

CHAPITRE 4

Révisions et compléments sur les variables aléatoires discrètes

Le hasard ne profite qu'aux esprits préparés.

LOUIS PASTEUR (1822-1895)

On reprend ici quelques théorèmes et exercices sur les séries numériques et les variables discrètes. La partie sur l'espérance et la variance est réservée au chapitre suivant.

1

Rappels et compléments sur les séries

1.1

Définitions

DÉFINITION (RAPPEL)

série numérique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. La **série** associée à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On dit que la série converge si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie.



Attention. Il ne faut pas confondre :

- $\sum u_n$: la série de terme général u_n ;
- $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$: la somme partielle d'ordre n de la série ;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$: la somme de la série, c'est-à-dire sous réserve de convergence, la limite des sommes partielles ;
- $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$: le reste d'ordre n de la série si cette dernière est convergente.

Exercice 1



D'après EDHEC 2022

Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n , un réel x non nul et renvoie la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{k \geq 1} 1/\text{sh}(kx)$. Que dire de la convergence?

p. 24

La fonction sh est la fonction sinus hyperbolique définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

PY89

Remarques.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.
- Si la série de terme général u_n converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

La série harmonique $\sum 1/n$ montre que la réciproque est fautive.

- Soient u et v deux suites réelles telles que les séries de termes généraux u_n et v_n convergent. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge et

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=n_0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

THÉORÈME

convergence absolue

- On dit que la série de terme général u_n **converge absolument** si la série de terme général $|u_n|$ converge.
- Si une série converge absolument, **alors** elle converge.

Remarque. La réciproque est fautive. La série $\sum (-1)^n/n$ donne un contre-exemple.

On admet l'énoncé suivant qui expliquera la condition de convergence absolue dans la définition de l'espérance.

THÉORÈME

famille sommable

Soit I un ensemble dénombrable, indexé par $\mathbb{N}$ sous la forme $I = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans I .

Si la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument,

alors sa somme est indépendante de l'indexation φ . On peut donc noter sans ambiguïté $\sum_{i \in I} u_i$ cette somme.

Résultat admis.

1.2 Séries de références

THÉORÈME

séries géométriques, série exponentielle

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Les séries de termes généraux x^k , kx^{k-1} et $k(k-1)x^{k-2}$ sont convergentes si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

- Pour tout réel x , la série de terme général $\frac{x^k}{k!}$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$.

- On appelle **série de Riemann**, une série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Cette série est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

1.3 Critères de convergence pour les séries à termes positifs

THÉORÈME

critère de comparaison

Soient u et v deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n aussi.
- Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n aussi.

Exercice 2



Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs. On suppose que la série $\sum k^2 u_k^2$ est convergente.

a) Montrer que la série $\sum u_k$ est convergente.

b) Étudier la réciproque.

2. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Justifier la convergence des séries :

p. 24

$$\sum \frac{3u_n}{1+u_n^2}, \quad \sum \ln(1+u_n) \quad \text{et} \quad \sum \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^4}.$$

RA11

THÉORÈME

critères de négligeabilité et d'équivalence

Soient u et v deux suites réelles.

- Si
 - $u_n = o(v_n)$
 - v est positive à partir d'un certain rang
 - la série de terme général v_n converge,

alors la série de terme général u_n converge.

- Si
 - $u_n \sim v_n$
 - v est positive à partir d'un certain rang,

alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

Remarque. On a des critères analogues si v est négative à partir d'un certain rang.



Attention. Il ne faut pas oublier les conditions de signes lors de l'application de ces théorèmes.

Exemples

◆ Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\bullet \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}} \right); \quad \bullet \sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{2^n}; \quad \bullet \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!}; \quad \bullet \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)^4}{4^{\ln(n)}}.$$

p. 25

◆◆ Discuter, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, de la nature de la série :

$$\bullet \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{1+2+\dots+n} \right)^\alpha; \quad \bullet \sum_{n \geq 1} \left(\sqrt{n+7} - \sqrt{n} \right)^\alpha \quad \bullet \sum \arctan \left(\frac{n^\alpha}{1+n} \right).$$

RA12

2

Révision sur les probabilités

2.1 L'application probabilité

On représente le résultat d'une expérience aléatoire comme un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles. Dans la suite, $\mathcal{A}$ est un ensemble composé de partie de Ω ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$). Il vérifie

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{A}, \quad \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est stable par unions et intersections finies ou dénombrables : si I est un ensemble fini ou dénombrable et si pour tout $i \in I, A_i \in \mathcal{A}$, alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}.$$

Vocabulaire. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont des événements. Autrement dit, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des événements. On parle aussi de tribu ou de σ -algèbre.

DÉFINITION

l'application probabilité

Soient Ω , un univers des possibles et $\mathcal{A}$ un ensemble d'événements.

Une **probabilité** est une application $\mathbf{P}$ réelle définie sur $\mathcal{A}$ vérifiant les conditions suivantes.

- $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$;
 - $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
 - $\mathbf{P}$ est σ -additive :
Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints,
- $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbf{P}(A_i).$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A)$ est appelée **la probabilité de l'événement A** .

Remarque. Dans le cas où l'ensemble des indices I est dénombrable (par exemple, $\mathbb{N}$), la définition suppose implicitement la convergence de la série $\sum_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$.

Vocabulaire.

- La donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ où Ω est un univers des possibles, $\mathcal{A}$ un ensemble d'événements sur Ω et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, définit un **espace probabilisé**.
- Un événement de probabilité nulle est dit **négligeable**.
- Un événement de probabilité 1 est dit **presque sûr**.

THÉORÈME

de la limite monotone

Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- Si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** pour l'inclusion (c'est-à-dire, $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \subset A_{i+1}$),

Alors
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

- Si la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** pour l'inclusion ($\forall i \in \mathbb{N}, B_{i+1} \subset B_i$),

Alors
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n).$$

Conséquence. Si $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements quelconques alors les suites d'événements définies par $A_n = \bigcup_{k=0}^n C_k$ et $B_n = \bigcap_{k=0}^n C_k$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^n C_k\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^n C_k\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} C_k\right).$$

2.2 Probabilité conditionnelle et indépendance

DÉFINITION

probabilité conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Soit $B \in \mathcal{A}$.

La **probabilité conditionnelle** de B sachant A est

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Remarques.

- À partir de la définition, on prouve une première **formule de Bayes**.

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (\bullet).$$

- Si A est un événement non négligeable, alors $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.

DÉFINITION

indépendance deux à deux et mutuelle

- Deux événements A et B sont dits **indépendants** pour la probabilité P si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements. Les événements de cette famille sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie finie non vide $\{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subset I$,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^p A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^p P(A_{i_k}).$$

2.3 Formules des probabilités composées et probabilités totales

PROPOSITION

formule des probabilités composées

Soient $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$, des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tels que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0.$$

Alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

THÉORÈME

formule des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in I}$ un système complet d'événements non négligeables (I est un ensemble fini ou dénombrable). Pour tout événement B ,

$$P(B) = \sum_{n \in I} P(A_n \cap B) = \sum_{n \in I} P(A_n) P_{A_n}(B).$$

Exercice 4



♦ 🎵 Soient $a, b, n, m \in \mathbb{N}^*$. Considérons deux urnes contenant respectivement a et b boules blanches et n et m boules noires. On suppose de plus que le nombre de boules dans les deux urnes est identique.

On procède de la manière suivante :

- On choisit (de façon équiprobable) une des deux urnes.
- On effectue ensuite des tirages mutuellement indépendants avec remise dans cette même urne.

p. 26

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au k -ième tirage, puis la probabilité d'obtenir k boules blanches consécutives.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au $(k+1)$ -ième tirage sachant que l'on a déjà obtenu k boules blanches aux tirages précédents.

RVA1

3

Variable aléatoire réelle

3.1

Définition

DÉFINITION

variable aléatoire réelle

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on appelle **variable aléatoire réelle** toute application X définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}.$$

Notation. Dans la suite, pour I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on note :

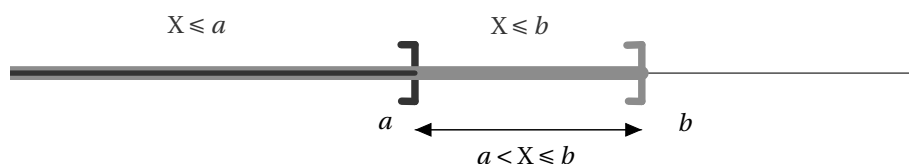
$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}, \quad [X \leq t] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\} \quad \text{et} \quad [X = t] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = t\}.$$

Ainsi, X est une variable aléatoire si pour tout réel t , l'ensemble $[X \leq t]$ est un événement.

Remarques.

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si X est une variable aléatoire réelle, alors $[X \in]a, b[$ est un événement. En effet,

$$[X \in]a, b[= [X \leq b] \setminus [X \leq a] = [X \leq b] \cap \overline{[X \leq a]} \in \mathcal{A} \quad \text{car} \quad [X \leq a], [X \leq b] \in \mathcal{A}$$



Par conséquent, le réel $\mathbf{P}([X \in]a, b[)$ est bien défini.

- La donnée des probabilités $\mathbf{P}([X \in]a, b[)$ pour tous réels $a < b$ définit **la loi de probabilité** de la variable aléatoire réelle X .

PROPOSITION

Opérations sur les variables aléatoires

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Alors

- la combinaison linéaire $\lambda X + \mu Y$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- le produit $X \cdot Y$,
- le maximum $\max(X, Y)$ et le minimum $\min(X, Y)$

sont encore des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Résultat admis.

Remarque. Cela s'étend à un nombre fini de variables aléatoires.

3.2

Fonction de répartition

DÉFINITION

fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On définit la fonction F_X sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \mathbf{P}([X \leq t]).$$

La fonction F_X est la **fonction de répartition** de la variable aléatoire X .

Exercice 5



✧ Soit X , la variable aléatoire donnant la valeur d'un dé équilibré.
Tracer le courbe représentative de F_X sur $[-1; 7]$.

p. 26

RVA2

Exemple. En généralisant l'exercice précédent, la fonction de répartition d'une loi uniforme discrète sur $[[1; n]]$ est donnée par l'expression

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lfloor t \rfloor / n & \text{si } t \in [0; n] \\ 1 & \text{si } t \geq n \end{cases}$$

PROPOSITION

propriétés de la fonction de répartition

Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et F_X sa fonction de répartition.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) \in [0; 1]$.
- F_X est croissante : pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 \leq t_2 \Rightarrow F_X(t_1) \leq F_X(t_2)$.
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$.
- F_X est continue à droite : pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} F_X(t) = F_X(a).$$

- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $\mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Preuve. Démontrons chacun des points de la proposition.

- Le premier se déduit du fait que la probabilité d'un événement est toujours comprise entre 0 et 1.
- Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Par croissance de la probabilité

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow [X \leq t_1] \subset [X \leq t_2] \Rightarrow F_X(t_1) = \mathbf{P}([X \leq t_1]) \leq \mathbf{P}([X \leq t_2]) = F_X(t_2).$$

- Justifions la limite en $+\infty$.

→ La fonction F_X est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions, la limite de F_X en $+\infty$ existe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = [X \leq n]$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, donc d'après le théorème de la limite monotone pour les probabilités :

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(n).$$

Par croissance de F_X ,

$$1 = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} F_X(n) = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \in \mathbb{R}}} F_X(t).$$

→ Procédons de même pour la limite de F_X en $-\infty$. F_X est croissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions, la limite de F_X en $-\infty$ existe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $B_n = [X \leq -n]$. La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, donc d'après le théorème de la limite monotone pour les probabilités :

$$0 = \mathbf{P}(\emptyset) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(-n).$$

Par croissance de F_X ,

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(-n) = \lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t).$$

- Soit $a \in \mathbb{R}$. De nouveau, le théorème de la limite monotone pour les fonctions justifie l'existence de la limite à droite en a de la fonction de répartition. Étudions la limite de $F_X\left(a + \frac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $C_n = [X \leq a + \frac{1}{n}]$. La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements, donc d'après le théorème de la limite monotone pour les probabilités :

$$F_X(a) = \mathbf{P}([X \leq a]) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right).$$

$$F_X(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} F_X(t).$$

- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, sachant que $[X \leq a] \subset [X \leq b]$ on a

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbf{P}(X \leq b) - \mathbf{P}(X \leq a) = \mathbf{P}([X \leq b] \setminus [X \leq a]) = \mathbf{P}(a < X \leq b).$$



Astuce. À la fin de chaque calcul d'une fonction de répartition, il est toujours utile de vérifier rapidement les trois premiers points.

PROPOSITION

caractérisation de la loi

Une fonction de répartition caractérise une loi de probabilité. Cela signifie que deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition si et seulement si elles ont la même loi.

Résultat admis.

4

Révisions sur les variables aléatoires discrètes

4.1 Rappels : variables aléatoires finies et discrètes

Dans le cas où $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, la définition de la variable aléatoire se simplifie.

DÉFINITION

variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Une **variable aléatoire discrète** est une application $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

telle que

- $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$,
- pour tout $i \in I$, $[X = x_i]$ est un événement.

Vocabulaire. Donner la loi d'une variable aléatoire discrète X signifie donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et pour chaque $x \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}([X = x])$.

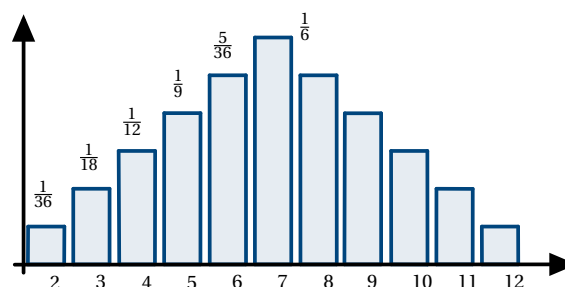
Remarques.

- On donne parfois la loi sous forme d'un tableau. Par exemple, la variable aléatoire X , somme des valeurs de deux dés équilibrés a pour loi :

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([X = i])$	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

On peut aussi représenter la loi à l'aide d'un diagramme en bâtons.

En abscisse, on place les valeurs possibles de la variable (ici, 2, 3, ..., 12) et en ordonnée les probabilités correspondantes (ici, $\mathbf{P}([X = 2])$, $\mathbf{P}([X = 3])$, ..., $\mathbf{P}([X = 12])$).



- À une variable aléatoire discrète X est associée le système complet d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$.

En particulier, il vient

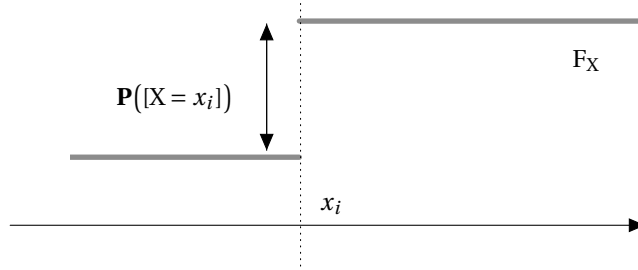
$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X = x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

- La courbe d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est en escalier. Les abscisses des sauts donnent les valeurs x_i et la hauteur du saut donne la probabilité $\mathbf{P}([X = x_i])$.
Dès lors, si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes ayant la même fonction de répartition, on a

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\},$$

et pour tout indice i ,

$$\mathbf{P}([X = x_i]) = \mathbf{P}([Y = x_i]).$$



On retrouve l'égalité en loi.

DÉFINITION

indépendance, cas discret

- Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}([X = x]) \cdot \mathbf{P}([Y = y]).$$

- Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i = x_i]).$$

Remarque. Dans ce cas, on constate que si X et Y sont indépendantes alors

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad F_X(t_1)F_Y(t_2) = \mathbf{P}([X \leq t_1] \cap [Y \leq t_2]).$$

Preuve. Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. On a

$$[X \leq t_1] \cap [Y \leq t_2] = \bigcup_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x \leq t_1, y \leq t_2}} [X = x] \cap [Y = y].$$

L'union est disjointe, par la propriété d'additivité d'une probabilité, puis par la définition de l'indépendance, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X \leq t_1] \cap [Y \leq t_2]) &= \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x \leq t_1, y \leq t_2}} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) \\ &= \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x \leq t_1, y \leq t_2}} \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = y) \\ &= \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leq t_1}} \mathbf{P}(X = x) \right) \cdot \left(\sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ y \leq t_2}} \mathbf{P}(Y = y) \right) \\ \mathbf{P}([X \leq t_1] \cap [Y \leq t_2]) &= F_X(t_1)F_Y(t_2). \end{aligned}$$

La réciproque est vraie mais plus délicate à prouver.

4.2 Lois usuelles

Rappelons que donner la loi d'une variable aléatoire X discrète revient à la donnée de :

- $X(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.
- Pour chaque $k \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X = k])$.

Dans chacun des cas, on précisera la loi, une représentation à l'aide d'un diagramme en bâtons, des exemples concrets d'application. De plus, on distinguera bien

- les cas finis : loi certaine, loi uniforme discrète, loi de Bernoulli, loi binomiale.
- les cas infinis dénombrables : loi géométrique, loi de Poisson.

