) \subset \mathcal{C}(\varphi)$.
2. Montrer que φ est cyclique si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E et des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Pour les questions suivantes, on suppose que l'endomorphisme φ est cyclique, et on fixe un vecteur $u_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (u_0, \varphi(u_0), \dots, \varphi^{n-1}(u_0))$ soit une base de E .

3. Soit $P(\varphi) = \varphi^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi^k$. Montrer que $P(\varphi) = 0$.

Indication : remarquer que $P(\varphi)(u_0) = 0$, puis montrer que $P(\varphi)(\varphi^\ell(u_0)) = 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.

4. a) Montrer que la famille $(\text{id}_E, \varphi, \dots, \varphi^{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}(\varphi)$.

Indication : utiliser la division euclidienne.

- b) En déduire que $\mathcal{C}(\varphi) = \mathbb{R}(\varphi)$, puis la dimension du commutant $\mathcal{C}(\varphi)$.

Indication : si $f \in \mathcal{C}(\varphi)$, exprimer $f(u_0)$ dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer $f(\varphi^i(u_0))$ pour $i \in \mathbb{N}$.

>> Solution p. 31

Exercice 25. Expliquez l'intérêt de la fonction Python suivante.

VP25

>> Solution p. 33

Editeur

```
import numpy as np

def bidule(A,x) : # A est une matrice carrée et x, un réel
    [n,p]=np.shape(A)
    if n!=p :
        print('Non, la matrice n est pas carrée ...')
    elif np.linalg.matrix_rank(A-x*np.eye(n))<n :
        print('Oui !!')
    else :
        print('Non !!')
```

Exercice 26. ♦ Vrai ou faux?

VP26

1. S'il existe une matrice carrée J telle que $A = J^2$ alors $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Si $\lambda \in \text{Sp}(A^2)$ alors $\sqrt{\lambda} \in \text{Sp}(A)$ ou $-\sqrt{\lambda} \in \text{Sp}(A)$.

✓ ×
✓ ×

>> Solution p. 33

Exercice 27. ♦ Un exemple détaillé : la matrice Attila

VP27

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Notons $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. a) Préciser le rang de J . En déduire que 0 est valeur propre dont on précisera la dimension de l'espace propre associé. Préciser une base $\mathcal{C}$ de l'espace propre associé à la valeur propre 0.
b) Calculer JX . Que peut-on en déduire?
2. En déduire que J ne possède que deux valeurs propres.

3. Montrer que J est semblable à une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.
4. Conclure en donnant tous les polynômes annulateurs de J .

>> Solution p. 33

Exercice 28. ♦ Transformation affine et spectre

VP28

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on pose

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix}.$$

1. Exprimer $M(a, b)$ à l'aide de I_n et J . En déduire le lien entre le spectre de J et celui de $M(a, b)$.
2. On a vu à l'exercice CA68 qu'il y a exactement 105 matrices non inversibles lorsque $a, b \in [-50; 50]$ et $n = 25$. Retrouver ce résultat sachant que J admet deux valeurs propres 0 et n (voir exercice précédent).

>> Solution p. 34

Exercice 29. ♦ Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par

VP29

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 6e_1 - 4e_2 + 4e_3 \\ \varphi(e_2) = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ \varphi(e_3) = -e_1 + 2e_2 + 2e_3. \end{cases}$$

Déterminer le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre 4.

>> Solution p. 34

Exercice 30. ♦

D'après EDHEC 2019 # VP30

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

>> Solution p. 34

1. a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
c) En Python, la commande `linalg.matrix_rank(M)` de la bibliothèque `numpy` renvoie le rang de la matrice M . On a saisi

Python a répondu

Editeur

```
import numpy as np
A = np.array([[1, 0, 0], [-2, 3, -2], [-1, 1, 0]])
r1=np.linalg.matrix_rank(A-np.eye(3))
r2=np.linalg.matrix_rank(A-2*np.eye(3))
print('r1=',r1,'r2=',r2)
```