Variable aléatoire certaine

Une variable X est dite **variable aléatoire certaine**, ou **presque sûrement constante** s'il existe un réel c tel que

$$\mathbf{P}([X = c]) = 1.$$

Loi de Bernoulli

DÉFINITION

loi de Bernoulli

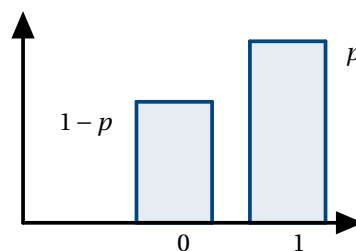
Soit $p \in [0; 1]$. La variable aléatoire X suit une **loi de BERNOULLI**, noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si

$$X(\Omega) = \{0; 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([X = 1]) = p, \quad \mathbf{P}([X = 0]) = 1 - p.$$

Exemple. Pour $A \in \mathcal{A}$ alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$.

Représentation de $\mathcal{B}(p)$

Ci-contre, le diagramme en bâtons associé à une loi de Bernoulli de paramètre p .



Exemples de modélisation.

- Le résultat d'un lancer d'une pièce de monnaie équilibrée (1 pour pile, 0 pour face) suit une loi $\mathcal{B}(1/2)$.
- Plus généralement, la variable aléatoire associée à une expérience aléatoire ayant seulement deux issues (0 pour échec, 1 pour succès) suit une loi $\mathcal{B}(p)$ où p est la probabilité de succès.

Loi binomiale

DÉFINITION

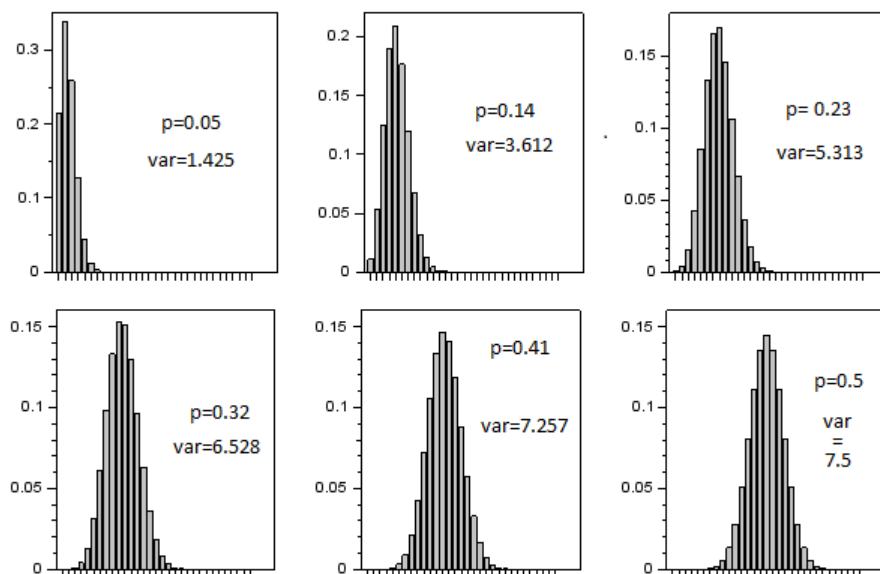
loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$. On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p , noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, si

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Représentation de $\mathcal{B}(n; p)$

Donnons quelques diagrammes en bâtons associés aux lois $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 30$ et $p \in \{0,05; 0,14; 0,23; 0,32; 0,41; 0,5\}$.



Exemples de modélisation.

- On lance n fois un dé et X compte le nombre de « 6 » obtenus. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/6)$.
- Plus généralement, lorsqu'on répète n expériences de Bernoulli (à deux issues : succès/échec) *identiques, mutuellement indépendantes*, dont la probabilité de succès est p , la variable X qui *compte le nombre de succès* suit alors une loi binomiale de paramètre (n, p) .

 **Attention.** Ne pas oublier la condition de mutuelle indépendance.

Loi uniforme

DÉFINITION

loi discrète uniforme

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$.

La variable aléatoire X suit une **loi discrète uniforme sur** $[[a, b]]$, noté $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, si

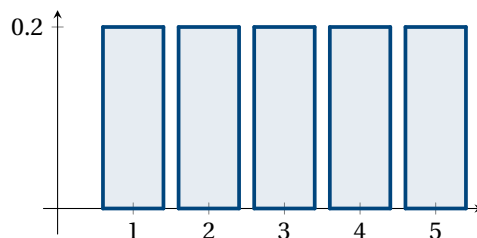
$$X(\Omega) = [[a, b]] \quad \text{et} \quad \forall k \in [[a, b]], \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ avec $n = b - a + 1$, alors $Y = X + a - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

Représentation

Ci-contre le diagramme en bâtons de la loi :

$$\mathcal{U}([1; 5]).$$



Exemples de modélisation.

- Le résultat d'un lancer d'un dé équilibré à 6 faces suit une loi uniforme sur $[1; 6]$.
- Une urne contenant n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n . On tire au hasard une boule. Le numéro obtenu suit une loi uniforme sur $[1; n]$.

Loi géométrique

DÉFINITION

loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

Soit $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$.

On dit que la variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre p , notée $\mathcal{G}(p)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X = k]) = (1 - p)^{k-1} p = q^{k-1} p.$$

Remarque. La loi est bien définie puisque les probabilités des événements sont positives et, à partir des résultats sur les séries géométriques :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p \cdot q^{k-1} = p \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{p}{1 - q} = 1.$$

Représentation de $\mathcal{G}(p)$

Exercice 6

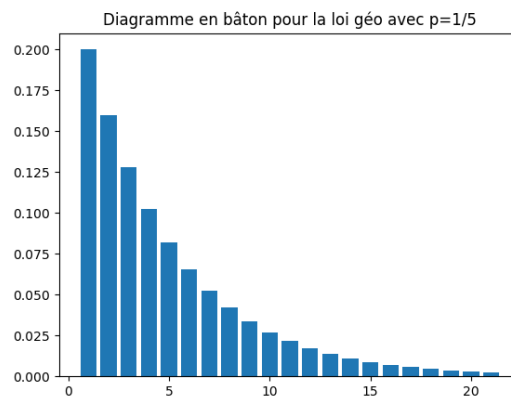


◆◆ 🎵 Diagramme en bâtons de la loi géométrique

1. Soient $p \in]0; 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Écrire un programme qui prend en argument p et renvoie la plus petite valeur entière n_p telle que $\mathbf{P}([X > n_p]) \leq 1\%$.
2. En déduire un second programme qui prend en argument p renvoie le diagramme en bâtons sur $[[1; n_p]]$.

p. 26

RVA3



Exemple de modélisation.

- Une loi géométrique modélise un **premier temps d'arrêt**.

Si X renvoie le rang du premier succès dans une succession d'expériences de Bernoulli *identiques, mutuellement indépendantes*, alors X suit une loi géométrique où p est la probabilité de succès d'une expérience de Bernoulli.

- Une autre manière de caractériser la loi géométrique : c'est une loi sans mémoire.

Exercice 7



◆ 🎵 Loi discrète sans mémoire

Soient $p \in]0; 1[$ et X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$.

1. Justifier que : $\forall s, t \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}_{[X > s]}([X > s + t]) = \mathbf{P}([X > t]) \quad (\bullet)$

2. *Réciproque.*

Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant $(\bullet)$ (sous-entendu, on suppose que pour tout $s \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X > s) > 0$). Posons $p = \mathbf{P}([X = 1])$.

- a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $\mathbf{P}([X > k])$ en fonction de p .
- b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre p .

p. 27

RVA4

Loi de Poisson

DÉFINITION

loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Soit λ un réel strictement positif.

On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Poisson** de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Remarque. La loi est bien définie. Les probabilités sont bien positives et à partir de la série exponentielle

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Représentation de $\mathcal{P}(\lambda)$

Exercice 8



♦♦ 🎵 Diagramme en bâtons de la loi de Poisson

1. Soient $\lambda \in]0, +\infty[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Écrire un programme qui prend en argument n, λ et renvoie la matrice ligne

$$[p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_n] \quad \text{où} \quad p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

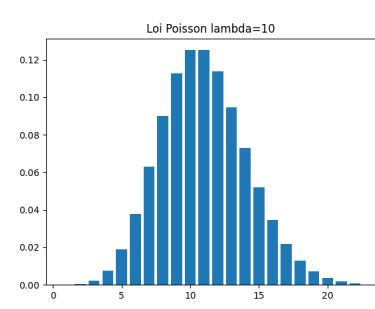
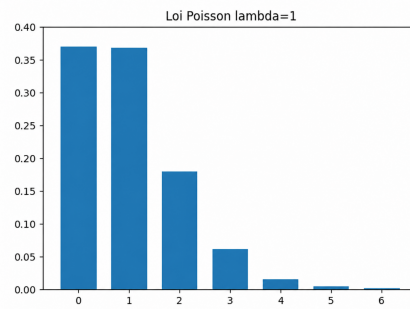
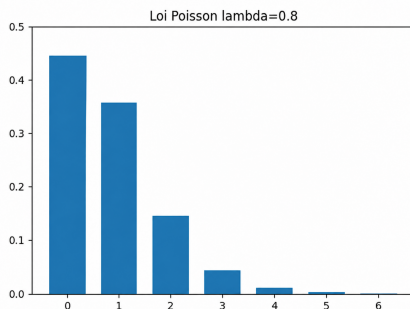
On pourra remarquer que $p_{i+1} = \lambda p_i / (i+1)$.

p. 28

2. Écrire un programme qui prend en argument λ et renvoie la plus petite valeur entière n_λ telle que $\mathbf{P}(X \geq n_\lambda) \leq 1\%$.
3. En déduire un second programme qui prend en argument λ renvoie le diagramme en bâtons sur $[[0; n_\lambda]]$.

RVA5

Quelques exemples pour différentes valeurs du paramètre.



» Pour poursuivre l'étude, voir exercice 32, p. 21.

Exemple de modélisation.

On utilise souvent la loi de Poisson pour dénombrer les « événements rares ». Nous y reviendrons au chapitre Convergence des variables aléatoires.



"On a sanctionné les copies dans lesquelles Poisson (ou tout autre mathématicien) était écrit sans majuscule."

Rapport de Jury : HEC 2021



Siméon Denis Poisson (1781-1840)

« La vie n'est bonne qu'à deux choses : découvrir les mathématiques et enseigner les mathématiques. »

5.1 Premiers exemples avec les lois usuelles

Pour simuler des variables aléatoires, on peut utiliser la bibliothèque `random` que l'on importe par :

Editeur

```
import numpy.random as rd
```

- **rd.random()**

La commande `rd.random()` renvoie un réel choisi au hasard dans l'intervalle $[0;1[$ suivant une loi de probabilité uniforme continue sur $[0;1[$.

Pour simuler à l'aide de Python un événement de probabilité p , on peut écrire `rd.random() < p` renverra `True` avec probabilité p .

- **rd.randint(debut,fin)**

De la même façon, on peut tirer au hasard (et uniformément) un entier plutôt qu'un réel. Dans ce cas, la commande à utiliser est `rd.randint(debut,fin)` qui tire au hasard avec une probabilité uniforme un entier dans l'intervalle $[debut,fin[$.

Console

```
>>> rd.randint(0,10)
9
```

Remarque. On peut aussi écrire `np.floor((b-a+1)*rd.random())+a`.

- **rd.geometric(p)**

La fonction `rd.geometric(p)` permet de simuler une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p . Pour rappel, si X renvoie le rang du premier succès dans une infinité d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où p est la probabilité d'un succès.

- **rd.binomial(n,p)**

De la même façon, on peut simuler une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n, p avec la commande `rd.binomial(n,p)`. Pour rappel, le nombre de succès obtenus lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes de probabilité de succès p suit une loi binomiale de paramètres n, p .

- **rd.poisson(lbda)**

Enfin, `rd.poisson(lbda)` simule une variable qui suit une loi de Poisson de paramètre $lbda$.

Remarque. Toutes les méthodes précédentes peuvent aussi renvoyer une liste de valeurs tirées selon les différentes lois de probabilité plutôt qu'une seule valeur. Pour faire cela, il suffit de donner comme argument supplémentaire à l'instruction la taille de la liste voulue. Par exemple, `rd.randint(1,101,200)` renvoie un tableau `numpy` contenant 200 entiers pris aléatoirement entre 1 et 100. De plus, la commande `rd.randint(1,101,[200,10])` renvoie une matrice de taille $(200,10)$.

Exercice 9. ♦ 🎵 Lois usuelles avec random()

Une urne contient 5 boules (1 rouge et 4 bleues). On considère l'expérience suivante :

On tire une boule au hasard et on note la couleur. On replace ensuite la boule dans l'urne.

1. Soit X la variable aléatoire qui renvoie 1 si la boule est rouge et 0 sinon.
Préciser la loi de X .
En utilisant uniquement la commande `random`, écrire un programme qui simule la variable X .
2. On répète maintenant n fois l'expérience élémentaire. On suppose les tirages mutuellement indépendants. On note Y le nombre de boules rouges obtenues.
Quelle est la loi de Y ?
Avec la commande `random`, écrire un programme qui prend en argument n et simule Y .

RVA6

- On répète maintenant une infinité de fois l'expérience élémentaire. On suppose toujours les tirages mutuellement indépendants. On note Z le numéro du tirage où on a obtenu la première boule rouge. Quelle est la loi de Z ? Écrire un programme qui simule la variable Z .
- Modifier le programme précédent pour simuler la variable X_2 qui donne le numéro du tirage où on obtient la seconde boule rouge.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Généralisez la question avec X_r , la variable aléatoire qui renvoie le tirage de la r -ième boule rouge.

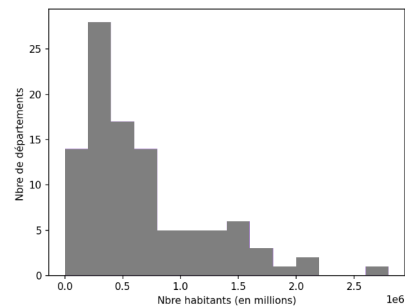
» Solution p. 28

Histogrammes

Rappelons aussi le code pour le tracé d'un histogramme qui permet d'avoir un aperçu de la répartition des valeurs de l'échantillon. Ce graphique est obtenu en traçant, pour chaque $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, le rectangle de base $[a_i; a_{i+1}]$ sur l'axe des abscisses et en ordonnées, l'effectif de la classe $[a_i; a_{i+1}]$.

Editeur

```
# Voici un exemple avec le nombre d'habitants par
# département français
# Création d'un tableau avec les intervalles de
# longueurs 200 000 (habitants)
inter = np.linspace(0, 2.8*10**6, 15)
plt.hist(L, bins=inter)
plt.xlabel('Nbre habitants (en millions)')
plt.ylabel('Nbre de départements ')
plt.show()
```



Échantillon de taille $m = 100$:

Editeur

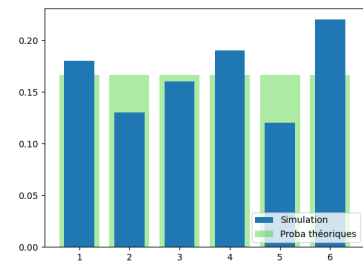
```
# La loi de la variable
val=[1,2,3,4,5,6]
loi=[1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6]

# Simulation de la variable aléatoire
ech=np.floor(6*np.random.rand(m))+1

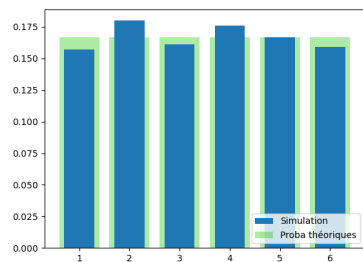
# Tracé du diagramme en bâtons
# bar(abscisses,ordonnées)
plt.bar(val,loi,color=(0.2, 0.8, 0.1, 0.4),label=
'Proba théoriques')

# Tracé de l'histogramme
# hist(echantillon, bins=classe)
classe=[0.5,1.5,2.5,3.5,4.5,5.5,6.5]
plt.hist(ech,bins=classe,density='true',rwidth
=0.6,label='Simulation')

plt.legend( loc = 'lower right')
plt.show()
```



Échantillon de taille $m = 1000$:



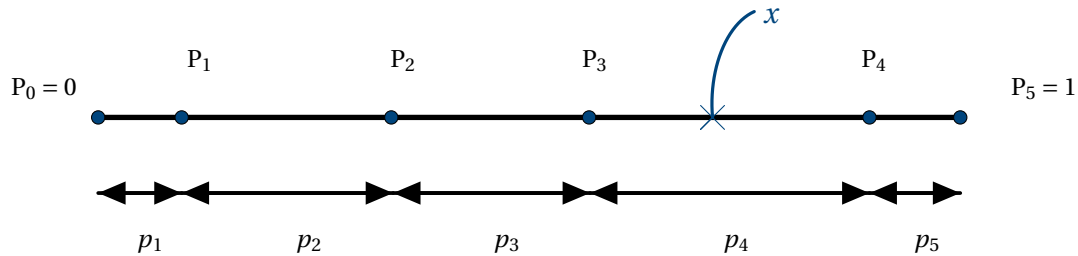
5.2 Simulation pour une loi discrète

Le cas fini

Soit X une variable aléatoire finie. Pour simplifier le programme, on suppose $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$. On note

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad p_i = \mathbf{P}(X = i) \quad \text{et} \quad P_i = \sum_{k=1}^i p_k.$$

On souhaite simuler la variable X uniquement avec la commande `rand()`. L'idée est la suivante : on simule la loi de X en tirant un réel, au hasard dans $[0; 1]$ et en renvoyant l'entier k s'il appartient à l'intervalle $[P_{k-1}; P_k[$. La probabilité que l'entier k soit choisi est alors $P_k - P_{k-1} = p_k = \mathbf{P}(X = k)$ (avec la convention $P_0 = 0$).