Console

```
>>> # script executed
r1= 1 r2= 2
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés?

- d) Donner une base de chacun des noyaux $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id})$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
2. a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id})$ et (v_2) une base de $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petites possibles, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.
b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2) .

Exercice 31. ♦ Matrices stochastiques

VP31

Une matrice carrée $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite stochastique si elle vérifie les deux conditions :

- i) Pour tout $i \in [1, n]$, $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$.
- ii) Tous les coefficients de la matrice P sont positifs ou nuls.

1. Traduire la condition i) en termes de vecteur propre.
On pourra poser $X = {}^t(1, \dots, 1)$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques est une partie convexe stable par produit.
Une partie A est convexe si pour tous $a, b \in A$, tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda a + (1 - \lambda) b \in A$.
Une partie A est stable par produit si pour tous $a, b \in A$, $ab \in A$.
3. Démontrer que les valeurs propres réelles d'une matrice stochastique sont comprises entre -1 et 1 .

>> Pour aller plus loin, on pourra consulter le sujet EM Lyon 2010 ECS, problème I.

>> Solution p. 35

Exercice 32. ♦ Projecteurs et vecteurs propres

D'après Ecricome 2018 #VP32

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$ et que les matrices de u et v dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que u et v sont des projecteurs.
2. a) Vérifier que les endomorphismes u, v et $u \circ v$ sont tous de rang inférieur ou égal à 1.
b) Vérifier que le vecteur $x_0 = (1, a)$ est un vecteur propre de $u \circ v$.
c) Déterminer le spectre de $u \circ v$.
3. a) Montrer que les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.
b) Pour quelle(s) valeur(s) de a , $u \circ v$ est-il un projecteur?

>> Solution p. 36

Exercice 33. ♦ Crochet de Lie et nilpotence

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.
2. On considère

$$\varphi_B : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto MB - BM. \end{cases}$$

Vérifier que φ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Traduire la question 1 en terme de vecteur propre et valeur propre.
4. En déduire l'existence d'un entier k non nul tel que $A^k = 0_n$.

>> Solution p. 36

Exercice 34. ♦♦ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $\varphi(P) = (x-1)P'(x)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Préciser sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. En déduire le spectre de φ .
3. Soit P un vecteur propre de φ associé à une valeur propre λ non nulle.
a) Justifier que 1 est une racine de P .
b) En étudiant la multiplicité de 1 en tant que racine de P , exprimer P en fonction de λ .
4. Conclure en donnant tous les espaces propres de φ .

>> Solution p. 37

Exercice 35. ♦♦ Polynôme annulateur minimal

Questions sans préparation HEC 2015 #VP35

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E .

1. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Soit Q un polynôme tel que $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls annulateurs de f .
Montrer que toute racine de Q est valeur propre de f .

>> Solution p. 37

Exercice 36. ♦♦ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que λ est valeur propre de AB si et seulement si λ est valeur propre de BA .

>> Solution p. 37

Exercice 37. ♦♦ Soient E un espace vectoriel et φ, ψ deux endomorphismes de E .

1. Montrer que

$$\text{Sp}(\varphi \circ \psi) \cup \{0\} = \text{Sp}(\psi \circ \varphi) \cup \{0\}.$$

2. Vérifier que si E est de dimension finie, on a directement l'égalité

$$\text{Sp}(\varphi \circ \psi) = \text{Sp}(\psi \circ \varphi).$$

3. En considérant $\varphi : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto P' \in \mathbb{R}[x]$ et $\psi : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto \int_0^x P(t) dt$, tester si l'égalité précédente est encore vérifiée en dimension infinie.

>> Solution p. 38

Exercice 38. ♦♦ Exemple d'une matrice de rang 2

d'après ESCP 2001 #VP38

Soient n un entier naturel tel que $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

et φ l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- Déterminer une base du noyau de φ et une base de l'image de φ .
- En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .

>> Solution p. 38

Exercice 39. ♦♦♦ Matrice à diagonale dominante, localisation des valeurs propres réelles

#VP39

Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite à diagonale dominante si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|a_{i,i}| > |a_{i,1}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{i,n}|.$$

- Montrer qu'une matrice à diagonale dominante est inversible.

Indication. On pourra s'intéresser au noyau de la matrice.

- Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\text{Sp}(B) \subset \bigcup_{i=1}^n [b_{ii} - r_i, b_{ii} + r_i]$ où $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{i,j}|$.

- Exemple d'une matrice tridiagonale

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et A la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A , alors il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2 \cos(\theta)$.

>> Solution p. 38

Exercice 40. ♦♦♦

D'après les oraux HEC 2018 #VP40

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$.

- Démontrer que A et φ_A ont le même spectre.
- Justifier que pour toute valeur propre λ commune, $\dim E_\lambda(\varphi_A) = n \dim E_\lambda(A)$.

>> Solution p. 39

Exercice 41. ♦♦♦ On considère les deux matrices

Question sans préparation, HEC 2018 #VP41

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Comparer leurs spectres, leurs traces, leurs rangs, ainsi que les dimensions de leurs sous-espaces propres.
-  Sont-elles semblables?

Exercice 42. ♦♦ Exemple dans un espace fonctionnel

D'après EMLyon 2014 ECS #VP42

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, E_1 le sous-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note, pour tout élément f de E , $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt.$$

1. Établir que, pour tout élément f de E , $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(T(f))'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

On note $T : E \rightarrow E$ l'application qui, à f , associe $T(f)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E . Est-il surjectif?
3. Soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $s(t) = \sin(\pi t)$. Calculer $T(s)$. Est-ce que T est injectif?
4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^t - e^{-t}}{2t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose de plus $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax} \in \mathbb{R}$. Vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \varphi(a)f_a$.

5. Justifier que $[1; +\infty[\subset \text{Sp}(T)$. A-t-on égalité?

» Solution p. 40

Exercice 43. ♦♦ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

#VP44

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que $f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ est un projecteur.
2. Quelles sont les valeurs propres de f ?
3. Combien existe-t-il de droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?
4. Combien existe-t-il de plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

» Solution p. 40

Exercice 44. ♦♦ On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par

#VP59

$$\varphi : P \mapsto \varphi(P) \quad \text{avec} \quad \varphi(P)(x) = \int_0^1 tP(x-t) dt.$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Montrer que si $\varphi(P) = \lambda P$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\varphi(P') = \lambda P'$.
3. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ .

» Solution p. ??

Exercice 45. ♦♦ Matrice Compagnon

#VP60

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note id l'application identité de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On considère un n -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ et le polynôme :

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0.$$

La matrice compagnon C du polynôme P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice C .

1. **a)** Exprimer, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1} .
b) En déduire : $\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_{n-1} e_n)$.
2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1 f + a_0 \text{id}$.
a) Vérifier : $g(e_1) = (0, \dots, 0)$.
b) Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.
c) En déduire : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g(e_i) = (0, \dots, 0)$.
d) Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f . Que dire des valeurs propres de C ?
e) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.

>> Solution p. ??

Exercice 46. ♦♦ Exemple en dimension infinie

VP61

On note E l'espace vectoriel réel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'application φ de E dans E par :

$$\varphi(f) = g \quad \text{où} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad g(x) = x f'(x).$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
2. Est-il injectif? Préciser le noyau de φ . Est-il surjectif?
3. Déterminer le spectre de φ .

On pourra étudier $h : x \mapsto x^{-\lambda} f(x)$ où f est une fonction propre associée à la valeur propre λ .

>> Solution p. ??



Indications et solutions



Indication de l'exercice 1

p. 2

1. Que dire de la liberté de la famille si $p > \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Indication de l'exercice 3

p. 3

1. Si $A = Q^{-1}BQ$, montrer que pour $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(A) = Q^{-1}P(B)Q$.
 2. Écrire $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Isoler I_n dans $P(A) = 0_n$ pour trouver $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Indication de l'exercice 4

p. 5

Si $A = P^{-1}BP$ alors montrer que $X \in E_\lambda(A)$ si et seulement si $PX \in E_\lambda(B)$.

Indication de l'exercice 5

p. 5

1. Vrai, 2. Faux, 3. Vrai, 4. Faux, 5. Vrai.

Indication de l'exercice 6

p. 5

1. Calculer AX où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est la matrice constituée de 1.
 2. Pensez à la transposée.

Indication de l'exercice 7

p. 6

1. Montrer que 2 est la seule valeur propre de φ .
 2. Calculer $\psi(f_\lambda)$ où $f_\lambda : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda x}$.

Indication de l'exercice 8

p. 8

Détaillons les différentes étapes.

- a. Si $u \neq 0_E$, il existe un unique scalaire λ_u tel que $\varphi(u) = \lambda_u u$. Que dire si $u = 0_E$?
 b. Soit (u, v) une famille libre de vecteurs de E . Montrer que $\lambda_u = \lambda_v$ en considérant $u + v$.
 c. Conclure que φ est une homothétie.

Indication de l'exercice 14

p. 12

1. L'application φ est un isomorphisme. Pour le prouver, commencer par montrer que $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.

Indication de l'exercice 15

p. 15

1. Vérifier que 1 est une racine évidente. Factoriser ensuite par $(x - 1)$.

Indication de l'exercice 17

p. 16

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i D^i = 0_n.$$

Que dire de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ défini par $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x^k$?

Indication de l'exercice 18

p. 16

2. Procéder par récurrence avec les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n \\ b_{n+1} = 2a_n. \end{cases}$$

Indication de l'exercice 20

p. 16

Prouver par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \mathcal{B}_{u,k} \text{ est libre}$$

est vraie pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Indication de l'exercice 21

p. 16

Justifier qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\varphi^n = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad \psi^n = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Calculer ensuite $(\varphi + \psi)^{2n}$.

Indication de l'exercice 28

p. 18

1. Exprimer $M(a, b)$ avec a, b, J et I_n . En déduire que