Exercice 10. ♦♦♦ Simulation des v.a finies

PY37

1. Que représente les réels P_i en termes de probabilités et de X ?
2. Écrire un programme qui prend en argument la matrice-ligne $(p_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ correspond à la loi de X et simule X .
3. Tester votre programme sur la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1; 10 \rrbracket)$ et vérifier la cohérence du programme à l'aide d'un histogramme.

» Solution p. 29

Le cas infini dénombrable avec la loi de Poisson

On peut toutefois étendre la méthode précédente au cas où X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Prenons le cas de $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Notons pour $k \in \mathbb{N}$,

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad P_k = \sum_{j=0}^k p_j.$$

En particulier, on a

$$P_{k+1} = P_k + \frac{\lambda}{k+1} p_k.$$

Exercice 11. ♦♦ Simulation d'une loi de Poisson

PY38

1. Adapter la méthode précédente pour simuler $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
2. Comparer l'histogramme obtenu aux valeurs théoriques (diagramme en bâtons construit à l'exercice 8).

» Solution p. 29



La loi de Benford et la fraude fiscale



Le saviez-vous

Prenons le pari suivant :

On choisit un nombre au hasard dans un journal. Si son premier chiffre est 1, 2 ou 3, vous me devez dix euros, sinon je vous dois dix euros. Acceptez-vous de jouer ?

On pourrait s'imaginer que le jeu vous est favorable. *A priori*, il y a autant de chances que le nombre choisi commence par 1 que 9, 2 que 7 etc. J'aurais donc seulement une chance sur trois de gagner, trois nombres sur les neuf possibles m'étant favorables (on exclut 0). Mais en réalité, le jeu n'est absolument pas en votre faveur. Étonnamment, la répartition des chiffres obtenus n'est pas uniforme. On vérifie expérimentalement que

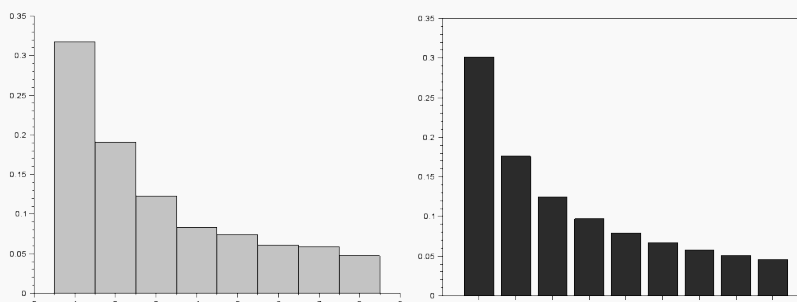
→ environ 30% des chiffres sont des 1 ; 17,6% sont des 2 ; 12,5% sont des 3.
Au total, j'ai donc près de 60% de chance de gagner.

→ respectivement 9,7%, 7,9%, 6,7%, 5,8%, 5,1%, 4,6% pour 4, 5, ..., 9.

• Cette propriété fut découverte par Simon Newcomb en 1881, puis redécouverte par Frank Benford 57 ans plus tard, en constatant que les premières pages des tables de logarithmes étaient plus usées que les autres. Cette propriété de répartition des nombres s'étend à de très nombreux types de liste (longueurs des fleuves en mètres, prix dans les supermarchés, etc.). Bien sûr, certaines listes ne vérifient cette propriété. Par exemple, la taille des Français exprimée en centimètres contient essentiellement des nombres dont 1 est le premier chiffre. De plus, ils ont précisé que le premier chiffre suivait une certaine loi, dite de Benford. Une variable aléatoire X suit une loi de Benford si :

$$X(\Omega) = [1; 9] \quad \text{et} \quad \forall k \in [1; 9], \quad P(X = k) = \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(10)}.$$

Le site de l'Insee contient de très nombreuses statistiques qui permettent de tester cette loi. Voici par exemple, à gauche, la répartition du premier chiffre du nombre d'habitants de 2500 communes françaises, et à droite, le diagramme en bâtons correspondant aux probabilités d'une loi de Benford. Les deux diagrammes sont pratiquement identiques.



• Donnons une application.

En étudiant la répartition du premier chiffre des comptes des entreprises ou des États, on peut détecter des irrégularités et d'éventuelles fraudes. En effet, les données falsifiées ne respectent en général pas la loi de Benford.

En 2011, les comptes des États membres de l'Union européenne ont été soumis à ce type de test. Les comptes de la Grèce (et dans une moindre mesure, ceux de la Belgique) s'écartent significativement de la répartition de Benford. Ce critère conforte l'hypothèse que les comptes grecs aient été falsifiés afin d'être en accord avec les traités européens et ainsi permettre l'entrée de la Grèce dans la zone euro (2001).



Pour aller plus loin
Voyages aux pays des maths (arte)



Exercices



Révisions sur les séries

Exercice 12. ♦ 🎵 Série alternée et contre-exemple

RA13

On définit les suites $u = (u_n)_{n \geq 1}$ et $v = (v_n)_{n \geq 2}$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

- On pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Justifier que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
 - En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.
- Vérifier les équivalents : $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \sim \frac{1}{n}$.
- Prouver que la série $\sum v_n$ est divergente.

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont les termes généraux équivalents mais la nature des séries est différente. Cet exemple montre l'importance de l'hypothèse de positivité pour appliquer le critère d'équivalence.

>> Solution p. 29

Exercice 13. ♦

RA14

- 🔗 Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier.
- En déduire que la série de terme général $\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$ est absolument convergente.

>> Solution p. 30

Exercice 14. ♦♦ Représenter dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des points de coordonnées (α, β) tels que la série de terme général $u_n = \frac{n^\alpha}{n^2 + n^\beta}$ soit convergente. # RA15

>> Solution p. 30

Exercice 15. ♦♦ 🎵 Produit de Cauchy

D'après EDHEC 2020 # RA17

On considère deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de sommes respectives $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. Pour tout entier naturel n , on pose : $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

- 🔗 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n c_k \leq \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k$.
- 🔗 En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$.
- Application

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$. En utilisant le résultat précédent, démontrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \right)$.

>> Solution p. 31

Exercice 16. ♦♦ 🎵 Comparaison série-intégrale, une série de Bertrand

Prouver que la série $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ est convergente.

>> Solution p. 32 # RA18

Exercice 17. ♦♦♦ Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$. # RA19

- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^n b_k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) - na_n$.
- On suppose dans cette question que la série de terme général a_n converge.
 - 🔗 Montrer que $na_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
 - En déduire que la série de terme général b_n converge et que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

3. On suppose dans cette question que la série de terme général b_n converge.

a)  Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, on a : $n(a_n - a_{n+k}) \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j$.

b) En déduire que la série de terme général a_n converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

>> Solution p. 32

Exercice 18.   Représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que la série suivante soit convergente :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{1 + y^{2n}}.$$

>> Solution p. 33 # RA20

Exercice 19.  

D'après oral HEC 2014 # RA21

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$.

1.  Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.

2. Calculer alors la somme de cette série.

>> Solution p. 34

Exercice 20.   **Produit infini**

RA22

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs.

1.  Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + \sum_{k=1}^n u_k \leq \prod_{k=1}^n (1 + u_k) \leq \exp \left(\sum_{k=1}^n u_k \right).$$

2. En déduire que la suite de terme général $\prod_{k=1}^n (1 + u_k)$ admet une limite finie lorsque $n \rightarrow \infty$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

>> Solution p. 34

Exercice 21.  **Transformation d'Abel**

RA23

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et que la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est bornée.

1. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^n u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_n v_n - S_0 v_1$.

b) En déduire la convergence de la série $\sum u_n v_n$.

2. Étudier la nature de la série $\sum (-1)^n / n$.

>> Solution p. 35

Probabilités

Exercice 22.   Soient $n, r, s \in \mathbb{N}^*$. Considérons n urnes numérotées de 1 à n , contenant chacune r boules bleues et s boules rouges. On réalise l'expérience suivante. On choisit au hasard une première boule dans la première urne que l'on replace dans la seconde et on répète l'opération jusqu'à la dernière urne. # RVA9

Quelle est la probabilité qu'une boule tirée au hasard dans la dernière urne soit bleue?

>> Solution p. 35

Exercice 23.  Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements mutuellement indépendants. # RVA10

1. Montrer que $\mathbf{P} \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(A_k)) \right)$.

2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(A_n) \in]0; 1[$. Montrer que

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) = 1 \iff \sum \ln(1 - \mathbf{P}(A_k)) \text{ diverge} \iff \sum \mathbf{P}(A_k) \text{ diverge}.$$

3. Application

On dispose d'une urne d'une capacité illimitée, d'une boule rouge et d'une quantité illimitée de boules blanches. Dans chacun des cas suivants, déterminer la probabilité de tirer au moins une fois la boule rouge.

- a) On place la boule rouge et une boule blanche dans l'urne. On effectue une suite infinie de tirages avec remise.
- b) On effectue une suite infinie de tirages de la façon suivante. Pour le premier tirage, on place la boule rouge et une boule blanche dans l'urne. Puis, après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on y ajoute une boule blanche.
- c) On effectue une suite infinie de tirages de la façon suivante. Pour le premier tirage, on place la boule rouge et trois boules blanches dans l'urne. Après le n -ième tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on y ajoute $2n + 3$ boules blanches.
- Indication. On commencera par déterminer le nombre de boules dans l'urne avant le n -ième tirage.*

>> Solution p. 36

Exercice 24. ♦ Soit $n \geq 2$. On lance n fois une pièce équilibrée de manière indépendante et on considère les événements suivants :

- A = « on obtient au plus une fois Pile »;
- B = « les résultats des différents lancers ne sont pas tous identiques ».

Les événements A et B sont-ils indépendants?

>> Solution p. 37

Exercice 25. ♦ Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ avec U et V suivant une loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit $N(\omega)$ comme le nombre de racines réelles du polynôme

$$Q_\omega(x) = x^2 + 2U(\omega)x + V(\omega).$$

1. Proposer un programme python qui simule N.
2. Donner la loi de N.

>> Solution p. 37

Exercice 26. ✧ Pour chaque énoncé, proposer une loi pour la variable aléatoire réelle X. On précisera les paramètres de la loi et les éventuelles hypothèses. # RVA16

1. On lance un dé à 6 faces et on note X la variable égale au nombre obtenu.
2. On lance 10 fois un dé à 6 faces et on note X la variable égale au nombre de numéros pairs obtenus.
3. Une urne contient 15 boules (5 noires, 3 blanches et 7 rouges). On tire successivement et avec remise 20 boules et on note X la variable égale au nombre de boules noires.
4. Un jeu de 52 cartes est aligné, faces cachées, sur une table de façon aléatoire. On découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir la dame de cœur. Soit X la variable égale au nombre de cartes découvertes.
5. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire au hasard un à un avec remise jusqu'à obtenir le jeton 1. On note X la variable égale au nombre de tirages effectués.
6. On pose m questions à un étudiant. Pour chaque question, n réponses sont possibles dont une seule est correcte. L'élève répond au hasard. Soit X la variable égale au nombre de bonnes réponses.

>> Solution p. 37

Exercice 27. ♦♦ 🎵 Matrices de rang 1 et indépendance de variables aléatoires

D'après EMLyon 2013 # RVA17

1. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si, et seulement si, il existe deux matrices colonnes non nulles U, V telles que $M = U^t V$.
2. On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose de plus : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$. On note, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$,

$$m_{i,j} = \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]),$$

puis
$$M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad U_X = (\mathbf{P}([X = i]))_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad U_Y = (\mathbf{P}([Y = j]))_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

- a) On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Calculer $U_X^t U_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.
- b) On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1. Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$, les colonnes de M.
- i) Vérifier que $C_1 + \dots + C_n = U_X$.
 - ii) En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = \beta_j U_X$.
 - iii) Montrer que pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbf{P}([Y = j]) = \beta_j$.
 - iv) En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

>> Solution p. 38

Exercice 28. ♦♦ ♪ Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre p . # RVA18
Calculer la probabilité que la matrice suivante soit inversible

$$A = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix}.$$

>> Solution p. 38

Exercice 29. ♦♦ Étude asymptotique de la queue d'une loi de Poisson.

d'après oral HEC 2012 # RVA19

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq \lambda - 1$, on a $\mathbf{P}(X \geq n) \leq \mathbf{P}(X = n) \frac{n+1}{n+1-\lambda}$.
2. En déduire que $\mathbf{P}(X \geq n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbf{P}(X = n)$.
3. Montrer que $\mathbf{P}(X > n) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\mathbf{P}(X = n))$.

>> Solution p. 39

Exercice 30. ♦ Comment écrire un programme qui prend en argument la liste des probabilités $(\mathbf{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ et renvoie le ou les modes de X .

>> Solution p. 39 # RVA20

Exercice 31. ♦♦♦ Mode(s) de la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0; 1[$. Montrer que, selon les valeurs de n et p , la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ admet un ou deux modes que l'on précisera.
2. Pour $n = 9$, illustrer par des représentations graphiques en Python les différents cas obtenus.

>> Solution p. 39 # RVA21

Exercice 32. ♦♦♦ Mode(s) de la loi de Poisson

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que, selon la valeur de λ , la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ admet un ou deux modes que l'on précisera.
Indication. On distinguera 3 cas : $\lambda \in]0, 1]$, $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $\lambda \in]1, +\infty[\setminus \mathbb{N}$.
2. Illustrer par des représentations graphiques en Python les différents cas obtenus.

>> Solution p. 40 # RVA22

Exercice 33. ♦♦ Une caractérisation de la loi géométrique

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi, toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On pose

$$I = \min(X, Y), \quad M = \max(X, Y) \quad \text{et} \quad D = M - I.$$

1. Dans cette question, on suppose que la loi commune de X et Y est géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (on pose $q = 1 - p$).
 - a) Reconnaître la loi de la variable I .
 - b) Calculer $\mathbf{P}([I = i] \cap [D = d])$ pour tout $(i, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On séparera les cas $d = 0$ et $d > 0$.
 - c) Déterminer la loi de la variable D .
 - d) Vérifier que les variables I et D sont indépendantes.
2. Dans cette question, la loi commune de X et Y est inconnue et on suppose que les variables I et D sont indépendantes. On note $b = \mathbf{P}(D = 0)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p_k = \mathbf{P}(X = k)$. On suppose $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Exprimer le réel b à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
 - b) Exprimer, pour tout entier naturel k , la probabilité $\mathbf{P}(I > k)$ à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
 - c) Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant la probabilité $\mathbf{P}([I > k] \cap [D = 0])$ établir l'égalité

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i \right)^2.$$

- d)
 - i) En déduire, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $(1 - b)p_k = 2b\mathbf{P}(X > k)$.
 - ii) Calculer p_1 en fonction de b
 - iii) Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $p_{k+1} = \frac{1-b}{1+b} p_k$.
- e) En déduire que la loi commune des variables X et Y est une loi géométrique.

Exercice 34. ♦♦ Taux de panne et caractérisation des lois géométriques

RVA24

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X \geq n) > 0.$$

On appelle taux de panne (ou encore taux de défaillance) associé à la variable X la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \mathbf{P}_{[X \geq n]}(X = n).$$

- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - u_k)$.
 - Exprimer $p_n = \mathbf{P}(X = n)$ à l'aide des réels u_k .
- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; 1[$.
 - Montrer la divergence de la série $\sum u_k$.
- Réciproquement, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $]0; 1[$ telle que la série $\sum u_k$ diverge. Justifier qu'il existe une variable aléatoire dont le taux de panne est la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- Montrer que la variable X suit une loi géométrique si, et seulement si, son taux de panne est une suite constante.

>> Solution p. 42

Exercice 35. ♦♦♦ On dispose d'une pièce de monnaie équilibrée. Les faces sont numérotées 0 et 1. On lance indéfiniment la pièce de monnaie et on note X_i le résultat du i -ème lancer. On se fixe une séquence $s = (s_1, s_2, \dots, s_k) \in \{0, 1\}^k$ de longueur k . On veut montrer que cette séquence apparaît dans la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une infinité de fois avec une probabilité de 1.