$$\lambda \in \text{Sp}(J) \iff b\lambda + (a - b) \in \text{Sp}(M(a, b)).$$

Indication de l'exercice 31

p. 18

1. Calculer PX .

Indication de l'exercice 33

p. 19

1. Procéder par récurrence sur la propriété

$$\mathcal{P}(k) : A^k B - B A^k = k A^{k-1} B.$$

4. En dimension finie, tout endomorphisme a un nombre fini de valeurs propres.

Indication de l'exercice 34

p. 19

2. La matrice de φ dans la base canonique est triangulaire. Le spectre se lit sur la diagonale.

3.a) Évaluer en 1 la relation $\varphi(P) = \lambda P$.

3.b) Chercher P sous la forme $P(x) = (x - 1)^m Q(x)$.

Indication de l'exercice 35

p. 19

1. Étudier la liberté de la famille $(\text{id}_E, \varphi, \dots, \varphi^p)$ pour un entier p bien choisi.

2. Raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Q(\alpha) = 0$ et $\alpha \notin \text{Sp}(f)$. Introduire ensuite $\tilde{Q}$ par $\tilde{Q}(x)(x - \alpha) = Q(x)$.

Indication de l'exercice 41

p. 20

2. Non. Calculer A^2 et B^2 .

Indication de l'exercice 36

p. 19

Soit $\lambda \in \text{Sp}(AB)$ et X un vecteur propre associé à λ . Simplifier $(BA)(BX)$ pour montrer que $\lambda \in \text{Sp}(BA)$.

Exercice 1

p. 2

VP1

On sait que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.

Or, la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ contient $n^2 + 1$ éléments. La famille est donc liée. Dit autrement, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k A^k = 0_n \quad \text{et} \quad (\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \neq (0, \dots, 0).$$

On constate que le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k x^k$ est un polynôme annulateur non nul de A . Résumons :

Toute matrice admet un polynôme annulateur non nul.

Remarque. Le raisonnement précédent permet aussi de justifier que tout endomorphisme de dimension finie admet un polynôme annulateur. Par contre, c'est faux en dimension infinie. On montre que $\varphi : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto P' \in \mathbb{R}[x]$ n'admet pas de polynôme annulateur.

Exercice 2

p. 2

VP2

1. Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on sait que $\deg P' \leq \deg P - 1$.

Par récurrence immédiate,

$$\varphi^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

C'est-à-dire $\varphi^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x])}$.

Un polynôme annulateur de φ est donné par le monôme

$$x^{n+1}.$$

2. Vérifier que $(x-1)^{n+1}$ convient.

Exercice 3

p. 3

VP3

1. Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible telle que $A = QBQ^{-1}$. Par récurrence, on prouve

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = QB^kQ^{-1}.$$

Puis, par linéarité, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$

$$P(A) = QP(B)Q^{-1}.$$

Ensuite, Q étant inversible

$$P(A) = 0_n \iff P(B) = 0_n.$$

Les matrices A et B ont les mêmes polynômes annulateurs.

2. Posons $P(x) = \sum_{i=0}^p a_i x^i$. La condition $P(0) \neq 0$ donne $a_0 \neq 0$. Comme P est annulateur

$$\begin{aligned} 0_n = P(A) &= \sum_{i=0}^p a_i A^i = a_0 A^0 + \sum_{i=1}^p a_i A^i \\ &= a_0 I_n + A \left(\sum_{i=1}^p a_i A^{i-1} \right) \\ &= a_0 I_n + A \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} A^k \right). \end{aligned}$$

$$\text{Puis} \quad A \left(-\frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} A^k \right) = \left(-\frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} A^k \right) A = I_n.$$

Par définition de l'inversibilité,

La matrice A est inversible.

Exercice 4

p. 5

VP4

- Posons $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible telle que $A = P^{-1}BP$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(A) &\iff AX = \lambda X \\ &\iff P^{-1}BPX = \lambda X \\ &\iff B(PX) = \lambda(PX) \\ &\iff PX \in E_\lambda(B) \end{aligned}$$

L'application suivante est alors bien définie :

$$\Phi : \begin{cases} E_\lambda(A) & \rightarrow & E_\lambda(B) \\ X & \mapsto & PX. \end{cases}$$

Or, on vérifie que cette application est linéaire et même bijective avec pour application réciproque :

$$\Phi^{-1} : \begin{cases} E_\lambda(B) & \rightarrow & E_\lambda(A) \\ X & \mapsto & P^{-1}X. \end{cases}$$

En particulier, les dimensions de l'espace de départ et d'arrivée coïncident

$$\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B).$$

- Puis, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\iff \dim E_\lambda(A) \geq 1 \\ &\iff \dim E_\lambda(B) \geq 1 \\ &\iff \lambda \in \text{Sp}(B). \end{aligned}$$

C'est-à-dire $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$.

Exercice 5

p. 5

VP5

1. Vrai.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$. D'où

$$A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X.$$

Comme $X \neq 0_{n,1}$, X est vecteur propre de A^2 pour la valeur propre λ^2 . On a bien $\lambda^2 \in \text{Sp}(A^2)$.

2. Faux.

On a bien $(-1)^2 = 1 \in \text{Sp}(I_n)$ mais $-1 \notin \text{Sp}(I_n)$.

3. Vrai.

Raisonnons par équivalence. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\iff A - \lambda I_n \text{ est non inversible} \\ &\iff {}^t(A - \lambda I_n) \text{ est non inversible} \\ &\iff {}^tA - \lambda I_n \text{ est non inversible} \\ &\iff \lambda \in \text{Sp}({}^tA). \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Sp}(A) = \text{Sp}({}^tA)$.

4. Faux.

Vérifier que la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pour la valeur propre 0 donne un contre-exemple.

5. Vrai.

Le rang est invariant par transposition donc

$$\text{rg}(A - \lambda I_n) = \text{rg}({}^tA - \lambda I_n).$$

Par la formule du rang

$$\dim \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \dim \text{Ker}({}^tA - \lambda I_n).$$

C'est-à-dire $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda({}^tA)$.

6. Vrai.

Nous avons précédemment vu que si A est inversible, 0 ne peut être valeur propre. Il n'y a donc pas de difficulté à considérer λ^{-1} .

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \quad AX = \lambda X \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \quad \lambda^{-1}X = A^{-1}X \end{aligned}$$

en multipliant par $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$. Finalement

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \lambda^{-1} \in \text{Sp}(A^{-1}).$$

Exercice 8

p. 8

VP8

On suppose donc que pour tout $u \in E$, il existe $\lambda_u \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(u) = \lambda_u u$. Ce réel λ_u est même unique pour tout

vecteur u non nul. Justifions que pour tous $u, v \in E$ (non nuls) $\lambda_u = \lambda_v$.

Par linéarité de φ

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) = \lambda_u u + \lambda_v v.$$

Or, on a aussi

$$\varphi(u + v) = \lambda_{u+v}(u + v) = \lambda_{u+v}u + \lambda_{u+v}v.$$

• Si les vecteurs u et v sont non colinéaires, la famille (u, v) est libre. L'égalité

$$\lambda_u u + \lambda_v v = \lambda_{u+v}u + \lambda_{u+v}v$$

impose $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$.

• Si les vecteurs u et v sont colinéaires (il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mu v$). Dans ce cas,

$$\lambda_u u = \varphi(u) = \varphi(\mu v) = \mu \varphi(v) = \mu \lambda_v v = \lambda_v \cdot (\mu v) = \lambda_v u.$$

Pour $u \neq 0_E$, $\lambda_u = \lambda_v$.

• En résumé, le réel λ_u est indépendant de $u \in E \setminus \{0_E\}$, on le note simplement λ . Comme $\varphi(0_E) = 0_E = \lambda 0_E$, on a bien

$$\forall u \in E, \quad \varphi(u) = \lambda u.$$

L'endomorphisme φ est une homothétie.

Donnons maintenant une preuve plus courte dans le cas de la dimension finie.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Par hypothèse sur l'application φ , il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \varphi(e_i) = \lambda_i e_i.$$

De plus, pour $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ fixés, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(e_i + e_j) = \mu(e_i + e_j) = \mu e_i + \mu e_j.$$

Or par linéarité de φ , on a aussi

$$\varphi(e_i + e_j) = \varphi(e_i) + \varphi(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j.$$

D'où l'égalité

$$\mu e_i + \mu e_j = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$$

$$\text{Puis} \quad (\mu - \lambda_i)e_i + (\mu - \lambda_j)e_j = 0_E.$$

La famille $\mathcal{B}$ étant une base de E , (e_i, e_j) est une famille libre

$$\mu - \lambda_i = 0, \quad \mu - \lambda_j = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda_i = \lambda_j.$$

On démontre ainsi que λ_i est indépendant de i , soit λ cette valeur commune.

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \varphi(e_i) = \lambda e_i.$$

Comme cette égalité est vraie sur une base de E et φ est linéaire, on a bien

$$\varphi = \lambda \text{id}_E.$$

Précisons que $\lambda \neq 0$ car φ n'est pas l'application nulle.

Exercice 10

p. 9

VP10

1. On vérifie que p_a est bien une application linéaire.
Vérifions que $p_a \circ p_a = p_a$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (p_a \circ p_a)(x, y) &= \frac{1}{1+a^2} p_a(x+ay, ax+a^2y) \\ &= \frac{1}{1+a^2} (x+ay+a(ax+a^2y), a(x+ay)+a^2(ax+a^2y)) \\ &= \frac{1}{1+a^2} ((1+a^2)x+(1+a^2)ay, (1+a^2)(ax+a^2y)) \\ &= (x+ay, ax+a^2y) = p_a(x, y). \end{aligned}$$

En conclusion, p_a est un projecteur.
Comme $q = p_1$, q est aussi un projecteur.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculons :

$$\begin{aligned} (p_a \circ q)(1, a) &= p_a(q(1, a)) = \frac{1}{2} p_a(1+a, 1+a) \\ &= \frac{1}{2(1+a^2)} (1+a+a(1+a), a(1+a)+a^2(1+a)) \\ &= \frac{1}{2(1+a^2)} (1+2a+a^2, a(1+2a+a^2)) \\ &= \frac{1}{2(1+a^2)} ((1+a)^2, (1+a)^2 a) \\ &= \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} (1, a) \quad \text{donc } \lambda = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}. \end{aligned}$$

3. Si $p_a \circ q$ est un projecteur, on sait que

$$\lambda = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \in \{0; 1\}.$$

Le cas $\lambda = 0$ est impossible puisqu'on se limite à a positif.
Pour le second cas,

$$\begin{aligned} \lambda = 1 &\iff \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} = 1 \iff (1+a)^2 = 2(1+a^2) \\ &\iff 0 = 1-2a+a^2 \iff 0 = (1-a)^2. \end{aligned}$$

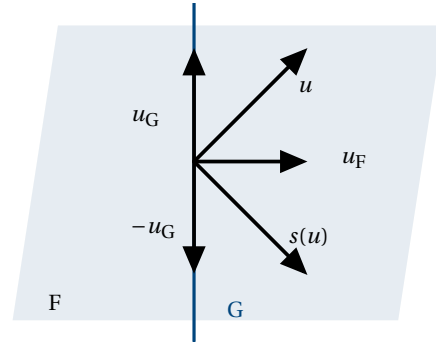
On constate que seul $a = 1$ est un candidat.
Or pour $a = 1$, $p_a = q$ et $p_a \circ q = q \circ q = q$. En conclusion, $p_a \circ q$ est un projecteur si et seulement si $a = 1$.

Exercice 11

p. 9

VP11

- 1.



2. On a $s \circ s = \text{id}_E$.

Le polynôme $P(x) = x^2 - 1$ est annulateur de s .

3. Soit $\lambda \in \text{Sp}(s)$. Il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $s(x) = \lambda x$. Puis

$$s(s(x)) = s(\lambda x) = \lambda s(x) = \lambda^2 x.$$

Or on a aussi $s(s(x)) = x$. Comme x est non nul, $\lambda^2 = 1$ et $\lambda = \pm 1$. Ainsi

$$\text{Sp}(s) \subset \{-1; 1\}.$$

Réciproquement, pour tout $x \in F \setminus \{0_E\}$, $s(x) = x$ et $1 \in \text{Sp}(s)$ et pour $x \in G \setminus \{0_E\}$, $s(x) = -x$ et $-1 \in \text{Sp}(s)$. On a donc

$$\{-1; 1\} \subset \text{Sp}(s).$$

En résumé

$$\text{Sp}(s) = \{-1; 1\}.$$

On a aussi $E_1(s) = F$ et $E_{-1}(s) = G$.

4. Soit $u \in E$.

$$\begin{aligned} (2p - \text{id}_E)(u) &= 2p(u) - u \\ &= 2(u_F) - (u_F + u_G) \\ &= u_F - u_G = s(u). \end{aligned}$$

Ce calcul étant valable pour u arbitrairement choisi

$$2p - \text{id}_E = s.$$

On a alors

$$\lambda \in \text{Sp}(p) \iff 2\lambda - 1 \in \text{Sp}(s).$$

Comme $\text{Sp}(p) = \{0; 1\}$, on retrouve $\text{Sp}(s) = \{-1; 1\}$.

Exercice 12

p. 10

VP12

- Prouvons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{P}(k) : \varphi^k(u) = \lambda^k u$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

→ Initialisation. Par convention $\varphi^0 = \text{id}_E$ et

$$\varphi^0(u) = \text{id}_E(u) = u = \lambda^0 u.$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

→ Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie.

$$\begin{aligned} \varphi^{k+1}(u) &= \varphi^k(\varphi(u)) = \varphi^k(\lambda u) \\ &= \lambda \varphi^k(u) = \lambda \cdot \lambda^k u \end{aligned}$$

$$\varphi^{k+1}(u) = \lambda^{k+1} u.$$

Ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

→ Conclusion. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

- Traitons le cas général d'un polynôme $Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

$$\begin{aligned} Q(\varphi)(u) &= \left(\sum_{k=0}^n a_k \varphi^k \right)(u) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \varphi^k(u) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \cdot u \\ &= \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) \cdot u \\ Q(\varphi)(u) &= Q(\lambda) \cdot u. \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 13

p. 11

VP13

1. Le polynôme $x^2 - 1$ convient car pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$${}^t(M) - M = 0_n.$$

2. D'après ce qui précède, -1 et 1 sont racines du polynôme annulateur $x^2 - 1$ et donc potentielles valeurs propres. Or, on constate que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (resp. -1) correspond à l'ensemble non réduit à $\{0\}$ des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Ainsi 1 et -1 sont bien valeurs propres :

$$\{-1; +1\} = \text{Sp}(\varphi).$$

Exercice 14

p. 12

VP14

1. Vérifier que φ est linéaire.

Soit $P \in \text{Ker } \varphi$.

$$(P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_p)) = (0, 0, \dots, 0).$$

Autrement dit, les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont racines de P . Or ce dernier est de degré au plus $p - 1$. Avec au moins p racines, c'est le polynôme nul. Ainsi

$$\text{Ker } \varphi = \{0_{\mathbb{R}_{p-1}[x]}\}.$$

L'application φ est injective. De plus

$$\dim \mathbb{R}_{p-1}[x] = \dim \mathbb{R}^p.$$

On peut affirmer que c'est un isomorphisme.

- 2.a) On trouve

$$L_1(x) = \frac{x(x-1)}{2}, \quad L_2(x) = -x^2 + 1, \quad L_3(x) = \frac{x(x+1)}{2}.$$

- 2.b) Pour $i \in \llbracket 0; p \rrbracket$,

$$L_i(x) = \frac{1}{\alpha_i} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p (x - \lambda_k) \quad \text{où } \alpha_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p (\lambda_i - \lambda_k).$$

3. Plusieurs rédactions possibles :

Rédaction 1

Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$. On pose

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n P(\lambda_i) L_i(x).$$

En remarquant que pour tout indice i ,

$$L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

On montre que $\varphi(P) = \varphi(Q)$. Par injectivité de φ , $P = Q$. Ce qui conclut.

Rédaction 2

Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$. On pose

$$Q(x) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) L_i(x).$$

On vérifie que $P - Q$ admet p racines données par les λ_i . Or ce polynôme a un degré qui n'excède pas $p - 1$, c'est donc le polynôme nul. D'où $P = Q$.

Exercice 15

p. 15

VP15

1. Le réel 1 est une racine évidente. Effectuons une division euclidienne pour obtenir la factorisation.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x - 1 \\ \hline x^2(x - 1) & x^2 - x - 6 \\ -x^2 - 5x + 6 & \\ \hline -x(x - 1) & \\ -6x + 6 & \end{array}$$

$$\text{D'où} \quad P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6).$$

Comme -2 est aussi racine (ou avec un calcul de discriminant), on obtient finalement

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3).$$

Les racines de P sont -2 , 1 et 3 . On a donc

$$\text{Sp}(A) \subset \{-2; 1; 3\}.$$

2. Vérifier par le calcul qu'on si l'on pose

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Alors} \quad E_1(A) = \text{Vect}(X), \quad E_{-2}(A) = \text{Vect}(Y)$$

$$\text{et} \quad E_3(A) = \text{Vect}(Z).$$

$$\text{En particulier} \quad \text{Sp}(A) = \{-2; 1; 3\}.$$

Exercice 16

p. 15

VP16

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det(R_\alpha - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{pmatrix} \\ = (\cos(\alpha) - \lambda)^2 + \sin(\alpha)^2.$$

La matrice $R_\alpha - \lambda I_2$ est non inversible si et seulement si

$$\underbrace{(\cos(\alpha) - \lambda)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\sin(\alpha)^2}_{\geq 0} = 0.$$

Chaque terme est nul

$$\begin{cases} \cos(\alpha) - \lambda = 0 \\ \sin(\alpha) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \cos(\alpha) = \pm 1 \\ \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Finalement,

$$\text{Sp}(R_\alpha) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } \alpha = 2k\pi \\ -1 & \text{si } \alpha = (2k+1)\pi. \end{cases}$$

Exercice 17

p. 16

VP17

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k D^k = 0_n.$$

En regardant le coefficient en position (i, i) , il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k d_i^k = 0.$$

On introduit le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x^k$ de sorte que $d_1, d_2, \dots, d_n$ soient racines de P . Or P est de degré au plus $n-1$, P est le polynôme nul. Ses coefficients sont nuls

$$\forall k \in [0; n-1], \quad \lambda_k = 0.$$

La famille $(D^k)_{k \in [0; n-1]}$ est libre. Comme elle contient $n = \dim(\mathcal{D}_n)$ vecteurs, c'est une base de $\mathcal{D}_n$.

Exercice 18

p. 16

VP18

1. Par définition du polynôme annulateur,

$$\varphi^2 + \varphi - 2\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Dès lors

$$\varphi \circ \varphi + \varphi = 2\text{id}_E$$

On obtient :

$$\varphi \circ \left(\frac{1}{2}(\text{id}_E + \varphi) \right) = \text{id}_E, \quad \left(\frac{1}{2}(\text{id}_E + \varphi) \right) \circ \varphi = \text{id}_E.$$

Par la caractérisation des applications bijectives, φ est bijective avec $\varphi^{-1} = \frac{1}{2}(\text{id}_E + \varphi)$.

2. Essayons au brouillon de trouver ces suites $(a_n)_n, (b_n)_n$. Si de telles suites existent alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^n = a_n \varphi + b_n \text{id}_E.$$

En particulier, pour $n = 0$,

$$\text{id}_E = \varphi^0 = a_0 \varphi + b_0 \text{id}_E.$$

On s'attend à $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1} &= \varphi \circ \varphi^n = \varphi \circ (a_n \varphi + b_n \text{id}_E) \\ &= a_n \varphi^2 + b_n \varphi = a_n (2\text{id}_E - \varphi) + b_n \varphi \\ &= (b_n - a_n) \varphi + 2a_n \text{id}_E. \end{aligned}$$

Cela suggère $a_{n+1} = b_n - a_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$.

Rédigeons :

On définit les suites a et b par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n \\ b_{n+1} = 2a_n. \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \varphi^n = a_n \varphi + b_n \text{id}_E$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Par définition de a_0, b_0 ,

$$a_0 \varphi + b_0 \text{id}_E = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \varphi^0 = \text{id}_E.$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1} &= \varphi \circ \varphi^n \underset{\mathcal{P}(n)}{=} \varphi \circ (a_n \varphi + b_n \text{id}_E) \\ &= a_n \varphi^2 + b_n \varphi = a_n (2\text{id}_E - \varphi) + b_n \varphi \\ &= (b_n - a_n) \varphi + 2a_n \text{id}_E \\ \varphi^{n+1} &= a_{n+1} \varphi + b_{n+1} \text{id}_E. \end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q, R \in \mathbb{R}[x]$ tels que

$$(\star) : x^n = (x^2 + x - 2)Q(x) + R(x)$$

$$\text{avec } \deg(R) < \deg(x^2 + x - 2) = 2.$$

Le polynôme R est donc de degré au plus 1. Il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$R(x) = a_n x + b_n.$$

En évaluant en φ , la relation $(\star)$

$$\varphi^n = \underbrace{(\varphi^2 + \varphi - 2\text{id}_E)}_{0_{\mathcal{L}(E)}} \circ Q(\varphi) + R(\varphi).$$

Finalement, il existe bien deux réels a_n, b_n tels que

$$\varphi^n = R(\varphi) = a_n \varphi + b_n \text{id}_E.$$

Exercice 19

p. 16

VP19

1. On a

$$\begin{aligned}\varphi((1,0,0)) &= (0,1,1) \\ \varphi((0,1,0)) &= (1,0,1) \\ \varphi((0,0,1)) &= (1,1,0).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.a) On a

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad -B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad -2I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

On a bien $B^2 - B - 2I_3 = 0_3$.

$$x^2 - x - 2 \text{ est annulateur de } B.$$

2.b) On a aussi :

$$B(B - I_3) = B^2 - B = 2I_3.$$

$$\text{Donc } B\left(\frac{1}{2}(B - I_3)\right) = I_3 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{2}(B - I_3)\right)B = I_3.$$

B est donc inversible et

$$B^{-1} = \frac{1}{2}(B - I_3) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Comme B est inversible, φ est un isomorphisme. On lit sur la matrice B^{-1} ,

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}((1,0,0)) &= \frac{1}{2}(-1,1,1) \\ \varphi^{-1}((0,1,0)) &= \frac{1}{2}(1,-1,1) \\ \varphi^{-1}((0,0,1)) &= \frac{1}{2}(1,1,-1).\end{aligned}$$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(x, y, z) &= \varphi^{-1}(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) \\ &= x\varphi^{-1}(1,0,0) + y\varphi^{-1}(0,1,0) + z\varphi^{-1}(0,0,1).\end{aligned}$$

Après simplifications, on trouve :

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{2}(-x + y + z, x - y + z, x + y - z).$$

Exercice 20

p. 16

VP20

1. Prouvons par récurrence que la propriété

$\mathcal{P}(k)$: « la famille $\mathcal{B}_{u,k}$ est une famille libre »

est vraie pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

→ *Initialisation.* $\mathcal{P}(1)$ est vraie car u ne peut être nul.

→ *Hérédité.* Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie, montrons $\mathcal{P}(k+1)$. C'est-à-dire, montrons que la famille

$$(u, \varphi(u), \dots, \varphi^k(u))$$

est libre. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i \varphi^i(u) = 0_E.$$

Prouvons que $\lambda_k = 0$ en raisonnant par l'absurde. Si $\lambda_k \neq 0$, alors

$$\varphi^k(u) = - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \varphi^i(u) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k}).$$

En appliquant φ , on a aussi

$$\begin{aligned}\varphi^{k+1}(u) &= \sum_{i=0}^{k-1} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) \varphi^{i+1}(u) \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{k-2} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) \varphi^{i+1}(u)}_{\in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k})} + \underbrace{\left(-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right) \varphi^k(u)}_{\in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k})}.\end{aligned}$$

Puis $\varphi^{k+1}(u) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k})$.

Par récurrence, pour tout $p \geq k$

$$\varphi^p(u) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k}).$$

Or, le vecteur u est cyclique, on montre alors que

$$E = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,\ell}) = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,k}).$$

Absurde, on a trouvé une famille génératrice de E avec strictement moins d'éléments que la dimension de E . Donc $\lambda_k = 0$.

Enfin, par liberté de la famille $\mathcal{B}_{u,k}$ pour tout $i \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$, $\lambda_i = 0$. La famille $\mathcal{B}_{u,k+1}$ est libre. Ce qui prouve $\mathcal{P}(k+1)$.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

En particulier, la famille $\mathcal{B}_{u,n}$ est libre. Comme elle contient autant de vecteurs que la dimension de E , c'est une base de E .

2. C'est une conséquence du fait que $\varphi^n(u) \in E$ et la famille $\mathcal{B}_{u,n}$ est une base de E (donc génératrice de E).

3. Par définition

$$\varphi^n(u) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(u).$$

Soit $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned}\varphi^n(\varphi^j(u)) &= \varphi^j(\varphi^n(u)) \\ &= \varphi^j\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(u)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^j(\varphi^i(u)) \quad (\text{linéarité}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(\varphi^j(u)) \quad (\text{commutativité}).\end{aligned}$$

En résumé, l'égalité

$$\varphi^n(v) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(v)$$

a été vérifiée pour tout vecteur d'une base de E . Par linéarité, elle s'étend à tout vecteur de E . D'où

$$\varphi^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i, \quad \text{puis} \quad \varphi^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Le polynôme $P(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ est annulateur de φ .

Exercice 21

p. 16

VP21

- Par définition, il existe $p_1, p_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\varphi^{p_1} = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad \psi^{p_2} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Pour tout entier $k \geq p_1$