RVA63

On définit les événements :

- A : « La suite s apparaît une infinité de fois »;
- pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i : « La suite s apparaît au moins une fois à partir du $(k \times i + 1)$ -ième lancer »;
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, $B_j = \bigcap_{m=1}^k [X_{kj+m} = s_m]$.

- Justifier que $A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$.
Indication. On pourra raisonner par double inclusion sur les complémentaires.
- En déduire $\mathbf{P}(A) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_i)$.
- Montrer que $\bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j \subset A_i$.
- Soit $i \in \mathbb{N}$, on pose $C_i = \bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j$. On veut montrer que $\mathbf{P}(C_i) = 1$.
 - Montrer que les événements $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants.
 - Déterminer, pour $n \geq i$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=i}^n \overline{B_j}\right)$.
 - En déduire que $\mathbf{P}(C_i) = 1$.
- Montrer que la séquence s apparaît dans la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une infinité de fois avec une probabilité de 1.

>> Solution p. 43

Exercice 36. ♦♦♦ Exemple de convergence presque-sûr

Oral ESCP 2022, sujet 37 # RVA64

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\lambda_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n^2}$.

- Déterminer un équivalent de $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - En déduire que la série de terme général λ_n converge.
- Dans la suite de l'exercice, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \geq 1}$ définies sur cet espace, indépendantes et telles que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre λ_n .
 - Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(X_n \neq 0)$ converge.
 - Soit $(E_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(E_i).$$

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\bigcup_{n \geq N} [X_n \neq 0] \right) = 0$.

d) En déduire que $\mathbf{P} \left(\bigcup_{N \geq 1} \left(\bigcap_{n \geq N} [X_n = 0] \right) \right) = 1$.

e) On note $B = \left\{ \omega \in \Omega \mid \sum_{n \geq 1} X_n(\omega) \text{ converge} \right\}$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} X_n$ converge presque sûrement, c'est-à-dire que $\mathbf{P}(B) = 1$.

On suppose désormais que $B = \Omega$. Ainsi la fonction $S = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ est définie sur Ω . On admet que c'est une variable aléatoire.

3. Déterminer la limite en loi de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ avec $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

4. Déterminer la limite en probabilité de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

>> Solution p. 43

Exercice 37. ♦ Soit $n \geq 2$ entier. Sur chaque carte d'un paquet de n cartes, figure un nombre, de sorte que les n nombres écrits sont distincts deux à deux. On mélange ce paquet, et on le donne à une joueuse prénommée Alice, qui ignore la valeur de ces nombres. Elle devra alors regarder les cartes une à une, en s'arrêtant quand elle veut. Elle gagne si elle s'arrête à la carte sur laquelle figure le maximum M des nombres écrits sur les cartes. # RVA76

Alice décide de la stratégie suivante, s'étant donné un entier p , avec $1 \leq p \leq n-1$: elle regarde les p premières cartes, puis à partir de là, elle s'arrête dès qu'elle voit une carte portant un nombre supérieur aux nombres déjà observés. Bien sûr, si M est dans les p premières cartes, Alice ne s'arrête qu'à la dernière carte et a perdu. Elle perd aussi lorsque M n'est pas dans les p premières cartes et qu'apparaît ensuite une carte qui majore toutes les cartes observées mais qui n'est pas M .

1. Pour chaque $k \in \{p, \dots, n-1\}$, on note $E_{n,p,k}$ l'événement « Alice gagne en s'arrêtant à la $(k+1)$ -ième carte ».

a) Quelle est la probabilité de l'événement $E_{n,p,p}$?

b) Plus généralement, quelle est la probabilité de l'événement $E_{n,p,k}$, pour $k \in \{p, \dots, n-1\}$?

c) Montrer finalement que la probabilité de l'événement $G_{n,p}$: « Alice gagne » est

$$\mathbf{P}(G_{n,p}) = \sum_{k=p}^{n-1} \frac{p}{kn}.$$

2. a) Justifier que

$$\ln \left(\frac{n}{p} \right) \leq \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \ln \left(\frac{n}{p} \right) + \frac{1}{p}$$

et en déduire un encadrement de la probabilité de $G_{n,p}$ (sans signe somme).

b) L'entier n étant supposé « grand », Alice doit maintenant choisir la valeur de p qui optimisera sa stratégie. Elle doit faire en sorte que $\frac{n}{p}$ soit le plus proche d'un certain réel. Lequel ? Que vaut alors (à peu près) la probabilité qu'elle gagne ?

>> Solution p. ??



Indications et solutions



Indication de l'exercice 2

p. 3

1.a) Utiliser pour tous réels a et b ,

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

1.b) Penser aux séries de Riemann pour construire un contre-exemple.

2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, les quantités

$$\frac{x}{1+x^2}, \quad \ln(1+x), \quad \int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$$

sont positives et inférieures à x .

Indication de l'exercice 5

p. 7

Pour calculer $P(X \leq t)$, distinguer plusieurs cas :

$$t < 1, \quad t \in [1; 2[, \quad \dots, \quad t \in [5; 6[, \quad t \geq 6.$$

Indication de l'exercice 6

p. 12

Reprendre l'exemple de l'algorithme de seuil avec un "while".

Indication de l'exercice 22

p. 19

Posons pour tout $i \in [1, n]$, l'événement A_i : « La i -ème boule tirée est bleue ». On a

$$P(A_1) = \frac{r}{r+s}.$$

À l'aide du système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$, on montre que

$$P(A_2) = P(A_1).$$

Généraliser.

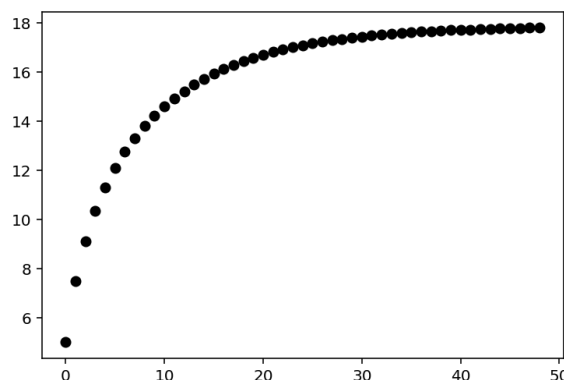
Exercice 1

p. 1

PY89

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def SommePartielle(x,n):
    s=0
    S=np.zeros(n)
    for i in range(1,n):
        s+=1/(np.exp(i*x)-np.exp(-i*x))
        S[i]=s
    return S
```

```
# un test pour x=0.1
plt.clf()
plt.plot(SommePartielle(0.1,50),'ko')
plt.show()
```



On constate que la suite des sommes partielles semblent converger.

C'est effectivement le cas, la série $\sum \text{sh}(kx)$ est convergente pour tout réel x . En effet, on prouve la convergence à l'aide des critères de Riemann et de négligeabilité avec

$$\frac{1}{\text{sh}(kx)} = o\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{croissance comparées.}$$

Exercice 2

p. 3

RA11

1.a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Suivons l'indication avec $a = ku_k$ et $b = 1/k$,

$$0 \leq (ku_k) \cdot 1/k \leq \frac{(ku_k)^2 + (1/k)^2}{2}$$

$$\text{puis } 0 \leq u_k \leq \frac{1}{2} \cdot k^2 u_k^2 + \frac{1}{2k^2}.$$

Par hypothèse, la série $\sum k^2 u_k^2$ est convergente. La série de Riemann $\sum 1/k^2$ est convergente (car $2 > 1$). Par linéarité, la série de terme général $\frac{1}{2} \cdot k^2 u_k^2 + \frac{1}{2k^2}$ est convergente.

Ensuite, le critère de comparaison s'applique :

La série $\sum u_k$ est convergente.

1.b) Posons pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = 1/k^{3/2}$. La série de Riemann $\sum u_k = \sum 1/k^{3/2}$ converge alors que la série harmonique $\sum k^2 u_k^2 = \sum 1/k$ diverge.

Ainsi :

La réciproque est fausse.

Si $\sum u_k$ converge, on ne peut pas affirmer que

La série $\sum k^2 u_k^2$ converge.

2. • Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$0 \leq \frac{3u_n}{1+u_n^2} \leq 3u_n.$$

La série $\sum 3u_n$ converge par hypothèse. D'après le critère de comparaison, la série $\sum \frac{3u_n}{1+u_n^2}$ est aussi convergente.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $1 + u_n \geq 1$, $\ln(1 + u_n) \geq 0$. De plus, à l'aide de l'inégalité classique :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \ln(1+x) \leq x,$$

on prouve, $\ln(1 + u_n) \leq u_n$.

Le critère de comparaison justifie la convergence de la série $\sum \ln(1 + u_n)$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel t ,

$$0 \leq \frac{1}{1+t^4} \leq 1.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^4} \leq \int_0^{u_n} 1 dt = u_n.$$

De nouveau, le critère de comparaison justifie la convergence de la série.

Exercice 3

p. 3

RA12

• Justifions que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

→ On a l'équivalent : $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{3}{n}$.

→ La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

→ Les séries sont à termes positifs, par le critère d'équivalence, la série diverge.

• Prouvons la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{2^n}$.

- À l'aide des croissances comparées :

$$\frac{n^3}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

→ La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (car $2 > 1$).

- La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs.

→ Le critère de négligeabilité s'applique, la série est convergente.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{n^n}{n!} &= \frac{n \times n \times n \times \dots \times n}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} \\ &\geq n \times \overbrace{\frac{n \times \dots \times n}{2 \times \dots \times n}}^{\geq 1} \geq n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{n^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. La série diverge grossièrement.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$4^{\ln(n)} = e^{\ln(4) \ln(n)} = n^{\ln(4)}.$$

$$\text{Ainsi, } \frac{\ln(n)^4}{4^{\ln(n)}} = \frac{\ln(n)^4}{n^{\ln(4)}}.$$

Précisons de plus que

$$\ln(4) = 2\ln(2) \simeq 2 \times 0,69 \simeq 1,4.$$

À l'aide des croissances comparées, on vérifie :

$$\frac{\ln(n)^4}{4^{\ln(n)}} = o\left(\frac{1}{n^{1,2}}\right).$$

→ La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1,2}}$ est convergente (car $1,2 > 1$).

→ La série $\sum \frac{1}{n^{1,2}}$ est à termes positifs.

- Le critère de négligeabilité s'applique, la série est convergente.

• On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}.$$

Par élévation à la puissance,

$$\left(\frac{1}{1+2+\dots+n}\right)^\alpha \sim \frac{2^\alpha}{n^{2\alpha}}.$$

Or, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$.

De plus, on est dans le cas de séries à termes positifs. Le critère d'équivalence s'applique. La série converge si et seulement si

$$\boxed{\alpha > 1/2}.$$

• En utilisant les équivalents classiques :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+7} - \sqrt{n} &= \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{7}{n}} - 1 \right) \\ &\sim \sqrt{n} \cdot \frac{7}{2n} = \frac{7}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

$$\text{Puis, } (\sqrt{n+7} - \sqrt{n})^\alpha \sim \frac{7^\alpha}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs la série $\sum (\sqrt{n+7} - \sqrt{n})^\alpha$ est de même nature que la série de Riemann $\sum 1/n^{\alpha/2}$.

En conclusion, on a convergence si et seulement si

$$\boxed{\alpha > 2}.$$

• La fonction arctangente est dérivable en 0, on obtient le $DL_1(0)$

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \arctan(0) + \arctan'(0)(x-0) + o_0(x) \\ &= x + o_0(x) \end{aligned}$$

D'où $\arctan(x) \sim_0 x$.

De plus, $\arctan(x) \xrightarrow{+\infty} \frac{\pi}{2}$.

Raisonnons maintenant par disjonction des cas.

→ Si $\alpha > 1$

$$\frac{n^\alpha}{1+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et par composition

$$\arctan\left(\frac{n^\alpha}{1+n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Dans ce cas, il y a divergence grossière de la série.

→ Si $\alpha = 1$, par continuité de la fonction arctangente en 1,

$$\arctan\left(\frac{n^\alpha}{1+n}\right) = \arctan\left(\frac{n}{1+n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \neq 0.$$

De nouveau, il y a divergence grossière de la série.

→ si $\alpha < 1$, on a $n^\alpha/(1+n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et

$$\arctan\left(\frac{n^\alpha}{1+n}\right) \sim \frac{n^\alpha}{1+n} \sim n^{\alpha-1} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$

Par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série est de même nature que la série de Riemann $\sum 1/n^{1-\alpha}$. Il y a convergence si et seulement si $1-\alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha < 0$.

Finalement, en regroupant tous les cas, la série $\sum \arctan(n^\alpha/(1+n))$ converge si et seulement si

$$\boxed{\alpha < 0}.$$

Exercice 4

p. 5

RVA1

1. Pour $i \in \{1;2\}$, on note U_i , l'événement : « piocher dans l'urne i ». Comme le choix de l'urne est équiprobable,

$$\mathbf{P}(U_1) = \mathbf{P}(U_2) = \frac{1}{2}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. (U_1, U_2) est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales, si B_k désigne l'événement « Tirer une boule blanche au k -ième tirage » :

$$\mathbf{P}(B_k) = \mathbf{P}(U_1) \cdot \mathbf{P}_{U_1}(B_k) + \mathbf{P}(U_2) \cdot \mathbf{P}_{U_2}(B_k)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a+n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{b+m}.$$

De nouveau, si A_k désigne l'événement « Tirer k boules blanches successivement » la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(U_1) \cdot \mathbf{P}_{U_1}(A_k) + \mathbf{P}(U_2) \cdot \mathbf{P}_{U_2}(A_k)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{a+n}\right)^k + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{b+m}\right)^k.$$

En effet, une fois l'urne choisie, les tirages sont mutuellement indépendants.

De plus, il y a le même nombre de boules dans les deux urnes $a+n = b+m$, l'expression se simplifie

$$\mathbf{P}(A_k) = \frac{1}{2(a+n)^k} (a^k + b^k).$$

2. On cherche $\mathbf{P}_{A_k}(B_{k+1})$. Par définition,

$$\mathbf{P}_{A_k}(B_{k+1}) = \frac{\mathbf{P}(A_k \cap B_{k+1})}{\mathbf{P}(A_k)} = \frac{\mathbf{P}(A_{k+1})}{\mathbf{P}(A_k)}.$$

On trouve :

$$\mathbf{P}_{A_k}(B_{k+1}) = \frac{\left(\frac{a}{a+n}\right)^{k+1} + \left(\frac{b}{b+m}\right)^{k+1}}{\left(\frac{a}{a+n}\right)^k + \left(\frac{b}{b+m}\right)^k}.$$

De nouveau, comme il y a le même nombre de boules dans les deux urnes $a+n = b+m$, l'expression devient :

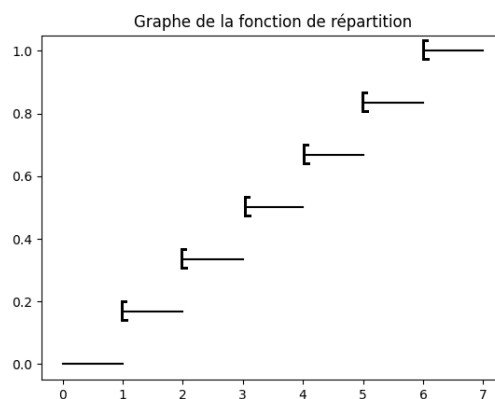
$$\mathbf{P}_{A_k}(B_{k+1}) = \frac{1}{a+n} \left(\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{a^k + b^k} \right).$$

Exercice 5

p. 7

RVA2

On obtient une « une courbe en escalier ».



Exercice 6

p. 12

RVA3

1.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def BatonGeo(p) :
    u=p
    Sommeterme=p
    n=1
    while Sommeterme<0.99 :
        n=n+1
        u=u*(1-p)
        Sommeterme+=u
    return n
```

Comme la loi est simple, on peut faire le calcul direct de n_p avec une partie entière et obtenir un second programme.

$$\mathbf{P}(X > n_p) \leq 1\% \iff \mathbf{P}(X \leq n_p) \geq 0,99.$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X \leq n_p]) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n_p} [X = k]\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n_p} \mathbf{P}([X = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n_p} p q^{k-1} \\ \mathbf{P}([X \leq n_p]) &= p \frac{1 - q^{n_p}}{1 - q} = 1 - q^{n_p} \end{aligned}$$

D'où $\mathbf{P}([X > n_p]) = q^{n_p}.$

On résout donc

$$q^{n_p} \leq 0,01 \iff n_p \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(q)}.$$

On obtient

$$n_p = \left\lceil \frac{\ln(0,01)}{\ln(1-p)} \right\rceil$$

(partie entière supérieure).

```
def BatonGeoBis(p) :
    n=np.ceil(np.log(0.01)/np.log(1-p))
    return n
```

Remarque. Un test pour vérifier que les deux programmes donnent le même résultat.

```
>>> BatonGeo(0.2)
21
>>> BatonGeoBis(0.2)
21.0
```

2. • Solution avec des matrices.

```
def Q2BatonGeo(p) :
    n=int(BatonGeoBis(p))
    Termes=np.zeros(n)
    Termes[0]=p
    for i in range(n-1):
        Termes[i+1]=Termes[i]*(1-p)
    ind=np.linspace(1,n,n)
    plt.clf()
    plt.bar(ind,Termes)
    plt.show()
```

• Solution avec des listes.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def Q2BatonGeo(p) :
    u=p
    termes=[p] # on stocke les valeurs dans
                  la liste termes
    Sommeterme=p
    n=1
    while Sommeterme<0.99 :
        n=n+1
        u=u*(1-p)
        termes.append(u)
        Sommeterme+=u
    plt.clf()
```

```
ind=np.linspace(1,n,n)
plt.bar(ind,termes)
plt.title('Diagramme en bâtons pour la
loi géo avec p=1/5')
plt.show()
```

Exercice 7

p. 12

RVA4

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme X est à valeurs entières :

$$[X \geq k] = \bigcup_{m \geq k} [X = m].$$

Les événements $([X = m])_{m \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints, d'après la propriété d'additivité d'une probabilité

$$\mathbf{P}([X \geq k]) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{m \geq k} [X = m]\right) = \sum_{m=k}^{+\infty} \mathbf{P}([X = m]).$$

En utilisant l'expression dans le cas où $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, il vient à l'aide du changement d'indice $i = m - k$,

$$\mathbf{P}([X \geq k]) = \sum_{m=k}^{+\infty} p(1-p)^{m-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} p(1-p)^{i+k-1}.$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique de raison $q = 1 - p \in]-1; 1[$

$$\mathbf{P}([X \geq k]) = q^{k-1} p \cdot \frac{1}{1 - (1-p)} = \boxed{q^{k-1}}.$$

Noter que

$$\mathbf{P}([X > k]) = \mathbf{P}([X \geq k+1]) = q^k.$$

Soient $s, t \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{[X > s]}([X > s+t]) &= \frac{\mathbf{P}([X > s] \cap [X > s+t])}{\mathbf{P}([X > s])} \\ &= \frac{\mathbf{P}([X > s+t])}{\mathbf{P}([X > s])} \\ &= \frac{q^{s+t}}{q^s} = q^t. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathbf{P}_{[X > s]}(X > s+t) = \mathbf{P}([X > t]).}$$

2.a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la relation $(\bullet)$ avec $t = 1$ et $s = k$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X > 1]) &= \mathbf{P}_{[X > k]}([X > k+1]) \\ &= \frac{\mathbf{P}([X > k+1] \cap [X > k])}{\mathbf{P}([X > k])} \\ &= \frac{\mathbf{P}([X > k+1])}{\mathbf{P}([X > k])}. \end{aligned}$$

Or, on a aussi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X > 1]) &= 1 - \mathbf{P}(\overline{[X > 1]}) \\ &= 1 - \mathbf{P}([X = 1]) = 1 - p. \end{aligned}$$

Il vient $\mathbf{P}([X > k+1]) = (1-p)\mathbf{P}([X > k]),$

et $\mathbf{P}([X > 0]) = 1.$

La suite $(P([X > k]))_k$ est une suite géométrique de raison $q = 1 - p$ et de premier terme 1. Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P([X > k]) = (1 - p)^k.$$

2.b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$[X = k] = [X > k - 1] \setminus [X > k],$$

et $[X > k] \subset [X > k - 1].$

Dès lors :

$$\begin{aligned} P([X = k]) &= P([X > k - 1]) - P([X > k]) \\ &= (1 - p)^{k-1} - (1 - p)^k \\ &= (1 - p)^{k-1} (1 - (1 - p)) \\ P([X = k]) &= (1 - p)^{k-1} \cdot p. \end{aligned}$$

Pour $p \in]0; 1[$, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$

Exercice 8

p. 13

RVA5

1.

```
import numpy as np

def BatonPoi(lbda, n) :
    u=np.exp(-lbda)
    Termes=np.zeros(n+1)
    Termes[0]=u
    for i in range(n) :
        Termes[i+1]=Termes[i]*lbda/(i
        +1)
    return Termes
```

- Solution avec une liste :

```
import numpy as np

def BatonPoi(lbda, n) :
    u=np.exp(-lbda)
    termes=[u] # on stocke les valeurs dans
    la liste termes
    for i in range(n+1) :
        u=u*lbda/(i+1)
        termes.append(u)
    return termes
```

2.

```
def Q2Poisson(lbda):
    u=np.exp(-lbda)
    Sommeterme=u
    n=1
    while Sommeterme<0.99 :
        u=u*lbda/n
        n=n+1
        Sommeterme+=u
    return n
```

3.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def BatonPoiBis(lbda) :
    n=Q2Poisson(lbda)
```

```
Termes=BatonPoi(lbda,n)
ind=np.linspace(0,n,n+1)
plt.clf()
plt.bar(ind,Termes,color=(0.2, 0.8,
0.1, 0.4),label='Proba théoriques')
plt.legend()
plt.title('Loi Poisson')
plt.show()
```

- Une autre solution plus directe avec les listes.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def BatonPoiBis(lbda) :
    u=np.exp(-lbda)
    termes=[u] # on stocke les valeurs dans
    la liste termes
    Sommeterme=u
    n=1
    while Sommeterme<0.99 :
        u=u*lbda/n
        n=n+1
        termes.append(u)
        Sommeterme+=u
    plt.clf()
    ind=np.linspace(0,n,n)
    plt.bar(ind,termes,color=(0.2, 0.8,
0.1, 0.4),label='Proba théoriques')
    plt.legend()
    plt.title('Loi Poisson')

    plt.show()
```

Exercice 9

p. 14

RVA6

1. La variable X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/5$.
Un code possible est

```
import numpy.random as rd
p=1/5
print(rd.random()<p)
```

On identifie ici True avec 1 et False avec 0.

2. La variable Y compte le nombre de succès dans n répétitions d'une expérience de Bernoulli de paramètre p . Les expériences sont mutuellement indépendantes. C'est donc une loi binomiale.

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n; 1/5).$$

Pour simuler la variable Y, on simule n parties et on compte le nombre de parties gagnantes.

```
def SimuY(p,n) :
    Compteur=0
    for i in range(n) :
        Compteur+=rd.random()<p
    return Compteur
```

On peut aussi écrire

```
def SimuY(p,n):
    Y=sum(rd.random(n)<p)
    return Y
```

3. La variable Z est le rang du premier succès dans une infinité de répétitions d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes. La probabilité de succès est p . Par conséquent, Z suit une loi géométrique de paramètre p .

$$Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

On peut simuler la loi par

```
def SimuZ(p) :
    Rang=1
    while rd.random()>p :
        Rang+=1
    return Rang
```

4. La variable X_2 peut s'obtenir comme la somme de deux variables aléatoires de loi géométrique de paramètre p . Ainsi,

```
def SimuX2(p) :
    x2=SimuZ(p)+SimuZ(p)
    return x2
```

Ce code se généralise à r boules :

```
def SimuXr(p,r) :
    x=0
    for i in range(r) :
        x+=SimuZ(p)
    return x
```

Exercice 10

p. 16

PY37

1. On a

$$P_i = P([X \leq i]).$$

2.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

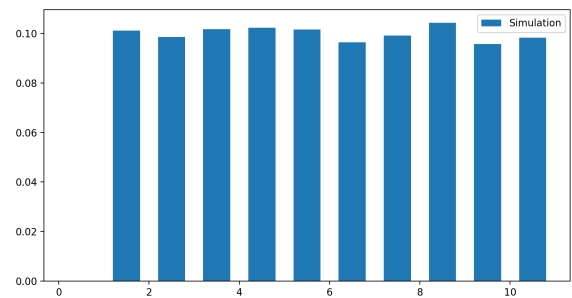
```
def Simulation(Loi) :
    n=len(Loi)
    k=1
    Somme=Loi[0]
    x=rd.rand()
    while Somme<x :
        Somme+=Loi[k]
        k+=1
    return k
```

3.

```
def TestSimulation(m) : # m représente le
    nombre de simulation, ou encore la
    taille de l'échantillon m=1000 par
    exemple
    Loi=np.ones(10)/10
    ech=np.zeros(m)
    for i in range(m):
        ech[i]=Simulation(Loi)
    inter =np.linspace(0,11,12)
    plt.clf()
    plt.hist(ech, bins=inter,density='true',
        ,rwidth=0.6,label='Simulation')
    plt.legend()
    plt.show()
```

Il ne reste plus qu'à tester

TestSimulation(10000)



On pourra tester avec des valeurs de m de plus en plus grandes.

Exercice 11

p. 16

PY38

1.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import random as rd
```

```
def SimulationPoisson(lbda) :
    p=np.exp(-lbda)
    Somme=p
    k=0
    x=rd.random()
    while Somme<x :
        k+=1
        p=p*lbda/k
        Somme+=p

    return k
```

2.

```
def TestSimulationPoisson(m,lbda) :
    # m représente le nombre de simulation,
    ou encore la taille de l'é
    chantillon m=1000 par exemple
    ech=np.zeros(m)
    for i in range(m):
        ech[i]=SimulationPoisson(lbda)
    inter =np.linspace(0,22,23)-0.5
    #plt.clf()
    plt.hist(ech, bins=inter,density='true',
        ,rwidth=0.6,label='Simulation')
    plt.legend()
    plt.show()
```

Exercice 12

p. 18

RA13

1.a) Justifions les trois points de la définition des suites adjacentes :

- On a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_n &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \\ &= \left(\frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq 0. \end{aligned}$$

La suite $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- De même, on prouve que la suite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En conclusion,

$$(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ et } (S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes.}$$

1.b) D'après le cours, les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, on sait alors qu'elles convergent vers une limite commune ℓ . On sait alors que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Autrement dit, la série converge.

2. Soit $n \geq 2$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Par conséquent,

$$u_n \sim v_n.$$

De plus,

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \right) \\ u_n - v_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Comme $(-1)^n / \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

$$1 - \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^{-1} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Par produit,

$$u_n - v_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

D'où

$$u_n - v_n \sim \frac{1}{n}.$$

3. Raisonnons par l'absurde en supposant que la série $\sum v_n$ converge.

→ Comme la série $\sum u_n$ est convergente, la série $\sum u_n - v_n$ est aussi convergente.

- La série $\sum \frac{1}{n}$ est positive et $u_n - v_n \sim \frac{1}{n}$.

→ Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{n}$ est alors convergente. Absurde, la série harmonique est divergente.

En conclusion : La série $\sum v_n$ est divergente.

Exercice 13

p. 18

RA14

1. D'après la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-\sqrt{3})^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (\sqrt{3}^k + (-\sqrt{3})^k). \end{aligned}$$

- Si k est un entier impair

$$\sqrt{3}^k + (-\sqrt{3})^k = 0.$$

- Si k est pair

$$\sqrt{3}^k + (-\sqrt{3})^k = 2 \cdot \sqrt{3}^{2p} = 2 \cdot 3^p$$

est un entier. Dès lors, $u_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est une somme d'entiers, c'est un entier.

2. Rappelons l'inégalité classique obtenue par concavité du sinus sur $[0; \pi/2]$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|.$$

On a

$$\begin{aligned} \left| \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n) \right| &= \left| \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n - \pi u_n) \right| \quad \text{car } u_n \in \mathbb{Z} \\ &= \left| \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n) \right| \\ &\leq \pi |2 - \sqrt{3}|^n. \end{aligned}$$

La série géométrique $\sum |2 - \sqrt{3}|^n$ est convergente car

$$(-1 < 2 - \sqrt{3} < 1).$$

Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)|$ est convergente. C'est la définition de l'absolue convergence.

Exercice 14

p. 18

RA15

Procédons par disjonction des cas :

→ Si $\beta < 2$ alors $n^\beta = o(n^2)$ et

$$n^2 + n^\beta \sim n^2, \quad \text{et} \quad \frac{n^\alpha}{n^2 + n^\beta} \sim \frac{1}{n^{2-\alpha}}.$$

D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la

série $\sum \frac{n^\alpha}{n^2 + n^\beta}$ est de même nature que la série de Riemann

$\sum \frac{1}{n^{2-\alpha}}$. On a donc convergence si et seulement si $2 - \alpha > 1$,

c'est-à-dire $\alpha < 1$.

→ Si $\beta = 2$,

$$\frac{n^\alpha}{n^2 + n^\beta} = \frac{1}{2n^{2-\alpha}}.$$

De nouveau, on a convergence si et seulement si $\alpha < 1$.

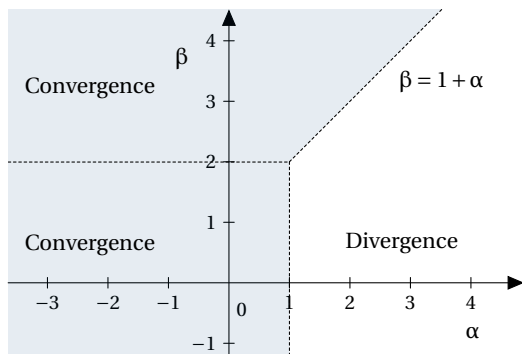
→ Si $\beta > 2$, $n^2 = o(n^\beta)$ et

$$n^2 + n^\beta \sim n^\beta, \text{ et } \frac{n^\alpha}{n^2 + n^\beta} \sim \frac{1}{n^{\beta-\alpha}}.$$

Par comparaison aux séries de Riemann, on a convergence si et seulement si $\beta - \alpha > 1$.

Résumons les différents cas de convergence :

- $\beta \leq 2$ et $\alpha < 1$;
- $\beta > 2$ et $\beta > 1 + \alpha$.



Exercice 15

p. 18

RA17

1. Rédaction 1, le signe de la différence

Soit $n \in \mathbb{N}$. Commençons par intervertir l'ordre de sommation.

$$\sum_{k=0}^n c_k = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_i b_{k-i}.$$

Puis avec le changement d'indice $j = k - i$, on obtient

$$\sum_{k=0}^n c_k = \sum_{i=0}^n a_i \left(\sum_{k=i}^n b_{k-i} \right) = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^{n-i} b_j.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \right) - \sum_{k=0}^n c_k &= \sum_{i=0}^n a_i \left(\sum_{j=0}^n b_j - \sum_{j=0}^{n-i} b_j \right) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=n-i+1}^n b_j \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Dès lors, } \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \right) \geq \sum_{k=0}^n c_k.$$

l'inégalité de droite se démontre de la même manière.

• Rédaction 2, via les ensembles.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$A_k = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq i \leq k \text{ et } i + j = k \right\}$$

$$= \left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = k \right\}$$

de sorte que

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{(i,j) \in A_k} a_i b_j.$$

Puis

$$\sum_{k=0}^n c_k = \sum_{k=0}^n \sum_{(i,j) \in A_k} a_i b_j = \sum_{(i,j) \in \bigcup_{k=0}^n A_k} a_i b_j.$$

On a aussi

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^n b_j \right) = \sum_{(i,j) \in [[0;n]]^2} a_i b_j.$$

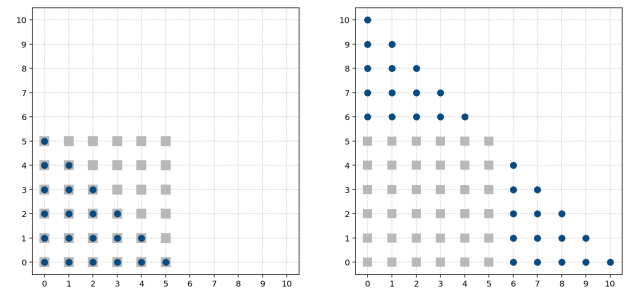
Les inclusions

$$\bigcup_{k=0}^n A_k \subset [[0;n]]^2 \subset \bigcup_{k=0}^{2n} A_k.$$

impliquent le résultat car les termes sont positifs.

Illustrations des inclusions précédentes pour $n = 5$. À gauche, on illustre l'inclusion à gauche : carrés gris pour les points de $[[0;5]]^2$, en bleu les points de $\bigcup_{k=0}^5 A_k$. À droite, l'inclusion de

droite où les points en bleu représentent maintenant $\bigcup_{k=0}^{10} A_k$.



2. Posons

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ et } B = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les propriétés des séries à termes positifs,

$$\sum_{k=0}^n a_k \leq A \text{ et } \sum_{k=0}^n b_k \leq B,$$

donc

$$\sum_{k=0}^n c_k \leq AB.$$

La série de terme général c_k est une série à termes positifs. La suite des sommes partielles est croissante et majorée par AB , elle converge d'après le *théorème de convergence monotone*. Par passage à la limite dans l'encadrement de la question 1), on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \leq AB \leq \sum_{k=0}^{+\infty} c_k, \text{ d'où } \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = AB.}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\frac{(a+b)^k}{k!} = \sum_{i=0}^k \frac{\binom{k}{i}}{k!} a^i b^{k-i} = \sum_{i=0}^k \frac{a^i}{i!} \cdot \frac{b^{k-i}}{(k-i)!}.$$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{a^n}{n!}$ et $b_n = \frac{b^n}{n!}$, on a

$$\frac{(a+b)^k}{k!} = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = c_k.$$

Les séries exponentielles de terme général $\frac{a^k}{k!}$ et $\frac{b^k}{k!}$ convergent. D'après la question 2)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \right).$$

Remarque. On retrouve ainsi, pour a et b positifs,

$$e^{a+b} = e^a \times e^b.$$

Précisons de plus que le résultat de la question 2) reste vrai lorsque les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ sont absolument convergentes.