$$\varphi^k = \varphi^{p_1} \circ \varphi^{k-p_1} = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ \varphi^{k-p_1} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

De même, pour $k \geq p_2$, $\psi^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

En particulier pour $n = \max\{p_1, p_2\}$,

$$\varphi^n = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad \psi^n = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

- Ensuite, d'après la formule du binôme de Newton avec φ et ψ qui commutent

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \varphi^k \circ \psi^{2n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \underbrace{\varphi^k \circ \psi^{2n-k}}_{0_{\mathcal{L}(E)}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} \underbrace{\varphi^k}_{0_{\mathcal{L}(E)}} \circ \psi^{2n-k}.\end{aligned}$$

En effet, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $2n - k \geq n$ et

$$\psi^{2n-k} = 0_{\mathcal{L}(E)},$$

pour $k \in \llbracket n+1; 2n \rrbracket$ $\varphi^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Dès lors $(\varphi + \psi)^{2n} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

La somme $\varphi + \psi$ est nilpotente.

Remarque. Si φ et ψ ne commutent pas, le résultat n'est plus valable. Donnons un contre-exemple matriciel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{nilpotente}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{nilpotente}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{inversible}}.$$

Or, une matrice nilpotente ne peut être inversible.

Exercice 22

p. 16

VP22

- Démontrons par récurrence que la propriété $f^k \in G$ est vraie pour tout entier $k \geq m$.

→ *Initialisation.* Soit $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ un polynôme annulateur de f de degré m . Alors

$$P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{donc} \quad a_m f^m = - \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k.$$

P étant de degré m , $a_m \neq 0$, donc $f^m = \frac{-1}{a_m} \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k \in G$.

La propriété est vraie au rang m .

→ *Hérédité.* Soit $k \geq m$. On suppose que $f^k \in G$. Donc il existe $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ tel que $f^k = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^i$. Alors,

$$f^{k+1} = f^k \circ f = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^{i+1} = a_{m-1} \underbrace{f^m}_{\in G} + \sum_{i=0}^{m-2} \alpha_i \underbrace{f^{i+1}}_{\in G}.$$

On en déduit que $f^{k+1} \in G$ puisque G est stable par combinaison linéaire en tant que sous-espace vectoriel. Donc, si $f^k \in G$, alors $f^{k+1} \in G$.

→ *Conclusion.*

$$\forall k \geq m, \quad f^k \in G.$$

- Considérons $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ et $(\beta_i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ tels que

$$g = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^i \quad \text{et} \quad h = \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i f^i.$$

Par linéarité de g $g \circ h = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket^2} \alpha_i \beta_j \underbrace{f^{i+j}}_{\in G}.$

D'où $g \circ h \in E$ car G est stable par combinaison linéaire.

On en déduit alors, par récurrence que,

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad g^k \in G.$$

- La famille $(f^i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ est une génératrice de G , donc G est de dimension finie et

$$\dim(G) \leq m.$$

Alors $(g^i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ est une famille d'éléments de G et $\text{Card}((g^i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}) > \dim(G)$. Donc cette famille est liée. Il existe des réels $(\beta_i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^m \beta_i g^i = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

$$Q(x) = \sum_{i=0}^m \beta_i x^i \text{ est annulateur de } g \text{ avec } \deg(Q) \leq m.$$

Exercice 23

p. 16

VP23

1.a) Comme f et id commutent

$$\begin{aligned}(f - \text{id})^2 &= f^2 - 2\text{id} \circ f + \text{id}^2 \\ &= f^2 - 2f + \text{id} \\ &= -f \circ (2\text{id} - f) + \text{id}.\end{aligned}$$

Ainsi $(f - \text{id})^2 + f \circ (2\text{id} - f) = \text{id}$.

1.b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a d'après la relation précédente

$$(f - \text{id})^2(x) + (f \circ (2\text{id} - f))(x) = \text{id}(x) = x.$$

1.c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Comme $f \circ (f - \text{id})^2 = 0$, on a

$$(f - \text{id})^2(x) \in \text{Ker } f.$$

De plus en posant $y = (2\text{id} - f)(x)$, on a

$$(f \circ (2\text{id} - f))(x) = f(y) \in \text{Im } f.$$

En reprenant la relation de la question 1.a), on a bien

$$\begin{aligned}x &\in \text{Ker } f + \text{Im } f \\ \text{puis } \mathbb{R}^n &= \text{Ker } f + \text{Im } f.\end{aligned}$$

Or, par la formule du rang

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^n.$$

Ce qui donne bien le résultat.

2.a) D'après la formule de Taylor dans le cas polynomial

$$\begin{aligned}P(x) &= \sum_{k=0}^p \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{car } P(0) = 0.\end{aligned}$$

le résultat s'en déduit en posant

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

avec $a_1 = P'(0) \neq 0$.

2.b) Soit $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$. Il existe donc $z \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = f(z).$$

Or P est annulateur

$$a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_p f^p = 0.$$

Évalué en z , il vient

$$a_1 f(z) + a_2 f^2(z) + \dots + a_p f^p(z) = 0_{\mathbb{R}^n} \quad (\bullet)$$

Or $f(z) = x$, et pour $i \geq 2$

$$\begin{aligned}f^i(z) &= f^{i-2} \circ f(f(z)) \\ &= f^{i-2}(f(x)) = f^{i-2}(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}.\end{aligned}$$

La relation $(\bullet)$ se réduit à $a_1 x = 0_{\mathbb{R}^n}$ puis $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ car $a_1 \neq 0$.
Finalement

$$\text{Ker } f \cap \text{Im } f \subset \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

et l'égalité est automatique car l'intersection est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, il contient $0_{\mathbb{R}^n}$.

• L'égalité

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$$

est une conséquence directe de l'égalité précédente et de la formule du rang.

2.c) Il suffit de prendre

$$P(x) = x(x-1)^2$$

car $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

Exercice 24

p. 17

VP24

1. • On a $\mathcal{C}(\varphi) \subset \mathcal{L}(E)$.

L'application nulle $0_{\mathcal{L}(E)}$ commute avec tout endomorphisme de E donc en particulier avec φ . Ainsi $\mathcal{C}(\varphi) \neq \emptyset$.

Soient $f, g \in \mathcal{C}(\varphi)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g) \circ \varphi &= \lambda f \circ \varphi + \mu g \circ \varphi \\ &= \lambda \varphi \circ f + \mu \varphi \circ g \quad (\text{car } f, g \in \mathcal{C}(\varphi)) \\ (\lambda f + \mu g) \circ \varphi &= \varphi \circ (\lambda f + \mu g).\end{aligned}$$

Dès lors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}(\varphi)$.

• On a $\mathcal{R}(\varphi) \subset \mathcal{L}(E)$.

Si P désigne le polynôme $P(x) = x$, alors $\varphi = P(\varphi)$ puis $\mathcal{R}(\varphi) \neq \emptyset$.

Enfin pour $P(\varphi), Q(\varphi) \in \mathcal{R}(\varphi)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\lambda P(\varphi) + \mu Q(\varphi) = \underbrace{(\lambda P + \mu Q)}_{\in \mathbb{R}[x]}(\varphi) \in \mathcal{R}(\varphi).$$

On en déduit que $\mathcal{C}(\varphi)$ et $\mathcal{R}(\varphi)$ sont bien des sous-espaces de $\mathcal{L}(E)$.

• Comme tout polynôme en φ commute avec φ .

$$\mathcal{R}(\varphi) \subset \mathcal{C}(\varphi).$$

Plus précisément si $P(\varphi) \in \mathcal{R}(\varphi)$ avec $P = \sum_{k=0}^p a_k x^k$

$$\begin{aligned}P(\varphi) \circ \varphi &= \sum_{k=0}^p a_k \varphi^k \circ \varphi = \sum_{k=0}^p a_k \varphi \circ \varphi^k \\ &= \varphi \circ \left(\sum_{k=0}^p a_k \varphi^k \right) = \varphi \circ P(\varphi).\end{aligned}$$

2. Si φ est cyclique, alors dans une base

$$\mathcal{B} = (u_0, \varphi(u_0), \dots, \varphi^{n-1}(u_0)) = (e_1, \dots, e_n),$$

on a

$$\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \quad \varphi(e_i) = \varphi(\varphi^{i-1}(u_0)) = \varphi^i(u_0) = e_{i+1}$$

et $\varphi(e_n) = \varphi^n(u_0) \in E$

donc il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(e_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} e_i.$$

On constate que la base $\mathcal{B}$ donne bien :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ soit de la forme proposée. Alors pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

$$\varphi(e_i) = e_{i+1}.$$

Par récurrence, on a

$$\begin{aligned} e_1 \\ e_2 &= \varphi(e_1) \\ e_3 &= \varphi(e_2) = \varphi^2(e_1) \\ &\vdots \\ e_k &= \varphi(e_{k-1}) = \varphi^{k-1}(e_1) \\ &\vdots \\ e_n &= \varphi(e_{n-1}) = \varphi^{n-1}(e_1) \end{aligned}$$

La base $\mathcal{B}$ est bien de la forme

$$(e_1, \varphi(e_1), \varphi^2(e_1), \dots, \varphi^{n-1}(e_1)).$$

L'endomorphisme φ est cyclique.

3. Par construction $P(\varphi)(u_0) = 0_E$ car

$$\varphi^n(u_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi^k(u_0).$$

• Soit $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} P(\varphi)(\varphi^i(u_0)) &= P(\varphi) \circ \varphi^i(u_0) \\ &= \varphi^i \circ P(\varphi)(u_0) \quad (\text{question 1}) \\ &= \varphi^i(P(\varphi)(u_0)) \\ &= \varphi^i(0_E) = 0_E \quad (\varphi^i \text{ est linéaire}). \end{aligned}$$

• L'endomorphisme $P(\varphi)$ s'annule sur tout vecteur d'une base (ici $\mathcal{B} = (u_0, \varphi(u_0), \dots, \varphi^{n-1}(u_0))$), c'est donc l'endomorphisme nul. Le polynôme P est bien annulateur de φ .

4.a) Famille génératrice

Soit $g \in \mathcal{R}(\varphi)$. Il existe $A \in \mathbb{R}[x]$ tel que $g = A(\varphi)$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe $Q, R \in \mathbb{R}[x]$ tels que

$$A = PQ + R \text{ avec } \deg R < \deg P = n.$$

En particulier

$$\begin{aligned} A(\varphi) &= P(\varphi) \cdot Q(\varphi) + R(\varphi) \\ &= 0_{\mathcal{L}(E)} + R(\varphi). \end{aligned}$$

Ainsi $g = R(\varphi)$. Comme $\deg R < n$, on peut écrire $R = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ et

$$g = R(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k \in \text{Vect}(\text{id}_E, \varphi, \dots, \varphi^{n-1}).$$

On en déduit l'inclusion

$$\mathcal{R}(\varphi) \subset \text{Vect}(\text{id}_E, \varphi, \dots, \varphi^{n-1}).$$

Comme l'inclusion réciproque est claire, on a même égalité entre ces deux espaces. Dit autrement, la famille $(\text{id}_E, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{n-1})$ est génératrice de $\mathcal{R}(\varphi)$.

• Liberté

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \varphi^i = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On évalue en u_0 pour obtenir

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \varphi^i(u_0) = 0_E.$$

Or on a supposé que la famille

$$\mathcal{B} = (u_0, \varphi(u_0), \dots, \varphi^{n-1}(u_0))$$

est une base de E . En particulier, la famille $\mathcal{B}$ est libre et chaque coefficient λ_i est nul. On en déduit que la famille $(\text{id}_E, \varphi, \dots, \varphi^{n-1})$ est libre. En conclusion, la famille $(\text{id}_E, \varphi, \dots, \varphi^{n-1})$ est une base de $\mathcal{R}(\varphi)$.

4.b) On a déjà une première inclusion

$$\mathcal{R}(\varphi) \subset \mathcal{C}(\varphi)$$

Justifions l'inclusion réciproque.

Soit $f \in \mathcal{C}(\varphi)$. Il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$f(u_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi^i(u_0)$$

car $\mathcal{B} = (u_0, \varphi(u_0), \dots, \varphi^{n-1}(u_0))$ est une base de E . Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} f(\varphi^k(u_0)) &= \varphi^k(f(u_0)) \quad (\text{car } f \in \mathcal{C}(\varphi)) \\ &= \varphi^k\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi^i(u_0)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi^{i+k}(u_0) \\ f(\varphi^k(u_0)) &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi^i(\varphi^k(u_0)). \end{aligned}$$