Exercice 16

p. 18

RA18

L'exemple est un cas particulier des séries de Bertrand

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

En adaptant la preuve qui suit, on montre que la série de Bertrand associée à α et β converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

On pose $f : x \in I \mapsto \frac{1}{x \ln(x)^2}$.

La fonction f est continue et décroissante sur I .

Soient $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $x \in I$,

$$k \leq x \leq k+1 \Rightarrow f(k) \geq f(x) \geq f(k+1).$$

On intègre ces inégalités sur $[k; k+1]$,

$$\underbrace{\int_k^{k+1} f(k) dt}_{=f(k)} \geq \int_k^{k+1} f(t) dt \geq \underbrace{\int_k^{k+1} f(k+1) dt}_{=f(k+1)}.$$

Par sommation et la relation de Chasles

$$\sum_{k=2}^{n-1} f(k) \geq \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \geq \sum_{k=2}^{n-1} f(k+1),$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{k=2}^{n-1} f(k) \geq \int_2^n f(t) dt \geq \sum_{k=3}^n f(k).$$

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, notons S_n la somme partielle d'ordre n :

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k (\ln(k))^2}.$$

On a $S_n - f(n) \geq \int_2^n f(t) dt \geq S_n - f(2).$

On en déduit la majoration :

$$f(2) + \int_2^n f(t) dt \geq S_n.$$

Calculons maintenant l'intégrale à l'aide du changement de variable, de classe $\mathcal{C}^1$, $u = \ln(t)$, « $du = dt/t$ ».

$$\begin{aligned} \int_2^n f(t) dt &= \int_2^n \frac{dt}{t \ln(t)^2} = \int_{\ln(2)}^{\ln(n)} \frac{du}{u^2} \\ &= \left[-\frac{1}{u} \right]_{\ln(2)}^{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)}. \end{aligned}$$

En particulier, $\int_2^n f(t) dt \leq \frac{1}{\ln(2)}.$

En reprenant la majoration précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \quad S_n \leq f(2) + \frac{1}{\ln(2)}.$$

La suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée, d'après le théorème de la limite monotone, la suite est convergente. Dit autrement :

$$\text{La série } \sum \frac{1}{n(\ln(n))^2} \text{ est convergente.}$$

Exercice 17

p. 18

RA19

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Rédaction 1.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n k(a_{k-1} - a_k) \\ &= a_0 - a_1 \\ &\quad + a_1 - a_2 + a_1 - a_2 \\ &\quad + a_2 - a_3 + a_2 - a_3 + a_2 - a_3 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots \\ &\quad + a_{n-1} - a_n + a_{n-1} - a_n + \dots \\ &= a_0 \\ &\quad + a_1 \\ &\quad + a_2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_{n-1} \\ &\quad - na_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k - na_n. \end{aligned}$$

Rédaction 2.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n ka_{k-1} - \sum_{k=1}^n ka_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_k - \left(\sum_{k=0}^{n-1} ka_k + na_n \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} ((k+1) - k)a_k - na_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k - na_n. \end{aligned}$$

2.a) Les hypothèses sur la suite $(a_n)_n$ impose que cette dernière est positive

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geq 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décroissance de la suite $(a_n)_n$

$$\begin{aligned} na_{2n} &= a_{2n} + a_{2n} + \dots + a_{2n} \\ &\leq a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n} \\ &\leq \sum_{k=n}^{2n} a_k. \end{aligned}$$

$$0 \leq na_{2n} \leq 2 \sum_{k=n}^{+\infty} a_k.$$

On reconnaît à droite, le reste d'ordre $n-1$, en particulier

$$2 \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par le théorème d'encadrement

$$na_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

De même $(2n+1)a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

En distinguant termes d'indice pair et impair, il vient

$$na_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2.b) D'après ce qui précède.

$$\sum_{k=1}^n b_k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) - na_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - 0.$$

D'où l'existence de la limite et l'égalité.

3.a) Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage

$$\begin{aligned} n(a_n - a_{n+k}) &= n \sum_{j=n+1}^{n+k} a_{j-1} - a_j \\ &= n \sum_{j=n+1}^{n+k} \frac{b_j}{j}. \end{aligned}$$

Or pour $j \geq n+1$, $n/j \leq 1$. D'où la majoration demandée.

3.b) Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient

$$0 \leq na_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

On reconnaît à droite le reste d'ordre n de la série convergente $\sum b_k$, en particulier

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par le théorème d'encadrement

$$na_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On conclut alors à l'aide de la première question.

Exercice 18

p. 19

RA20

Procédons par disjonction des cas :

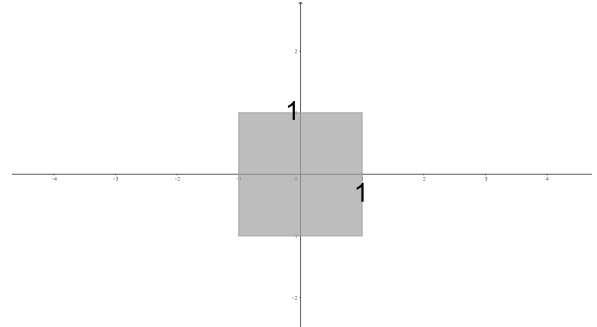
- Si $y \in]-1; 1[$

$$\left| \frac{x^n}{1+y^{2n}} \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |x^n|$$

→ Si $x \in]-1; 1[$, la série $\sum |x|^n$ converge absolument donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs la série $\sum x^n / (1+y^{2n})$ converge absolument, elle converge.

→ Si $x \notin]-1; 1[$, la série diverge grossièrement.

Graphiquement le carré $] -1; 1[^2$ est inclus dans le domaine de convergence.



- Si $y \in \{\pm 1\}$, on a maintenant

$$\left| \frac{x^n}{1+y^{2n}} \right| = \frac{|x^n|}{2}.$$

Il y a convergence si et seulement si $x \in]-1; 1[$.

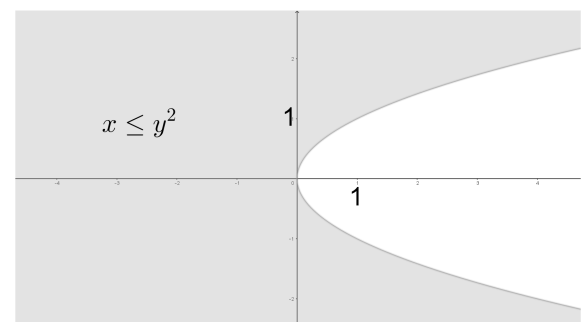
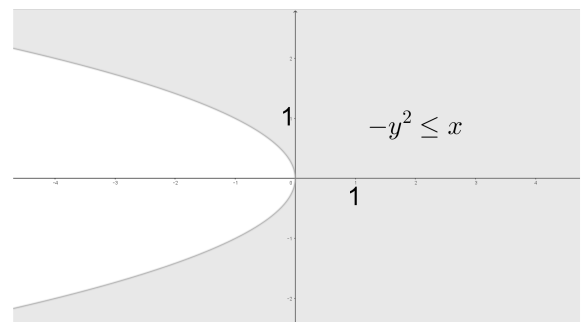
- Si $y \notin [-1; 1]$, on a maintenant

$$\left| \frac{x^n}{1+y^{2n}} \right| \sim \left| \frac{x}{y^2} \right|^n.$$

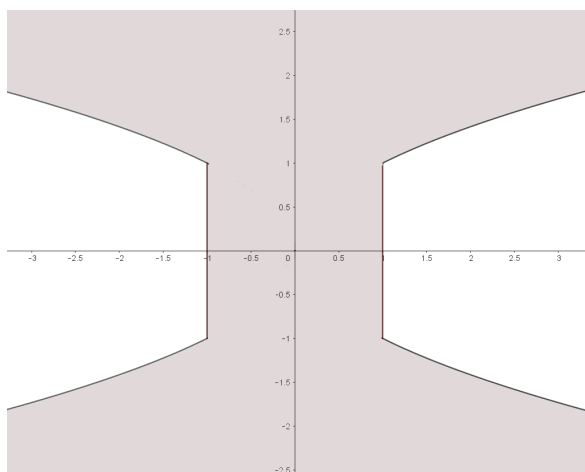
→ Si $x/y^2 \in]-1; 1[$, on a convergence de la série comme précédemment. On a donc la condition de convergence

$$-y^2 < x < y^2.$$

→ Si $x/y^2 \notin]-1; 1[$, on a divergence grossière.



Lorsqu'on regroupe le tout, on obtient :



Il y a convergence si et seulement si

$$|x| < \max(1, y^2).$$

Exercice 19

p. 19

RA21

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_n &= \ln n + a \ln \left(n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) + b \ln \left(n \left(1 + \frac{2}{n} \right) \right) \\ &= (1 + a + b) \ln n + a \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + b \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right). \end{aligned}$$

Il est donc nécessaire d'avoir $1 + a + b = 0$, car le cas contraire la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Supposons donc $1 + a + b = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} u_n &= a \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + (-1 - a) \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) \\ &= a \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - (1 + a) \left(\frac{2}{n} - \frac{4}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ u_n &= (-2 - a) \frac{1}{n} + \frac{3a + 4}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On obtient une nouvelle condition : $a = -2$ car dans le cas contraire

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (-2 - a) \frac{1}{n}.$$

Sachant que la série harmonique $\sum 1/n$ diverge, le critère d'équivalence des séries à termes de signe constant permet de s'assurer de la divergence de la série.

On suppose finalement $a = -2$. Alors $b = 1$ et $u_n = \frac{-1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.

2. Nous sommes donc dans le cas $a = -2$ et $b = 1$. On écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n (\ln(k) - 2 \ln(k+1) + \ln(k+2)) \\ &= \sum_{k=1}^n (\ln(k) - \ln(k+1)) + \sum_{k=1}^n (\ln(k+2) - \ln(k+1)) \\ &= \ln 1 - \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln 2 \quad \text{après télescopes} \\ \sum_{k=1}^n u_k &= -\ln 2 + \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\ln 2 + \ln 1 = -\ln 2 \end{aligned}$$

par la continuité de la fonction logarithme. Finalement, la somme de la série $\sum u_n$ vaut $-\ln 2$.

Exercice 20

p. 19

RA22

1. Prouvons l'inégalité de gauche par récurrence sur la propriété

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) : \prod_{i=1}^n (1 + u_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n u_i.$$

→ *Initialisation.* Par convention, un produit et une somme sur l'ensemble vide valent respectivement 1 et 0. Ainsi $1 \geq 1 + 0$, et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n+1} (1 + u_i) &= (1 + u_{n+1}) \prod_{i=1}^n (1 + u_i) \\ &= \prod_{i=1}^n (1 + u_i) + u_{n+1} \prod_{i=1}^n (1 + u_i). \end{aligned}$$

$$\text{D'après l'hypothèse de récurrence,} \quad \prod_{i=1}^n (1 + u_i) \geq \sum_{i=1}^n u_i.$$

$$\text{Comme la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est positive :} \quad \prod_{i=1}^n (1 + u_i) \geq 1.$$

$$\text{D'où} \quad \prod_{i=1}^{n+1} (1 + u_i) \geq \left(1 + \sum_{i=1}^n u_i \right) + u_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} u_i.$$

Dès lors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

→ *Conclusion.* Pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

• Prouvons maintenant l'inégalité de droite en utilisant l'inégalité de convexité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.$$

$$\text{Pour tout } k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad 1 + u_k \leq e^{u_k}$$

$$\text{Par produit, il vient} \quad \prod_{k=1}^n (1 + u_k) \leq \prod_{k=1}^n e^{u_k} = \exp \left(\sum_{k=1}^n u_k \right).$$

2. La suite $(u_n)_n$ est positive, donc la suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^n u_k)_n$ est croissante. Si la série $\sum u_n$ est convergente alors la suite des sommes partielles est majorée (théorème de convergence monotone). Sa limite M est un majorant. Par croissance de la fonction exponentielle

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n u_k \leq M \quad \text{puis} \quad \exp\left(\sum_{k=1}^n u_k\right) \leq e^M.$$

À l'aide de la question 1, il vient

$$\prod_{k=1}^n (1 + u_k) \leq e^M.$$

De plus, la suite des produits est croissante car les termes sont strictement positifs et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\prod_{k=1}^{n+1} (1 + u_k)}{\prod_{k=1}^n (1 + u_k)} = 1 + u_{n+1} \geq 1.$$

Finalement, la suite de terme général $\prod_{k=1}^n (1 + u_k)$ est croissante et majorée, elle converge.

Réciproquement, si la suite de terme général $\prod_{k=1}^n (1 + u_k)$ est convergente alors elle est majorée (disons pas L). Dans ce cas,

$$\sum_{k=1}^n u_k \leq 1 + \sum_{k=1}^n u_k \leq \prod_{k=1}^n (1 + u_k) \leq L.$$

La suite des sommes partielles de $\sum u_k$ est croissante est majorée, elle converge. Dit autrement, la série converge.

Exercice 21

p. 19

RA23

1.a) On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = S_k - S_{k-1}$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k v_k &= \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) v_k \\ &= \sum_{k=1}^n S_k v_k - \sum_{k=1}^n S_{k-1} v_k \\ &= \sum_{k=1}^n S_k v_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k v_{k+1} \quad (k-1 \leftarrow k) \\ \sum_{k=1}^n u_k v_k &= \sum_{k=1}^{n-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_n v_n - S_0 v_1. \end{aligned}$$

1.b) Notons dans la suite M un majorant de la suite $(|S_n|)_n$.

→ On a $|S_n v_n| \leq M v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ par hypothèse.

→ Comme (v_n) est décroissante $v_k - v_{k+1} \geq 0$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n-1} |S_k (v_k - v_{k+1})| \leq \sum_{k=1}^{n-1} M (v_k - v_{k+1}) = M (v_1 - v_n) \leq M v_1.$$

La suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^n |S_k (v_k - v_{k+1})|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc majorée. Comme les termes de la sommes sont positifs, elle est aussi croissante. D'après le théorème de convergence monotone, la suite des sommes partielles converge. Dit autrement, la série $\sum |S_k (v_k - v_{k+1})|$ converge.

$v_{k+1})|$ converge. Cette convergence absolue entraîne la convergence de $\sum S_k (v_k - v_{k+1})$. Ces deux points permettent d'affirmer que la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^n u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_n v_n - S_0 v_1$$

admet une limite finie. Finalement, $\sum u_k v_k$ converge.

2. On applique le résultat précédent avec les suites u, v définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad v_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Il reste à vérifier que ces suites satisfont aux hypothèses de la question 1.

→ $v_n = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $v_{n+1} - v_n = 1/(n+1) - 1/n < 0$ (la décroissance de v à partir du rang 1 suffit).

→ À l'aide des résultats sur les sommes géométriques

$$\left| \sum_{k=1}^n u_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| = \left| \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} \right| \leq 1.$$

Concluons : la série $\sum (-1)^n / n$ converge donc bien.

La réécriture de la question 1 s'appelle une transformation d'Abel. Elle est l'analogue discret d'une intégration par parties. En effet la « dérivée » d'une suite $(v_n)_n$ est la suite de terme général $(v_{n+1} - v_n)/(n+1 - n) = v_{n+1} - v_n$ et la « primitive » d'une suite $(u_n)_n$ est la suite $(\sum_{k=1}^n u_k)_n$.

Exercice 22

p. 19

RVA9

Remarque. Conjecturons le résultat.

Introduisons, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement A_i : « La i -ème boule tirée est bleue ». On a

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{r}{r+s}.$$

$(A_1, \overline{A_1})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_2) &= \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}_{A_1}(A_2) + \mathbf{P}(\overline{A_1}) \mathbf{P}_{\overline{A_1}}(A_2) \\ &= \frac{r}{r+s} \underbrace{\frac{r+1}{r+s+1}}_{\substack{r+1 \text{ boules B} \\ s \text{ boules R}}} + \frac{s}{r+s} \underbrace{\frac{r}{r+s+1}}_{\substack{r \text{ boules B} \\ s+1 \text{ boules R}}} \\ &= \frac{r(r+1) + s(r)}{(r+s)(r+s+1)} \\ \mathbf{P}(A_2) &= \frac{r}{r+s}. \end{aligned}$$

On constate que l'on retrouve le même résultat que si l'on avait tiré directement dans la seconde urne. On conjecture que ce résultat perdure à chaque étape.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(A_n) = \frac{r}{r+s}.$$

→ *Initialisation.* $\mathbf{P}(A_1) = \frac{r}{r+s}$. La propriété est vraie au rang 1.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathbf{P}(A_n) = \frac{r}{r+s}$.
 $(A_n, \overline{A_n})$ est un système complet d'événements possibles.
 D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n) \mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbf{P}(\overline{A_n}) \mathbf{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= \frac{r}{r+s} \cdot \underbrace{\frac{r+1}{r+s+1}}_{\substack{r+1 \text{ boules B} \\ s \text{ boules R}}} + \frac{s}{r+s} \cdot \underbrace{\frac{r}{r+s+1}}_{\substack{r \text{ boules B} \\ s+1 \text{ boules R}}} \\ &= \frac{r(r+1) + s(r)}{(r+s)(r+s+1)} \\ \mathbf{P}(A_{n+1}) &= \frac{r}{r+s}. \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang suivant.