Si on introduit le polynôme $A = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$, on constate que pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

$$f(\varphi^k(u_0)) = A(f)(\varphi^k(u_0)).$$

Cette égalité est vraie pour tout vecteur d'une base, elle s'étend à tout vecteur de E . En effet pour $u \in E$, il existe $\mu_0, \dots, \mu_{n-1}$ tels que

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \varphi^i(u_0)$$

puis

$$\begin{aligned} A(\varphi)(u) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i A(\varphi)(\varphi^i(u_0)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i f(\varphi^i(u_0)) = f\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \varphi^i(u_0)\right) \\ A(\varphi)(u) &= f(u). \end{aligned}$$

Ainsi $f = A(\varphi) \in \mathcal{R}(\varphi)$. L'inclusion réciproque est prouvée. Finalement

$$\mathcal{C}(\varphi) = \mathcal{R}(\varphi).$$

En particulier

$$\dim \mathcal{C}(\varphi) = \dim \mathcal{R}(\varphi) = n.$$

Exercice 25

p. 17

VP25

La fonction **bidule** prend en argument une matrice carrée A et un réel x et teste si x est une valeur propre pour A .

Exercice 26

p. 17

VP26

La première assertion est fausse. Considérer la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

pour un contre-exemple.

2. C'est vrai. Soit X un vecteur propre de A^2 pour λ

$$A^2 X = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

D'où

$$(A - \sqrt{\lambda} I_n)(A + \sqrt{\lambda} I_n)X = (A^2 - \lambda I_n)X = 0$$

Comme X est non nul, $(A - \sqrt{\lambda} I_n)(A + \sqrt{\lambda} I_n)$ n'est pas inversible. Nécessairement $A - \sqrt{\lambda} I_n$ ou $A + \sqrt{\lambda} I_n$ n'est pas inversible. Autrement dit $\sqrt{\lambda} \in \text{Sp}(A)$ ou $-\sqrt{\lambda} \in \text{Sp}(A)$.

Exercice 27

p. 17

VP27

1.a) Comme

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n \neq \{0_{n,1}\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \text{rg}(J) &= \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_n) \\ &= \dim \text{Vect}(C_1) \\ \text{rg}(J) &= 1. \end{aligned}$$

La matrice J n'est pas inversible, 0 est valeur propre et la formule du rang donne :

$$\text{rg}(J) + \dim E_0(J) = n.$$

D'où

$$\dim E_0(J) = n - 1.$$

Une base de $E_0(J)$ est donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

En effet, ces vecteurs forment une famille libre de vecteurs de $E_0(J)$ et il y en a autant que la dimension.

1.b) On a $X \neq 0_{n,1}$ et

$$JX = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} = nX.$$

On en déduit que n est une valeur propre de J .

2. Rédaction 1. On a vu à la question 1 que

$$\{0; n\} \subset \text{Sp}(J).$$

Prouvons l'égalité en raisonnant par l'absurde. Soit λ une troisième valeur propre de J ($\lambda \neq 0, \lambda \neq n$). On sait alors que $E_0(J)$, $E_n(J)$ et $E_\lambda(J)$ sont en somme directe et

$$E_0(J) \oplus E_n(J) \oplus E_\lambda(J) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

implique

$$\underbrace{\dim E_0(J)}_{=n-1} + \underbrace{\dim E_n(J)}_{\geq 1} + \underbrace{\dim E_\lambda(J)}_{\geq 1} \leq n.$$

Absurde. Il y a exactement deux valeurs propres à J .

Rédaction 2. Le polynôme

$$x^2 - nx = x(x - n)$$

est annulateur de J . Comme le spectre est inclus dans l'ensemble des racines

$$\text{Sp}(J) \subset \{0; n\}.$$

On a même égalité d'après la question précédente.

3. Comme $E_0(J)$ et $E_n(J)$ sont en somme directe et

$$\dim E_0(J) + \dim E_n(J) = n,$$

on a

$$E_0(J) \oplus E_n(J) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Soit φ , l'endomorphisme canoniquement associé à J et $\mathcal{B}$, une base associée à la décomposition

$$E_0(\varphi) \oplus E_n(\varphi) = \mathbb{R}^n.$$

Si on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

$$\varphi(e_i) = 0_E \quad \text{et} \quad \varphi(e_n) = ne_n.$$

On en déduit que

$$K = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{bmatrix}.$$

Les matrices J et K représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, par la formule de changement de bases, J et K sont semblables.

4. On constate que $K^2 - nK = 0_n$. Comme K et J ont même polynôme annulateur (détail à question 1 de l'exercice 3, VP3) :

$$J^2 - nJ = 0.$$

Notons $\mathcal{P}_J$ l'ensemble des polynômes annulateur de J. On prouve par double inclusion que

$$\mathcal{P}_J = \left\{ (x^2 - nx) Q(x) \mid Q \in \mathbb{R}[x] \right\}.$$

Exercice 28

p. 18

VP28

1. On a

$$M(a, b) = bJ + (a - b)I_n.$$

Justifions que

$$\lambda \in \text{Sp}(J)$$

$$\iff \lambda b + (a - b) \in \text{Sp}(M(a, b)).$$

Rédaction 1.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le résultat est clair pour $b = 0$. Pour $b \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{rg}(J - \lambda I_n) &= \text{rg}(b(J - \lambda I_n)) \\ &= \text{rg}(bJ - \lambda bI_n) \\ &= \text{rg}(bJ + (a - b)I_n - (\lambda b + (a - b))I_n) \\ &= \text{rg}(M(a, b) - (\lambda b + (a - b))I_n). \end{aligned}$$

En particulier

$$\text{rg}(J - \lambda I_n) < n \text{ ssi } \text{rg}(M(a, b) - (\lambda b + (a - b))I_n) < n.$$

d'où le résultat.

Rédaction 2.

Soit $\lambda \in \text{Sp}_p(J)$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$JX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} M(a, b)X &= bJX + (a - b)X \\ &= b\lambda X + (a - b)X \\ M(a, b)X &= (b\lambda + (a - b))X. \end{aligned}$$

D'où

$$b\lambda + (a - b) \in \text{Sp}(M(a, b)).$$

On procède de même pour la réciproque en isolant le cas $b = 0$.

2. La matrice $M(a, b)$ est non inversible si et seulement si

$$0 \in \text{Sp}(M(a, b)).$$

Or le calcul précédent donne deux valeurs propres à $M(a, b)$:

$$a - b \quad \text{et} \quad bn + (a - b).$$

Donc $M(a, b)$ est non inversible si et seulement si :

$$a = b \quad \text{ou} \quad -a = (n - 1)b = 24b.$$

- Il y a 101 couples $(a, b) \in \llbracket -50; 50 \rrbracket^2$ tels que $a = b$.
- Il y a 5 couples qui vérifient la seconde condition :

$$(0; 0), \quad (-24; 1), \quad (-48; 2), \quad (24; -1), \quad (48; -2).$$

- Seul $(0; 0)$ vérifie les deux conditions en même temps.

Au total, on compte 105 couples solutions distincts.

Exercice 29

p. 18

VP29

Notons A la matrice de φ dans la base canonique :

$$A = \text{Mat}_{\text{can}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Puis} \quad A - 4I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

On constate

$$C_1 - 2C_2 = 0 \quad \text{et} \quad C_2 + C_3 = 0.$$

Le rang de la matrice $A - 4I_3$ est 1, la dimension du noyau est donc 2 et

$$E_4(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

En revenant à l'endomorphisme φ :

$$E_4(\varphi) = \text{Vect}(u, v)$$

avec $u = (1, -2, 0)$ et $v = (0, 1, 1)$.

Exercice 30

p. 18

VP30

- 1.a) Vérifier que $A^2 = 3A - 2I_3$. Un polynôme annulateur est alors

$$P(x) = x^2 - 3x + 2.$$

- 1.b) Toute valeur propre de A est racine de P. Or, le polynôme P de degré 2 admet deux racines.

$$\text{Sp}(A) \subset \{1; 2\}.$$

1.c) Le code Python donne

$$\operatorname{rg}(A - I_3) = 1 < 3 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 2 < 3.$$

Ce calcul confirme que 1 et 2 sont bien valeurs propres de A :

$$\operatorname{Sp}(A) = \{1; 2\}.$$

Par l'intermédiaire de la formule du rang,

$$\dim E_1(A) = 3 - \operatorname{rg}(A - I_3) = 2 \quad \text{et} \quad \dim E_2(A) = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 1.$$

D'où

$$\dim E_1(f) = 2 \quad \text{et} \quad \dim E_2(f) = 1.$$

La résolution du système $AX = X$ donne

$$E_1(f) = \{(y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$$

$$\text{avec} \quad u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (-1, 0, 1).$$

Comme u_1 et u_2 sont non colinéaires, ils forment une base de $E_1(f)$.

De même, on trouve

$$E_2(f) = \{(0, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(w), \quad w = (0, 2, 1).$$

Le vecteur w étant non nul, (w) est une base de $E_2(f)$.

1.d) Les calculs précédents donnent

$$\dim E_1(f) + \dim E_2(f) = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

De plus, les espaces propres sont en somme directe. D'où

$$E_1(f) \oplus E_2(f) = \mathbb{R}^3.$$

Si $\mathcal{B}$ désigne une base adaptée à la décomposition précédente, la matrice de f dans cette base est diagonale.

2.a) Une solution est donnée par

$$(u_1, v_1, v_2) = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 1)).$$

On a bien

$$u_1 \in E_1(f),$$

$$v_1 = u_1 + u_2 \in E_1(f) \quad \text{et} \quad v_2 \in E_2(f).$$

2.b) Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2) . Par définition,

$$x = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot v_1 + \lambda_3 \cdot v_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = b \\ \lambda_2 + \lambda_3 = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_3 = -a + b - c \\ \lambda_2 + \lambda_3 = c \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 - L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = a - b + 2c \\ \lambda_3 = -a + b - c. \end{cases}$$

Exercice 31

p. 18

VP31

1. La condition i) se traduit par $PX = X$.

X est vecteur propre pour la valeur propre 1.

2. Soient P_1, P_2 deux matrices stochastiques

$$(P_1 P_2)X = P_1 (P_2 X) = P_1 X = X,$$

donc le produit $P_1 P_2$ vérifie la condition i).

Prouvons la condition ii). Notons $[M]_{ij}$ le coefficient de la matrice M en position (i, j) . Par définition du produit matriciel

$$[P_1 P_2]_{ij} = \sum_{k=1}^n \underbrace{[P_1]_{ik}}_{\geq 0} \underbrace{[P_2]_{kj}}_{\geq 0} \geq 0.$$

La matrice $P_1 P_2$ vérifie la seconde condition.

La matrice $P_1 P_2$ qui est donc une matrice stochastique.

$\mathcal{E}$ est stable par produit.

• Soient P_1, P_2 stochastiques et $\lambda \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} (\lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2)X &= \lambda P_1 X + (1 - \lambda)P_2 X \\ &= \lambda X + (1 - \lambda)X = X. \end{aligned}$$

$\lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2$ vérifie la condition i). De plus, la condition ii) est claire puisque :

$$[\lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2]_{ij} = \lambda [P_1]_{ij} + (1 - \lambda) [P_2]_{ij} \geq 0$$

car $\lambda \in [0; 1]$. Ainsi la matrice $\lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2$ est stochastique. Concluons

$\mathcal{E}$ est une partie convexe.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre associée à une matrice stochastique P . Notons Y , un vecteur propre. Précisons les coefficients avec

$$P = (p_{ij})_{i,j \in \llbracket 1; n \rrbracket} \quad \text{et} \quad Y = (y_j)_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket}.$$

La relation $PY = \lambda Y$ donne

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} y_j = \lambda y_i.$$

D'après l'inégalité triangulaire et la condition i)

$$\begin{aligned} |\lambda y_i| &\leq \sum_{j=1}^n |p_{ij} y_j| \leq \sum_{j=1}^n \left(p_{ij} \cdot \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |y_j| \right) \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} \right) \cdot \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |y_j| = \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |y_j|. \end{aligned}$$

En particulier, pour un indice i_0 réalisant le maximum

$$|y_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |y_j|,$$

on a

$$|\lambda| \cdot |y_{i_0}| \leq |y_{i_0}|.$$

Comme la matrice Y est non nulle (c'est un vecteur propre) $|y_{i0}| \neq 0$ et par division, il vient $|\lambda| \leq 1$. On obtient le résultat demandé.

Exercice 32

p. 19

VP32

1. Vérifier par le calcul que

$$A^2 = A \quad \text{et} \quad B^2 = B.$$

Dès lors, les applications linéaires u et v vérifient

$$u \circ u = u \quad \text{et} \quad v \circ v = v.$$

On sait alors que

$$u \text{ et } v \text{ sont des projecteurs.}$$

2.a) Notons C_1 et C_2 les deux colonnes de A . On a

$$C_2 = aC_1 \quad \text{et} \quad C_1 \neq 0_{2,1}.$$

La matrice A est de rang 1.

Comme B est un cas particulier de A (prendre $a = 1$), B est aussi de rang 1.

De plus, on calcule

$$AB = \frac{1}{2(1+a^2)} \begin{bmatrix} 1+a & 1+a \\ a+a^2 & a+a^2 \end{bmatrix}.$$

Les deux colonnes sont identiques (et non nulles pour $a \neq -1$)

$$\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(AB) \leq 1.$$

2.b) Posons le calcul matriciel

$$\begin{aligned} AB \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} &= \frac{1}{2(1+a^2)} \begin{bmatrix} 1+a+a+a^2 \\ a+a^2+a^2+a^3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1+2a+a^2}{2(1+a^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} \\ &= \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire $x_0 \neq (0, 0)$ et

$$(u \circ v)(x_0) = \lambda_a x_0 \quad \text{avec} \quad \lambda_a = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}.$$

2.c) Comme $u \circ v$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, de dimension 2, il ne peut avoir plus de deux valeurs propres.

→ 0 est valeur propre puisque $u \circ v$ n'est pas bijectif (de rang 1).

→ λ_a est aussi valeur propre d'après le calcul précédent.

Si $a \neq -1$, $\lambda_a \neq 0$ et il y a exactement deux valeurs propres distinctes

$$\text{Sp}(u \circ v) = \{0; \lambda_a\}.$$

Si $a = -1$, on constate que $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ et

$$\text{Sp}(u \circ v) = \{0\}.$$

Remarque. On peut regrouper les résultats avec

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \text{Sp}(u \circ v) = \{0; \lambda_a\}.$$

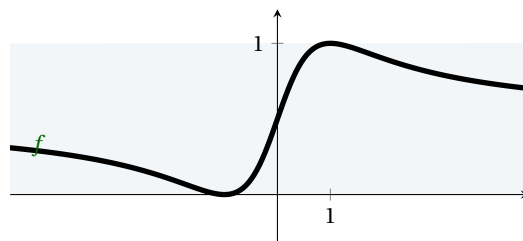
3.a) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par f

$$f(x) = \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}.$$

La fonction est rationnelle, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations et la courbe



Surtout, on vérifie que

$$\lambda_a = f(a) \in \text{Im}(f) \subset [0; 1].$$

D'où le résultat.

3.b) Si $u \circ v$ est un projecteur alors son spectre est inclus dans $\{0; 1\}$. On impose donc

$$\lambda_a = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_a = 1.$$

En reprenant l'étude de fonction,

$$a = -1 \quad \text{ou} \quad a = 1.$$

Si $a = -1$, $u \circ v$ est l'application nulle. C'est un projecteur (sur $\{0\}$) parallèlement à $\mathbb{R}^2$.

Si $a = 1$, $u = v$ et $u \circ v = u^2 = u$ est un projecteur. En résumé

$$u \circ v \text{ est un projecteur si et seulement si } a = \pm 1.$$

Exercice 33

p. 19

VP33

1. Raisonnons par récurrence sur la propriété

$$\mathcal{P}(k): \quad A^k B - B A^k = k A^k.$$

→ Initialisation. $\mathcal{P}(0)$ est clairement vraie.

→ Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie, démontrons $\mathcal{P}(k+1)$

$$\begin{aligned} A^{k+1} B - B A^{k+1} &= A(A^k B) - (B A) A^k \\ &= A(k A^k + B A^k) - (A B - A) A^k \\ A^{k+1} B - B A^{k+1} &= k A^{k+1} + A^{k+1} \\ &= (k+1) A^{k+1}. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

→ Conclusion. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\varphi_B(\lambda M_1 + \mu M_2) &= (\lambda M_1 + \mu M_2)B - B(\lambda M_1 + \mu M_2) \\ &= \lambda(M_1 B - B M_1) + \mu(M_2 B - B M_2) \\ &= \lambda \varphi_B(M_1) + \mu \varphi_B(M_2).\end{aligned}$$

L'application φ_B est linéaire. Comme l'espace de départ s'identifie à celui d'arrivée, on a un endomorphisme.

3. Si A^k est non nul, A^k est un vecteur propre de φ_B pour la valeur propre k .

4. Raisonnons par l'absurde. Supposons donc que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \neq 0_n$. D'après la question précédente, tout $k \in \mathbb{N}$ est valeur propre de φ_B . Absurde, φ_B est un endomorphisme de dimension finie, le nombre de valeur propre est fini. Concluons : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$.



Sur ce thème, on pourra regarder cette vidéo
Cassou Maths Prépa : MERVEILLEUX CLASSIQUE

Exercice 34

p. 19

VP34

1. • La dérivation étant linéaire, φ l'est aussi. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\varphi(P)$ reste un polynôme et

$$\deg P' < \deg P, \quad \deg((x-1)'P(x)) < \deg P + 1,$$

on a $\deg(\varphi(P)) \leq \deg(P) \leq n$.

On a bien $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.

L'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

• De plus $\varphi(1) = 0$ et pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\varphi(x^k) = (x-1)kx^{k-1} = kx^k - kx^{k-1}.$$

La matrice de φ dans la base canonique est alors

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & -n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

2. La matrice A est triangulaire avec une diagonale constituée de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Ainsi

$$\text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(A) = \llbracket 0; n \rrbracket.$$

3.a) On a $\varphi(P) = \lambda P$, c'est-à-dire

$$(x-1)P'(x) = \lambda P(x) \quad (\bullet)$$

En évaluant en 1, on obtient $0 = \lambda P(1)$ puis $P(1) = 0$ puisqu'on a supposé $\lambda \neq 0$. Le réel 1 est racine de P .

3.b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, la multiplicité de 1 comme racine de P . Il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tels que

$$P(x) = (x-1)^m Q(x) \quad \text{et} \quad Q(1) \neq 0.$$

La relation $(\bullet)$ devient

$$(x-1) \left(m(x-1)^{m-1} Q(x) + (x-1)^m Q'(x) \right) = \lambda (x-1)^m Q(x)$$

puis

$$(x-1)^m (mQ(x) + (x-1)Q'(x)) = \lambda (x-1)^m Q(x).$$

Comme le polynôme $(x-1)^m$ est non nul, on a simplement

$$mQ(x) + (x-1)Q'(x) = \lambda Q(x).$$

Il vient $(\lambda - m)Q(x) = (x-1)Q'(x)$.

Comme $Q(1) \neq 0$, en évaluant en $x = 1$, on obtient $m = \lambda \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et Q est le polynôme constant. En résumé

$$P(x) = \text{Cste} \cdot (x-1)^\lambda \quad \text{avec} \quad \text{Cste} \neq 0.$$

On vérifie que tout polynôme de ce type est vecteur propre pour la valeur propre λ .

4. D'après ce qui précède, pour tout $\lambda \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$E_\lambda(\varphi) = \left\{ \alpha(x-1)^\lambda \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left((x-1)^\lambda \right).$$

Notons que cette égalité s'étend à $\lambda = 0$. Il y a $n+1$ sous-espaces propres, tous de dimension 1.

Exercice 35

p. 19

VP35

1. L'espace $\mathcal{L}(E)$ est de dimension $p = \dim(E)^2$. La famille $(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^p)$ contenant $p+1$ éléments est donc liée. Il existe donc $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ tels que

$$\sum_{i=0}^p a_i f^i = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad (a_0, \dots, a_p) \neq 0_{\mathbb{R}^{p+1}}.$$

Le polynôme non nul $P(x) = \sum_{i=0}^p a_i x^i$ est un polynôme annulateur de f .

2. Raisonnons par l'absurde en supposant que Q admet une racine réelle α qui ne soit pas une valeur propre de f . Soit $\tilde{Q} \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\tilde{Q}(x)(x-\alpha) = Q(x)$. On a donc

$$\tilde{Q}(f) \circ (f - \alpha \text{id}_E) = Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Comme $\alpha \notin \text{Sp}(f)$, $f - \alpha \text{id}_E$ est un endomorphisme de dimension finie bijectif. $(f - \alpha \text{id}_E)^{-1}$ a un sens et

$$\tilde{Q}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ (f - \alpha \text{id}_E)^{-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On en déduit que $\tilde{Q}$ est annulateur de f . Absurde, car

$$\deg \tilde{Q} < \deg Q$$

et Q est, par hypothèse, un polynôme annulateur de degré minimal. En conclusion, toute racine de Q est valeur propre de f .

Exercice 36

p. 19

VP36

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \in \text{Sp}(AB)$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nulle telle que $ABX = \lambda X$. En multipliant à gauche par B , on obtient

$$(BA)(BX) = B(ABX) = B(\lambda X) = \lambda(BX).$$

→ Si BX est non nulle, BX est vecteur propre pour la valeur propre λ et $\lambda \in \text{Sp}(BA)$.

→ Si BX est nulle, on a alors $\lambda X = A \cdot 0 = 0$. Comme X est non nulle, $\lambda = 0$. Dans ce cas la matrice AB n'est pas inversible. On montre* que BA ne l'est pas non plus, $\lambda = 0 \in \text{Sp}(BA)$. En résumé, pour $\lambda \in \text{Sp}(AB)$, $\lambda \in \text{Sp}(BA)$ c'est-à-dire

$$\text{Sp}(AB) \subset \text{Sp}(BA).$$

Par symétrie, on a l'inclusion dans l'autre sens, puis l'égalité par double-inclusion.

★ Détaillons ce passage.

Montrons par l'absurde que BA ne peut être inversible. En effet, si BA est inversible, il existe une matrice C telle que

$$(BA)C = I_n \quad \text{et} \quad C(BA) = I_n.$$

On peut réécrire ces relations sous la forme

$$B(AC) = I_n \quad \text{et} \quad (CB)A = I_n.$$

La matrice B est donc inversible à droite et A , inversible à gauche. Or, les notions d'inversibilité à gauche et à droite pour des matrices carrées sont équivalentes à l'inversibilité. Donc A et B sont inversibles. Par produit AB est aussi inversible, ce qui est exclu.

Exercice 37

p. 19

VP37

1. Soit $\lambda \in \text{Sp}(\varphi \circ \psi) \setminus \{0\}$. Il existe donc $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que

$$\varphi \circ \psi(x) = \lambda x \quad (\bullet)$$

En appliquant ψ , il vient

$$\psi \circ \varphi(\psi(x)) = \psi \circ \varphi \circ \psi(x) = \lambda \psi(x)$$

Précisons que $\psi(x) \neq 0_E$. En effet si $\psi(x) = 0$, on en déduirait avec $(\bullet)$ que $\lambda = 0$. Cas exclu par hypothèse. On a donc vérifié que $\psi(x)$ est vecteur propre de $\psi \circ \varphi$ pour la valeur propre λ . D'où

$$\lambda \in \text{Sp}(\psi \circ \varphi).$$

En rajoutant 0,

$$\text{Sp}(\varphi \circ \psi) \cup \{0\} \subset \text{Sp}(\psi \circ \varphi) \cup \{0\}.$$

Par symétrie, on a l'inclusion réciproque

$$\text{Sp}(\varphi \circ \psi) \cup \{0\} \supset \text{Sp}(\psi \circ \varphi) \cup \{0\}.$$

Puis l'égalité

$$\text{Sp}(\varphi \circ \psi) \cup \{0\} = \text{Sp}(\psi \circ \varphi) \cup \{0\}.$$

2. Voir exercice 36.

3. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$.

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi(P)(x) &= \psi(P')(x) \\ &= \int_0^x P'(t) dt = P(x) - P(0). \end{aligned}$$

On vérifie que 0 est valeur propre de $\psi \circ \varphi$ car

$$E_0(\psi \circ \varphi) = \mathbb{R}_0[x].$$

De plus, pour $P \in \mathbb{R}[x]$, $\psi(P)$ est le polynôme primitive (qui s'annule en 0) de P . D'où

$$\varphi \circ \psi(P)(x) = P(x).$$

C'est-à-dire

$$\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathbb{R}[x]}$$

et 0 n'est pas valeur propre.

Cet exemple montre que l'égalité

$$\text{Sp}(\varphi \circ \psi) = \text{Sp}(\psi \circ \varphi)$$

n'est pas toujours vérifiée en dimension infinie.

Exercice 38

p. 20

VP38

Source ESCP

1. On remarque que la matrice A (donc l'endomorphisme associé φ) est de rang 2 (les deux premières colonnes sont indépendantes, les autres étant proportionnelles à la seconde).

L'image $\text{Im } \varphi$ est de dimension 2; une base est, par exemple :

$$\left(e_1, \sum_{i=1}^n e_i \right).$$

Par le théorème du rang, le noyau $\text{Ker } \varphi$ est de dimension $(n-2)$. En utilisant les colonnes de A , la famille $(e_2 - e_3, e_2 - e_4, \dots, e_2 - e_n)$ forme une base de ce noyau.

2. Ainsi 0 est valeur propre de A , et le sous-espace propre qui lui est associé est $\text{Ker } A$ de dimension $(n-2)$.

Les vecteurs propres de φ associés aux valeurs propres non nulles sont dans $\text{Im } \varphi$ (puisque $\varphi(x) = \lambda x, \lambda \neq 0$).

Soit (e_1, v) , avec $v = \sum_{i=1}^n e_i$ la base de $\text{Im } \varphi$ précédemment déterminée, et ψ l'endomorphisme de $\text{Im } \varphi$ induit par φ .

On a $\psi(e_1) = v, \psi(v) = v + (n-1)e_1$. Donc

$$M = M_{(e_1, v)}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de ψ sont

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}$$

et on peut prendre pour vecteurs propres associés $(\lambda_i - 1)e_1 + v$.

Ces valeurs propres et ces vecteurs propres sont les éléments propres de φ manquants.

Exercice 39

p. 20

VP39

1. Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ une matrice colonne appartenant au noyau de A . Montrons que $X = 0_{n,1}$ en raisonnant par l'absurde. L'équation $AX = 0_{n,1}$ donne

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0.$$

Puis, par l'inégalité triangulaire

$$|a_{ii}x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}x_j| \leq \max_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} (|x_k|) \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Soit i_0 un indice réalisant le maximum :