→ *Conclusion.* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(A_n) = \frac{r}{r+s}$.

Exercice 23

p. 19

RVA10

1. D'après les lois de De Morgan, $\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}$.

D'après le corollaire de la limite monotone

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right)\right) \\ &\stackrel{\text{lois de De Morgan}}{=} 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right). \end{aligned}$$

Par hypothèse $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants. Donc $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est aussi une suite d'événements mutuellement indépendants et

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(\overline{A_k}) = \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(A_k)).$$

$$\text{Puis, } \boxed{\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(A_k))\right)}.$$

2. Raisonnons par double implication sur la première équivalence.

⇒ Si $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(A_k))\right) = 0$.

$$\text{Or } \ln\left(\prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(A_k))\right) = \sum_{k=1}^n \ln(1 - \mathbf{P}(A_k)).$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln(1 - \mathbf{P}(A_k)) = -\infty.$$

Finalement, La série $\sum \ln(1 - \mathbf{P}(A_k))$ diverge.

⇐ On suppose que la série $\sum \ln(1 - \mathbf{P}(A_k))$ diverge.

Cette série est à termes négatifs, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln(1 - \mathbf{P}(A_k)) = -\infty$. D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(A_k)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(1 - \mathbf{P}(A_k))\right) = 0.$$

$$\text{Puis, } \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1.$$

Pour la seconde équivalence, il suffit de montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - \mathbf{P}(A_k)) \text{ converge} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) \text{ converge}.$$

⇒ Si $\sum \ln(1 - \mathbf{P}(A_k))$ converge, alors le terme général tend vers 0. La série est à termes négatifs et $\ln(1 - \mathbf{P}(A_k)) \sim (-\mathbf{P}(A_k))$.

D'après les critères de convergence des séries à termes de signe constant, les séries

$\sum \ln(1 - \mathbf{P}(A_k))$ et $\sum -\mathbf{P}(A_k)$ sont de même nature, donc

$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k)$ converge.

⇐ Si $\sum \mathbf{P}(A_k)$ converge, alors le terme général tend vers 0. La série est à termes positifs et $-\ln(1 - \mathbf{P}(A_k)) \sim \mathbf{P}(A_k)$.

D'après les critères sur les séries à termes positifs, les séries $\sum \mathbf{P}(A_k)$ et

$\sum -\ln(1 - \mathbf{P}(A_k))$ sont de même nature, donc $\sum \ln(1 - \mathbf{P}(A_k))$ converge.

En conclusion, les équivalences sont prouvées.

3. Introduisons, les événements :

- A : « tirer au moins une fois la boule rouge ».
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les événements A_k : « La k -ième boule tirée est la boule rouge. »

L'événement A est réalisé si et seulement si on réalise l'un des événements A_k :

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k.$$

De plus, pour les trois protocoles $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements indépendants car, pour tout $k \geq 1$, la composition de l'urne au k -ième ne dépend pas des résultats des tirages précédents. On peut donc utiliser les équivalences montrées à la question 2).

3.a) Pour le k -ième tirage, la composition de l'urne est d'une boule rouge et une boule blanche. Donc $\mathbf{P}(A_k) = \frac{1}{2}$. Ce terme ne tend pas vers 0, la série $\sum \mathbf{P}(A_k)$ diverge. Donc

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = 1}.$$

Presque sûrement, la boule rouge est tirée.

3.b) Pour le k -ième tirage, l'urne contient la boule rouge et k boules blanches (on a rajouté $k-1$ boules blanches). Donc $\mathbf{P}(A_k) = \frac{1}{k+1}$.

La série $\sum \mathbf{P}(A_k)$ est la série harmonique (décalée). Elle diverge. De nouveau,

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = 1}.$$

3.c) Pour le premier tirage l'urne contient 4 boules. Pour le second tirage, elle en contient 9, puis 16 boules. Montrons, par récurrence que le nombre de boules dans l'urne pour le n -ième tirage est $N_n = (n+1)^2$.

→ *Initialisation.* $n = 1$. On a $N_1 = 4 = 2^2$. La propriété est vraie au rang 1.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'urne contient $(n+1)^2$ boules pour le n -ième tirage. Alors, pour le $(n+1)$ -ième tirage on rajoute $2n+3$ boules. Le nombre de boules dans l'urne est alors de $N_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = (n+2)^2$.

→ *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n+1)^2$ boules dans l'urne pour le n -ième tirage.

On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{P}(A_k) = \frac{1}{(k+1)^2}$.

La série de terme général $\mathbf{P}(A_k)$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc convergente. À l'aide de la question 2), on peut simplement affirmer que $\mathbf{P}(A) \neq 1$.

Calculons $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - \mathbf{P}(A_k))$ avec la question 1).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \ln(1 - \mathbf{P}(A_k)) &= \ln\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2}\right) \\ &= \ln(k) + \ln(k+2) - 2\ln(k+1). \end{aligned}$$

Soit $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln(1 - \mathbf{P}(A_k)) &= \sum_{k=1}^n \ln(k) + \sum_{k=1}^n \ln(k+2) - 2 \sum_{k=1}^n \ln(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln(k) + \sum_{k'=3}^{n+2} \ln(k') - 2 \sum_{k'=2}^{n+1} \ln(k') \\ &= \ln(2) + \ln(n+1) + \ln(n+2) - 2(\ln(2) + \ln(n+1)) \\ &= -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2) + \ln(1) = -\ln(2). \end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(A_k)) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Exercice 24

p. 20

RVA11

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de Piles. Par indépendance des lancers, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$. On sait d'après le cours que A et B sont indépendants si et seulement si A et $\bar{B}$ le sont aussi. Calculons alors $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(\bar{B})$ et $\mathbf{P}(A \cap \bar{B})$.

- $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(X \leq 1) = \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{2^n}$.
- $\mathbf{P}(\bar{B}) = \mathbf{P}([X=0] \cup [X=n]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
- $\mathbf{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbf{P}(X=0) = \frac{1}{2^n}$.
- Enfin, nous avons les équivalences :

$$\begin{aligned} A \text{ et } \bar{B} \text{ sont indépendants} &\iff \mathbf{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\bar{B}) \\ &\iff \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\iff 2^{n-1} = n+1 \end{aligned}$$

Cette égalité est vérifiée pour $n = 3$ uniquement. On peut le montrer en vérifiant par récurrence que pour tout $n \geq 4$, $2^{n-1} > n+1$.

Finalement, A et B sont indépendants uniquement lorsque $n = 3$.



On peut naturellement résoudre cet exercice sans poser de variable aléatoire. Seulement, le recours à la loi binomiale permet d'éviter des écritures fastidieuses d'événements.

Exercice 25

p. 20

RVA12

1.

```
import numpy.random as rd

def simuN():
    u=rd.randint(-1,2)
    v=rd.randint(-1,2)
    Delta=4*u**2-4*v
    if Delta>0:
        return 2
    elif Delta==0:
        return 1
    return 0
```

2. Soit $\omega \in \Omega$. Le discriminant du polynôme Q_ω est $\Delta(\omega) = 4(U(\omega)^2 - V(\omega))$. Précisons que U^2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $2/3$ car U^2 est à valeur dans $\{0; 1\}$ et

$$\mathbf{P}(U^2 = 1) = \mathbf{P}([U=1] \cup [U=-1]) = \mathbf{P}(U=1) + \mathbf{P}(U=-1) = \frac{2}{3}.$$

La variable N est à valeurs dans $\{0; 1; 2\}$ et par indépendance

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N=0) &= \mathbf{P}(\Delta < 0) = \mathbf{P}(U^2 < V) = \mathbf{P}([U^2=0] \cap [V=1]) \\ &= \mathbf{P}(U^2=0) \times \mathbf{P}(V=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \\ \mathbf{P}(N=1) &= \mathbf{P}(\Delta = 0) = \mathbf{P}([([U^2=0] \cap [V=0]) \cup ([U^2=1] \cap [V=1])]) \\ &= \mathbf{P}(U^2=0) \mathbf{P}(V=0) + \mathbf{P}(U^2=1) \mathbf{P}(V=1) \quad \text{indépendance} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Enfin } \mathbf{P}(N=2) = 1 - \mathbf{P}(N=0) - \mathbf{P}(N=1) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5}{9}.$$

Exercice 26

p. 20

RVA16

1. Si le dé est équilibré, on modélise la situation avec

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[1,6]}.$$

2. Si le dé est équilibré et les lancers mutuellement indépendants, alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, 1/2).$$

3. Si les boules sont indiscernables, les tirages mutuellement indépendants, alors X compte le nombre de succès dans une répétition de 20 épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes avec $p = 5/15 = 1/3$ comme probabilité de succès. Ainsi,

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(20, 1/3).$$

4. Si on note de 1 à 52, les places des différentes cartes, alors X désigne la position de la dame de cœur. Si la répartition des cartes est équiprobable,

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[1,52]}.$$

5. Supposons les tirages mutuellement indépendants. X est le rang du premier succès dans une succession d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes. Comme $p = 1/n$ est la probabilité de succès d'une expérience :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/n).$$

6. Si les choix sont mutuellement indépendants,

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, 1/n).$$

Exercice 27

p. 20

RVA17

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ ses colonnes. La matrice M est de rang 1 si, et seulement si, il existe une colonne C_{i_0} non nulle et pour tout $i \in [1; n]$ la colonne C_i est colinéaire à C_{i_0} . C'est-à-dire, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $C_i = \lambda_i C_{i_0}$.

Si on pose $U = C_{i_0}$ et $V = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$, on a bien

$$U^t V = \begin{bmatrix} \lambda_1 C_{i_0} & \lambda_2 C_{i_0} & \dots & \lambda_n C_{i_0} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix} = M.$$

La réciproque est plus directe : si M s'écrit sous la forme $U^t V$, alors toutes les colonnes sont proportionnelles et la rang de M ne peut excéder 1. De plus, U et V sont non nulles, il existe $i, j \in [1; n]$ tels que $U[i] \neq 0, V[j] \neq 0$. Dans ce cas

$$M[i, j] = U[i]V[j] \neq 0.$$

La matrice M est non nulle, elle est de rang au moins 1. Finalement, la matrice est de rang 1.

2.a)

$$U_X^t U_Y = \begin{bmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \vdots \\ P(X=n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(Y=1)P(Y=2)\dots P(Y=n) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} P(X=1)P(Y=1) & P(X=1)P(Y=2) & \dots & P(X=1)P(Y=n) \\ P(X=2)P(Y=1) & P(X=2)P(Y=2) & \dots & P(X=2)P(Y=n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(X=n)P(Y=1) & P(X=n)P(Y=2) & \dots & P(X=n)P(Y=n) \end{bmatrix}.$$

Par définition de l'indépendance de X et Y

$$U_X^t U_Y = \begin{bmatrix} P([X=1] \cap [Y=1]) & \dots & P([X=1] \cap [Y=n]) \\ P([X=2] \cap [Y=1]) & \dots & P([X=2] \cap [Y=n]) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P([X=n] \cap [Y=1]) & \dots & P([X=n] \cap [Y=n]) \end{bmatrix} = M.$$

La matrice M non nulle est, d'après la question 1, de rang 1.

- 2.b)i. La famille $([Y = i])_{i \in [1; n]}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales s'applique

$$P([X = j]) = \sum_{i=1}^n P([X = j] \cap [Y = i]) = \sum_{i=1}^n m_{ij}.$$

D'où le résultat.

- 2.b)ii. On a

$$F = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n) = \text{Vect} C_1, C_2, \dots, C_n, C_1 + C_2 + \dots + C_n \\ = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n, U_X).$$

comme M est de rang 1, toutes les matrices colonnes sont colinéaires, F est de dimension 1. De plus, $U_X \neq 0$ (par exemple $\sum_{i=1}^n P(X = i) = 1$, il existe i_0 tel que $P(X = i_0) \neq 0$). Donc

$$F = \text{Vect}(U_X).$$

Le résultat s'en déduit.

- 2.b)iii. On a donc pour tout couple $(i, j) \in [1; n]^2$

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \beta_j \cdot P([X = i]) \quad (\bullet)$$

Par somme sur $i \in [1; n]$

$$P([Y = j]) = \sum_{i=1}^n P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{i=1}^n \beta_j P([X = i]) \\ = \beta_j \sum_{i=1}^n P([X = i]) = \beta_j$$

car $([X = i])_{i \in [1; n]}$ est un système complet d'événements.

- 2.b)iv. La relation $(\bullet)$ devient pour tout $(i, j) \in [1; n]^2$.

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P([X = i]) \cdot P([Y = j]).$$

Par définition :

Les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 28

p. 21

RVA18

Passons par l'événement contraire. A n'est pas inversible si et seulement si $\det(A) = 0$.

$$\det(A) = 0 \iff [X^2 - Y^2 = 0] \iff [X^2 = Y^2] \iff [X = Y]$$

$(Y = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
 P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X=Y] \cap [Y=k]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X=k] \cap [Y=k]) \text{ X et Y indépendantes} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \times P(Y=k) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 (1-p)^{2(k-1)} k' = k-1 \\
 &= p^2 \sum_{k'=0}^{+\infty} ((1-p)^2)^{k'} \\
 &\quad \text{série géométrique de raison } (1-p)^2 \in]0,1[\\
 &= \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.
 \end{aligned}$$

$$P(\text{« A inversible »}) = 1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p)}{2-p}.$$

Exercice 29

p. 21

RVA19

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \lambda - 1$,

$$\begin{aligned}
 P([X \geq n]) &= P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} [X=k]\right) \\
 &= \sum_{k=n}^{+\infty} P([X=k]) \\
 &= \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \cdot \frac{\lambda^{k-n}}{k!} \cdot n! \\
 &= P([X=n]) \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \frac{n!}{k!} \\
 &= P([X=n]) \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i \frac{n!}{(i+n)!}
 \end{aligned}$$

Or pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$n!(n+1)^i$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n \times \overbrace{(n+1) \times (n+1) \times \dots \times (n+1)}^{i \text{ facteurs}} \\
 &\leq 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n \times (n+1) \times (n+2) \times \dots \times (n+i) \\
 &\leq (n+i)!
 \end{aligned}$$

D'où

$$\left(\frac{\lambda^i}{n+1}\right) \frac{n!}{(i+n)!} \leq \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^i.$$

Or pour $\lambda - 1 < n$, $\lambda/(n+1) \in]-1, 1[$, la série géométrique $\sum (\lambda/(n+1))^i$ converge avec

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+1}} = \frac{n+1}{n+1-\lambda}.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
 P([X \geq n]) &\leq P([X=n]) \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^i \\
 &\leq P([X=n]) \frac{n+1}{n+1-\lambda}.
 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme

$$P([X \geq n]) \geq P([X=n]).$$

On en déduit l'encadrement.

$$P([X=n]) \leq P([X \geq n]) \leq \frac{n+1}{n+1-\lambda} P([X=n])$$

Avec $P([X=n]) > 0$,

$$1 \leq \frac{P([X \geq n])}{P([X=n])} \leq \underbrace{\frac{n+1}{n+1-\lambda}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1}.$$

Par le théorème d'encadrement

$$\frac{P([X \geq n])}{P([X=n])} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

C'est-à-dire

$$P([X \geq n]) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} P([X=n]).$$

3.

$$\frac{P([X > n])}{P([X=n])} = \frac{P([X \geq n]) - P([X=n])}{P([X=n])} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'où le résultat.

Exercice 30

p. 21

RVA20

import numpy as np

```
def mode(Loi, val):
    m = max(Loi)
    for i in range(len(Loi)):
        if Loi[i] == m:
            print(val[i])
```

Exemple avec la loi d'un résultat de deux
dés

```
val = np.arange(2, 13)
Loi = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1]) / 36
```

mode(Loi, val)

7

Exercice 31

p. 21

RVA21

1. Posons pour $k \in [0; n]$, $u_k = P(X=k) > 0$.

Étudions les variations de la suite. Pour $k \in [0; n-1]$.

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \\
 &= \frac{n! k! (n-k)! p}{n! (k+1)! (n-k-1)! (1-p)} \\
 &= \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}.
 \end{aligned}$$

(u_n) est strictement croissante lorsque

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 &\iff \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} > 1(k+1)(1-p) > 0 \\ &\iff (n-k)p > (k+1)(1-p) \\ &\iff k < p(n+1) - 1. \end{aligned}$$

Or $-1 < p(n+1) - 1 < n$. On distingue alors 4 cas :

- $p(n+1) - 1 < 0$. Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$. La suite $(u_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est strictement décroissante.