$$|x_{i_0}| = \max_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} (|x_k|).$$

Comme X est non nulle, $|x_{i_0}| > 0$, et on obtient

$$|a_{i_0 i_0}| |x_{i_0}| \leq |x_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} |a_{ij}|.$$

En simplifiant par $|x_{i_0}| \neq 0$, on obtient une contradiction avec l'hypothèse de diagonale dominante de A . En conclusion,

$$\text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\},$$

puis la matrice

$$A \text{ est inversible.}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $A = B - \lambda I_n$. Si

$$\lambda \notin \bigcup_{i=1}^n [b_{ii} - r_i; b_{ii} + r_i]$$

alors pour tout indice i

$$|\lambda - b_{ii}| > r_i.$$

Comme $|a_{ii}| = |\lambda - b_{ii}|$ et $b_{ij} = a_{ij}$ pour $i \neq j$, la relation précédente se réécrit

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

La matrice A est à diagonale dominante. D'après la question 1, la matrice A est inversible et $\lambda \notin \text{Sp}(B)$. Il vient

$$\bigcup_{i=1}^n [b_{ii} - r_i; b_{ii} + r_i] \subset \overline{\text{Sp}(B)}$$

C'est-à-dire

$$\text{Sp}(B) \subset \bigcup_{i=1}^n [b_{ii} - r_i; b_{ii} + r_i].$$

3. D'après ce qui précède

$$\text{Sp}(A) \subset [-2; 2].$$

Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $\lambda/2 \in [-1; 1]$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in [0; \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \lambda/2$. D'où le résultat.

Exercice 40

p. 20

VP40

1. Justifions, par double inclusion, que

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi_A).$$

$\square$ Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Il existe donc $e \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ telle que $Ae = \lambda e$. Posons ensuite, la matrice E définie par concaténation

$$E = [e, 0_{n,1}, 0_{n,1}, \dots, 0_{n,1}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \varphi_A(E) &= AE = [Ae, A0_{n,1}, \dots, A0_{n,1}] \\ &= [\lambda e, 0_{n,1}, \dots, 0_{n,1}] \\ &= \lambda E. \end{aligned}$$

Comme $E \neq 0_n$, c'est un vecteur propre pour la valeur propre λ de φ_A . D'où

$$\lambda \in \text{Sp}(\varphi_A).$$

$\square$ Réciproquement, soit $\lambda \in \text{Sp}(\varphi_A)$. Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0_n\}$ telle que

$$\varphi_A(M) = \lambda M.$$

La matrice M est non nulle, elle admet donc une colonne C_{i_0} non nulle.

$$\begin{aligned} \varphi_A(M) &= [AC_1 \quad AC_2 \quad \dots \quad AC_{i_0} \quad \dots \quad AC_n] \\ \lambda M &= [\lambda C_1 \quad \lambda C_2 \quad \dots \quad \lambda C_{i_0} \quad \dots \quad \lambda C_n]. \end{aligned}$$

D'où

$$AC_{i_0} = \lambda C_{i_0}.$$

C_{i_0} est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Ainsi $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

Finalement

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi_A).$$

2. Soit λ une valeur propre commune de A et φ_A . L'application

$$\Phi: \begin{cases} E_\lambda(A)^n & \rightarrow E_\lambda(\varphi_A) \\ (C_1, C_2, \dots, C_n) & \mapsto [C_1, C_2, \dots, C_n]. \end{cases}$$

est bien définie, linéaire et bijective. C'est un isomorphisme et on a égalité des dimensions :

$$\dim(E_\lambda(A)^n) = \dim E_\lambda(\varphi_A).$$

Par la formule sur la dimension d'un produit cartésien

$$n \dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(\varphi_A).$$

Exercice 41

p. 20

VP41

1. Vérifier que $A^3 = 0_4$. Autrement dit, $P(x) = x^3$ est un polynôme annulateur de A . Comme 0 est l'unique racine de P

$$\text{Sp}(A) \subset \{0\}.$$

Comme A n'est pas inversible, 0 est une valeur propre de A . D'où

$$\text{Sp}(A) = \{0\}.$$

Le raisonnement est identique pour B .

$$\text{Sp}(B) = \{0\}.$$

On a aussi

$$\text{Tr}(A) = 0 = \text{Tr}(B).$$

Notons (C_1, C_2, C_3, C_4) la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On montre que

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect}(C_1, C_4) \quad \text{et} \quad \text{Ker}(B) = \text{Vect}(C_1, C_3).$$

En particulier

$$\dim E_0(A) = \dim E_0(B).$$

Les espaces propres ont même dimension. De plus, par la formule du rang, on a

$$\text{rg} A = \text{rg} B = 2.$$

2. Faux.

Raisonnons par l'absurde en supposant les matrices semblables. Il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible telle que

$$A = P^{-1}BP$$

puis $A^2 = P^{-1}B^2P.$

Absurde, $B^2 = 0_4$ mais $A^2 \neq 0_4$.

Exercice 42

p. 21

VP42

1. Soient $f \in E$ et F une primitive de f . Par définition de l'intégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt = \frac{1}{2} (F(x+1) - F(x-1)).$$

Comme F et les fonctions affines $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x-1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, par composition et combinaisons linéaires, $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$T(f) \in E_1.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$T(f)'(x) = \frac{1}{2} (1 \cdot F'(x+1) - 1 \cdot F'(x-1)) = \frac{1}{2} (f(x+1) - f(x-1)).$$

2. Soient $f, g \in E, \lambda \in \mathbb{R}$. pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(\lambda f + g)(x) &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} (\lambda f(t) + g(t)) dt \\ &= \lambda \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} g(t) dt \\ &= \lambda T(f)(x) + T(g)(x). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g).$$

L'application est linéaire et son ensemble de départ s'identifie à son ensemble d'arrivée :

T est un endomorphisme de E .

• La question 1 précise que l'image de T est incluse dans E_1 et donc strictement incluse dans E . Par exemple, la fonction valeur absolue qui appartient à E mais pas E_1 ne peut avoir d'antécédent par T . En résumé

T n'est pas surjective.

3. On trouve que $T(s) = \mathbf{0}$ (l'application nulle). Le noyau de T n'étant pas réduit à $\{\mathbf{0}\}$,

T n'est pas injective.

4. Procédons par disjonction des cas :

• Si $a = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$T(f_0)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} 1 dt = \frac{1}{2} (x+1 - (x-1)) = 1 = \varphi(0) \cdot f_0(x).$$

On retrouve bien

$$T(f_0) = \varphi(0)f_0.$$

• Si $a \in \mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

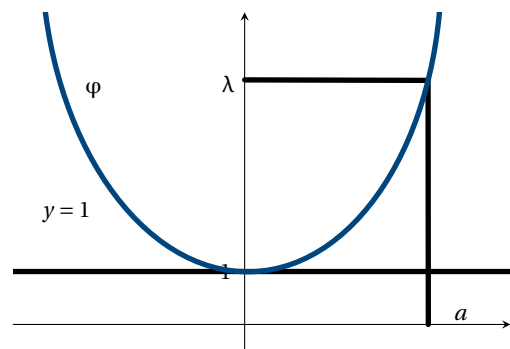
$$\begin{aligned} T(f_a)(x) &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} e^{at} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{at}}{a} \right]_{x-1}^{x+1} \\ &= \frac{e^{ax+a} - e^{ax-a}}{2a} = e^{ax} \frac{e^a - e^{-a}}{2a} \\ &= \varphi(a)e^{ax} = \varphi(a)f_a(x). \end{aligned}$$

Ce calcul étant valable pour tout réel x arbitrairement choisi

$$T(f_a) = \varphi(a)f_a.$$

5. Une étude de fonction donne φ continue sur $\mathbb{R}$ et d'image

$$\text{Im } \varphi = [1; +\infty[.$$



Dès lors, pour tout $\lambda \in [1; +\infty[$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(a) = \lambda.$$

C'est le théorème des valeurs intermédiaires. D'après le calcul précédent, $\varphi(a)$ est valeur propre avec comme vecteur propre $f_a \neq \mathbf{0}$. Donc λ est valeur propre et

$$[1; +\infty[\subset \text{Sp}(T).$$

• L'inclusion est stricte, T n'étant pas injective, 0 est aussi valeur propre.

Exercice 43

p. 21

VP44

1. La matrice de $f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ dans $\mathcal{B}$ est $M - I_3$ et vérifie après un calcul matriciel $(M - I_3)^2 = M - I_3$. Donc $f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ est un projecteur.

2. Des résolutions de systèmes montrent que f admet 1 et 2 comme valeurs propres (on sait déjà où chercher car $f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$

admet possiblement 0 et 1 comme valeurs propres, donc f a possiblement 1 et 2 en valeurs propres) et que, c'est utile dans la suite

$$E_1(f) = \text{Vect}(u_1) \quad \text{et} \quad E_2(f) = \text{Vect}(u_2, u_3)$$

avec

$$u_1 = (0, 1, 1), \quad u_2 = (2, 0, 1) \quad \text{et} \quad u_3 = (-1, 1, 0).$$

(Ces trois vecteurs ne sont naturellement pas uniques).

3. On sait que les droites vectorielles stables par un endomorphisme sont les droites engendrées par un vecteur propre. On peut donc déjà en donner 3 : celles engendrées par u_1, u_2 et u_3 .

Mais ce ne sont pas les seules, car il y a une infinité de droites vectorielles dans l'espace vectoriel de dimension 2 : $E_2(f)$.

Il y a donc une infinité de droites stables par f .

4. Notons déjà que l'on peut construire des plans stables en sommant des droites stables, car une somme de sous-espaces stables est encore stable : cela nous en donne déjà 3 : $\text{Vect}(u_1, u_2)$, $\text{Vect}(u_1, u_3)$, $\text{Vect}(u_2, u_3)$.

On peut en construire encore d'autres, par exemple $\text{Vect}(u_1, u_2 + u_3)$, ou encore plus généralement, pour tout réel α :

$$P_\alpha = \text{Vect}(u_1, u_2 + \alpha u_3).$$

Vérifions que P_α est un plan stable par f .

→ $u_1 \in E_1(f)$, $u_2 + \alpha u_3 \in E_2(f)$ et des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe donc la famille $(u_1, u_2 + \alpha u_3)$ est libre : P_α est de dimension 2, c'est un plan vectoriel.

→ Le plan P_α est stable par f car

$$f(u_1) = u_1 \in P_\alpha \quad \text{et} \quad f(u_2 + \alpha u_3) = 2(u_2 + \alpha u_3) \in P_\alpha.$$

Enfin, il reste à prouver que les plans P_α sont tous différents, pour être sûr d'en avoir une infinité.

Prenons deux réels α et β différents et montrons par exemple que le vecteur $u_2 + \alpha u_3$ qui est dans P_α n'est pas dans P_β . Supposons par l'absurde qu'il le soit. Il existerait deux réels a, b tels que

$$u_2 + \alpha u_3 = au_1 + b(u_2 + \beta u_3).$$

Comme u_1 n'est pas combinaison linéaire de u_2 et u_3 , nécessairement $a = 0$. Donc $u_2 + \alpha u_3 = b(u_2 + \beta u_3)$. Comme (u_2, u_3) est libre, cela donne $b = 1$ puis $\alpha = \beta$: absurde.

Ainsi, chaque réel α donne un plan P_α différent. Finalement, il y a une infinité de plans stables par f .

Retenir qu'une somme de sous-espaces stables est stable et que les droites stables sont celles engendrées par un vecteur propre.

Pour une matrice ne possédant que des sous-espaces propres

de dimension 1, la construction ci-dessus n'est plus possible. Le sujet d'écrit Maths ESCP 2001 explore en détails ces questions.

Exercice ??

p. ??

VP62

1. On introduit le polynôme $P = x + x^2 + x^3$ de sorte que $P(f) = g$. Le polynôme $P' = 1 + 2x + 3x^2$ a un discriminant négatif, P' est positif strictement et P est strictement croissant. Comme f est diagonalisable, il existe $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$. D'après le cours, on a

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad g(e_i) = P(f)(e_i) = P(\lambda_i) e_i.$$

On en déduit que e_i est vecteur propre de g pour la valeur propre $P(\lambda_i)$. On a donc une base de vecteurs propres pour g qui est donc diagonalisable. Notons aussi qu'on ne peut donc pas avoir d'autres valeurs propres que les $P(\lambda_i)$. Enfin, comme P est injectif, il y a autant de valeurs propres pour f que pour g .

2. On a

$$g = f + f^2 + f^3 = f \circ (\text{id} + f + f^2).$$

On en déduit l'inclusion

$$\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$$

ce qui donne sur les dimensions $\text{rg}(g) \leq \text{rg}(f)$.

• Comme f est diagonalisable, on a même égalité.

→ Rédaction 1. Posons $h = \text{id} + f + f^2 = Q(f)$ où $Q = 1 + x + x^2$. En regardant le discriminant de Q , on constate que le polynôme Q ne s'annule pas. Or

$$\text{Sp}(Q(f)) = \{Q(\lambda_i) \mid i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$$

Dès lors, 0 n'appartient pas au spectre de $Q(f)$. On a donc un endomorphisme injectif de dimension finie, il est bijectif. La relation

$$g = f \circ Q(f) \quad \text{donne} \quad f = g \circ Q(f)^{-1}.$$

On en déduit l'inclusion réciproque

$$\text{Im}(f) \subset \text{Im}(g).$$

D'où l'inégalité réciproque sur les rangs et *in fine* l'égalité.

→ Rédaction 2. En reprenant la preuve de la question 1, si on note I l'ensemble des indices de $\llbracket 1; n \rrbracket$ tel que e_i soit vecteur propre pour la valeur 0, on a

$$\text{Ker}(f) = E_0(f) = \text{Vect}(e_i \mid i \in I) = E_{P(0)}(g) = E_0(g) = \text{Ker}(g),$$

car $P(0) = 0$. On en déduit l'égalité des dimensions des noyaux de f et g , puis l'égalité des rangs (formule du rang).