On a un seul mode : 0.

- $p(n+1) - 1 > n - 1$. Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$. La suite $(u_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est strictement croissante.

On a un seul mode : n .

- $0 \leq p(n+1) - 1 \leq n - 1$. On a deux sous-cas :

→ Premier sous-cas $p(n+1) - 1 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Autrement dit, il existe $k_0 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $k_0 = p(n+1) - 1$.

Pour $k < k_0$ ($0 \leq k \leq k_0 - 1$), on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$, donc $u_0 < u_1 < \dots < u_{k_0}$.

Puis $\frac{u_{k_0}}{u_{k_0+1}} = 1$, donc $u_{k_0} = u_{k_0+1}$.

Puis pour $k > k_0$ ($k_0 + 1 \leq k \leq n$), on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$, donc $u_{k_0+1} < u_1 < \dots < u_n$.

On a deux modes : $p(n+1) - 1$ et $p(n+1)$.

→ Second sous-cas $p(n+1) - 1 \notin \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Alors il existe $k_0 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $k_0 < p(n+1) - 1 < k_0 + 1$.

$$k_0 = \lfloor p(n+1) - 1 \rfloor = \lfloor p(n+1) \rfloor - 1$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x

Pour $k \leq k_0$, on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$, donc $u_0 < u_1 < \dots < u_{k_0+1}$.

Pour $k_0 + 1 \leq k \leq n - 1$, on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$, donc $u_{k_0+1} < u_{k_0+2} < \dots < u_n$.

On a un seul mode : $k_m = \lfloor p(n+1) \rfloor$.

2. On écrit une fonction `liste_loi_binom` qui renvoie la liste des valeurs pour construire l'histogramme. On utilise, pour $1 \leq k \leq n$, la relation $\mathbf{P}(X = k) = \frac{(n-k+1)p}{kp} \mathbf{P}(X = k-1)$.

```
def liste_loi_binom(n,p):
    proba=(1-p)**n # P(X=0)
    b=[proba]
    for k in range(1,n+1):
        proba=((n-k+1)*p)/(k*(1-p))*proba
        b.append(proba)
    return b
```

Pour afficher l'histogramme on utilise `plt.bar`.

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
n=9
x = range(n+1)
p=0.5
width = 0.1
plt.bar(x, liste_loi_binom(n,p),width)
```

Exercice 32

p. 21

RVA22

1. Posons pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \mathbf{P}(X = k)$. Étudions les variations de cette suite. Pour $k \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{k+1}.$$

Donc $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \iff \frac{\lambda}{k+1} > 1 \iff k < \lambda - 1.$

- Nous distinguons trois cas :

→ $0 < \lambda < 1$. Alors $\lambda - 1 < 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$. La suite est strictement décroissante.

On a un seul mode : 0.

→ $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Soit $k_0 = \lambda - 1$. Alors $u_{k_0+1} = u_{k_0}$.

Pour $k < k_0$, on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$, donc $u_0 < u_1 < \dots < u_{k_0}$.

Pour $k > k_0$, on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$, donc $u_{k_0+1} > u_{k_0+2} > \dots > u_k > u_{k+1} > \dots$

On a deux modes : $k_0 = \lambda - 1$ et $k_0 + 1 = \lambda$.

→ $\lambda > 1$ et $\lambda \notin \mathbb{N}^*$. Soit $k_0 = \lfloor \lambda - 1 \rfloor$. Alors $k_0 < \lambda - 1 < k_0 + 1$.

Pour $k \leq k_0$, on a $k < \lambda - 1$. Donc $u_k < u_{k+1}$. D'où $u_0 < u_1 < \dots < u_{k_0+1}$.

Pour $k \geq k_0 + 1$, on a $k > \lambda - 1$. Donc $u_k > u_{k+1}$. D'où $u_{k_0+1} > u_{k_0+2} > \dots$

On a un mode : $k_0 + 1 = \lfloor \lambda \rfloor$.

2. On écrit une fonction `liste_loi_Poisson` qui renvoie la liste des valeurs pour construire l'histogramme. On utilise, pour $1 \leq k \leq n$, la relation $\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda}{k} \mathbf{P}(X = k-1)$. Pour afficher l'histogramme, on utilise `plt.bar`.

```
def liste_loi_Poisson(n):
    proba=np.exp(-n) # P(X=0)
    b=[proba]
    for k in range(1,n+1):
        # P(X=k) = P(X=k-1) * n / k
        proba = proba * n / k
        b.append(proba)
    return b
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
n=9
x = range(n+1)
n=3.5
width = 0.1
plt.bar(x, liste_loi_Poisson(n),width)
```

Exercice 33

p. 21

RVA23

- 1.a) Les variables étant X, Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, I est à valeurs

dans $\mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(I \geq k) &= \mathbf{P}([X \geq k] \cap [Y \geq k]) \\ &= \mathbf{P}(X \geq k) \mathbf{P}(Y \geq k) \quad (\text{indépendance}) \\ &= \mathbf{P}(X \geq k)^2 \quad (X, Y \text{ même loi}) \\ \mathbf{P}(I \geq k) &= \left(q^{k-1}\right)^2 \quad (\text{loi géométrique})\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(I = k) &= \mathbf{P}([I \geq k] \setminus [I \geq k+1]) \\ &= \mathbf{P}(I \geq k) - \mathbf{P}(I \geq k+1) \\ &\quad \text{car } [I \geq k+1] \subset [I \geq k] \\ &= q^{2k-2} - q^{2k} \\ &= q^{2k-2} (1 - q^2).\end{aligned}$$

On constate que I suit une loi géométrique de paramètre

$$p' = 1 - q^2 = p(2 - p).$$

1.b) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. L'événement $[D = 0]$ est réalisé si et seulement si $\max(X, Y) = \min(X, Y)$ est réalisé. C'est-à-dire, si et seulement, l'événement $[X = Y]$ est réalisé. D'où

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([I = i] \cap [D = 0]) &= \mathbf{P}([X = i] \cap [X = Y]) \\ &= \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = i]) \\ &= \mathbf{P}(X = i) \cdot \mathbf{P}(Y = i).\end{aligned}$$

On trouve

$$\mathbf{P}([I = i] \cap [D = 0]) = \left(pq^{i-1}\right)^2.$$

Soit $d \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([I = i] \cap [D = d]) &= \mathbf{P}([\min(X, Y) = i] \cap [\max(X, Y) = d + i]) \\ &= \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = d + i]) \cup ([X = d + i] \cap [Y = i]) \\ &= \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = d + i]) + \mathbf{P}([X = d + i] \cap [Y = i]) \\ &= 2\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = d + i]) \quad (\text{même loi}) \\ &= 2\mathbf{P}(X = i) \mathbf{P}(Y = d + i) \quad (\text{indépendance}) \\ &= 2p \cdot q^{i-1} \cdot p \cdot q^{d+i-1} \\ &= 2p^2 q^{d+2i-2}.\end{aligned}$$

1.c) La variable D est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On a vu que $[D = 0]$ est réalisé si et seulement si $[X = Y]$. En reprenant le calcul de l'exercice 28, on trouve

$$\mathbf{P}(D = 0) = \frac{p}{2 - p}.$$

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Les événements $([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forment un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(D = d) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([D = d] \cap [I = i]) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} 2p^2 q^{d+2i-2} \\ &= 2p^2 q^{d-2} \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i} \\ &= 2p^2 q^{d-2} \cdot \frac{q^2}{1 - q^2}.\end{aligned}$$

Comme $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$, on trouve

$$\mathbf{P}(D = d) = 2 \frac{pq^d}{1 + q}.$$

1.d) Soit $(i, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Si $d \neq 0$, alors d'après les calculs précédents

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(I = i) \mathbf{P}(D = d) &= q^{2i-2} (1 - q^2) \times \frac{2pq^d}{1 + q} \\ &= q^{2i-2+d} \times 2p(1 - q) \\ &= 2p^2 q^{d+2i-2} \\ &= \mathbf{P}([I = i] \cap [D = d]).\end{aligned}$$

On vérifie que cette relation est aussi valable pour $d = 0$. C'est bien la définition de l'indépendance de D et I .

2.a) Comme $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événement, on applique la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(D = 0) &= \mathbf{P}(M = I) \\ &= \mathbf{P}(X = Y) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}([X = Y] \cap [X = k]) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(Y = k) \mathbf{P}(X = k) \\ b &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p_k^2.\end{aligned}$$

2.b) On a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(I > k) &= \mathbf{P}([X > k] \cap [Y > k]) \\ &= \mathbf{P}(X > k) \mathbf{P}(Y > k) \\ &= \mathbf{P}(X > k)^2 \\ &= \left(\sum_{i>k} \mathbf{P}(X = i)\right)^2 \\ \mathbf{P}(I > k) &= \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.\end{aligned}$$

2.c) D'une part, par indépendance de D et I , on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([I > k] \cap [D = 0]) &= \mathbf{P}(I > k) \mathbf{P}(D = 0) \\ &= \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2 \times b.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([I > k] \cap [D = 0]) &= \mathbf{P}([I > k] \cap [X = Y]) \\ &= \mathbf{P}([X > k] \cap [X = Y]) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{i>k} [X = i] \cap [X = Y]\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{i>k} [X = i] \cap [Y = i]\right) \\ &= \sum_{i>k} \mathbf{P}([X = i]) \mathbf{P}(Y = i) \\ \mathbf{P}([I > k] \cap [D = 0]) &= \sum_{i>k} p_i^2.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.d)i) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=k}^{+\infty} p_i^2 &= \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 \right) + p_k^2 \\
 &= b \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i \right)^2 + p_k^2 \\
 &= b \left(\sum_{i=k}^{+\infty} p_i - p_k \right)^2 + p_k^2 \\
 &= b \left(\sum_{i=k}^{+\infty} p_i \right)^2 - 2bp_k \sum_{i=k}^{+\infty} p_i + (1+b)p_k^2 \\
 &= \sum_{i=k}^{+\infty} p_i^2 - 2bp_k \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i + (1-b)p_k^2.
 \end{aligned}$$

D'où

$$-2bp_k \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i + (1-b)p_k^2 = 0.$$

La relation s'en déduit en remarquant que

$$\mathbf{P}(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i.$$

2.d)ii) Pour $k = 1$,

$$\begin{aligned}
 (1-b)p_1 &= 2b\mathbf{P}(X > 1) \\
 &= 2b(1 - \mathbf{P}(X \leq 1)) \\
 &= 2b(1 - \mathbf{P}(X = 1)) \quad \text{car } X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\
 (1-b)p_1 &= 2b(1 - p_1).
 \end{aligned}$$

Dès lors $((1-b) + 2b)p_1 = 2b$. Soit

$$p_1 = \frac{2b}{1+b}.$$

2.d)iii) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La relation obtenue à la question d)i) donne

$$\begin{aligned}
 (1-b)p_k &= 2b\mathbf{P}(X > k) \\
 (1-b)p_{k+1} &= 2b\mathbf{P}(X > k+1).
 \end{aligned}$$

Par différence

$$\begin{aligned}
 (1-b)(p_k - p_{k+1}) &= 2b(\mathbf{P}(X > k) - \mathbf{P}(X > k+1)) \\
 &= 2b(\mathbf{P}([X > k] \setminus [X > k+1])) \\
 &= 2b\mathbf{P}(X = k+1) \\
 &= 2bp_{k+1}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi} \quad (1-b)p_k = (1-b)p_{k+1} + 2bp_{k+1}.$$

$$\text{Puis} \quad \frac{(1-b)}{1+b} p_k = p_{k+1}.$$

2.e) La suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite géométrique de raison

$$q = \frac{1-b}{1+b}.$$

Nécessairement, la loi commune de X et Y est une loi géométrique.

Séries de pile et face

- 1) D'après les lois de De Morgan, il suffit d'établir $\overline{A} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$. Procédons par double inclusion.
- (C) Soit $\omega \in \overline{A}$. Alors la séquence s apparaît un nombre fini de fois. Soit j le rang de la dernière apparition de s , 1 si s n'apparaît jamais. On a $\omega \in \overline{A_j}$. Donc $\omega \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$.
- (D) Soit $\omega \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$. Il existe un indice j tel que $\omega \in \overline{A_j}$. Donc toutes les apparitions de s se font avant le $(k \times j + 1)$ -ième lancer. On a au plus $(k \times j + 1)$ apparitions de s . Ainsi $\omega \in \overline{A}$.
- 2) La suite (A_i) est une suite décroissante : si $\omega \in A_{i+1}$ alors s apparaît au moins une fois après le $(k(i+1)+1)$ -ième lancer. Cette apparition se fait après le $(k \times i + 1)$ -ième lancer. Donc $\omega \in A_i$. D'où $A_{i+1} \subset A_i$. D'après le théorème de la limite monotone,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

- 3) Soit $\omega \in \bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j$, alors, il existe $j \geq i$ tel que $\omega \in B_j$. Donc la séquence est réalisée à partir du lancer $kj + 1 \geq ki + 1$. Donc $\omega \in A_i$. On a montré

$$\bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j \subset A_i.$$

- 4) a) Soient $j_1 < j_2 < \dots < j_p$. B_{j_k} concerne les lancers $k \times j_1 + 1$ à $(k+1)j_1$ qui précèdent strictement les lancers $k \times j_2 + 1$ à $(k+1)j_2$, et ainsi de suite. Donc, dans l'intersection, on considère kp lancers distincts.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in \{j_1, \dots, j_p\}} B_j\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{kp} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^p = \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_p\}} \mathbb{P}(B_j).$$

Les événements (B_j) sont mutuellement indépendants.

- b) Les événements $(\overline{B_j})$ sont mutuellement indépendants. Donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=i}^n \overline{B_j}\right) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^n.$$

- c) On en déduit donc (encore les lois de De Morgan)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=i}^n B_j\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=i}^n \overline{B_j}\right) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^n.$$

D'après le théorème de la limite monotone,

$$\mathbb{P}(C_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=i}^n B_j\right) = 1.$$

- 5) D'après la question 3), $C_i \subset A_i$. Donc $\mathbb{P}(A_i) = 1$. La question permet alors de conclure

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

Autrement dit,

s apparaît dans la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une infinité de fois avec une probabilité de 1.

SOLUTION DU SUJET N° 37

SOURCE ESCP 2022

- (a) Par définition pour tout x réel, $x - 1 < [x] \leq x$. Ainsi $[x] \sim x$. Donc $[\sqrt{n}] \sim \sqrt{n}$.
(b) On a $0 \leq \lambda_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$; donc $\sum \lambda_n$ converge par comparaison avec une série de RIEMANN convergente.
- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(X_n \neq 0) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - e^{-\lambda_n}$ qui est équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ à λ_n car $\lambda_n \rightarrow 0$. Comme $\sum_{n \geq 1} \lambda_n$ converge, il est en de même pour $\sum_{n \geq 1} P(X_n \neq 0)$.
(b) C'est quasiment du cours. Se démontre par récurrence.
(c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$P\left(\bigcup_{n=N}^{N+p} [X_n \neq 0]\right) \leq \sum_{n=N}^{N+p} P(X_n \neq 0) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} P(X_n \neq 0)$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, le théorème de la limite monotone donne :

$$0 \leq P\left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} [X_n \neq 0]\right) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} P(X_n \neq 0)$$

Enfin, on fait tendre N vers $+\infty$, le reste de la série convergente de terme général $P(X_n \neq 0)$ tend vers 0 et par suite, $P\left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} [X_n \neq 0]\right)$ aussi.

- (d) Pour tout N de $\mathbb{N}^*$, on pose $A_N = \bigcup_{n \geq N} [X_n \neq 0]$. La suite (A_N) est une suite décroissante d'événements, donc

$$0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} P(A_N) = P\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty} A_N\right) = P\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcup_{n \geq N} [X_n \neq 0]\right)$$

- (e) En passant au complémentaire, on a : $P\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcap_{n \geq N} [X_n = 0]\right) = 1$; ceci signifie que presque sûr il existe un rang à partir duquel la suite (X_n) est nulle et donc que presque sûrement, la $\sum_{n \geq 0} X_n$ converge.

Compléments

On suppose désormais que $B = \Omega$.

Ainsi la fonction $S = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ est définie sur Ω . On admet que c'est une variable aléatoire.

- Déterminer la limite en loi de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ avec $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
- Déterminer la limite en probabilité de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

3. Par indépendance, on sait que S_n suit la loi de POISSON de paramètre $\mu_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = \mu.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, et par continuité : $P(S_n = k) = e^{-\mu_n} \frac{\mu_n^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$, ce qui montre que S_n converge en loi vers la loi de POISSON de paramètre μ

4. On a, par indépendance, pour $N > n$,

$$V(S_N - S_n) = \sum_{k=n+1}^N V(X_k) = \sum_{k=n+1}^N \lambda_k \rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k$$

On utilise l'inégalité de TCHEBICHEFF.

$$P(|S_n - S| > \varepsilon) \leq \frac{V(S - S_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$