CHAPITRE 15

Projections orthogonales

L'art des mathématiques consiste à trouver le cas particulier qui contient tous les germes de la généralité.

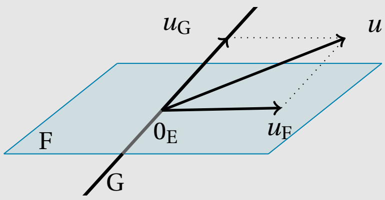
DAVID HILBERT
Mathématicien allemand (1862-1943)

1 Rappels : projecteur et orthogonal d'un sous-espace

1.1 Les projecteurs

DÉFINITION (RAPPEL) **projecteur**

Soient E *un espace vectoriel et* F, G *deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.*



Ainsi, pour tout $u \in E$, il existe une unique décomposition $u = u_F + u_G$ où $(u_F, u_G) \in F \times G$. On pose

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u_F. \end{array} \right.$$

Cette application est linéaire, elle est appelée le ***projecteur*** *sur* F *parallèlement à* G.

Remarque. Rappelons que $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}\left(p - \mathrm{id}_E\right)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$. En particulier, on a

$$E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p).$$

Si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à cette décomposition en supplémentaire, on obtient une base de diagonalisation avec

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$
$$\underbrace{\hphantom{1 \cdots 0}}_{\mathrm{rg}\,A}\ \underbrace{\hphantom{0 \cdots 0}}_{\dim \mathrm{Ker}\,A}$$

De plus, $\mathrm{id}_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F.

THÉORÈME (RAPPEL) **caractérisation d'un projecteur**

Soit $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) *L'application p est un projecteur.*

ii) *L'application p est linéaire et $p \circ p = p$.*

Exercice 1

✦

1. Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E.
   a) Donner les puissances de p, puis celles de $2\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}} + p$.
   b) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, simplifier $(\lambda p + \mu \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \circ (2\mathrm{id}_{\mathrm{E}} + p)$. En déduire que $2\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}} + p$ est un isomorphisme. p. 16
2. Considérons deux projecteurs p et q qui commutent.
   Montrer que $p \circ q$ est un projecteur et justifier que $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$.

1.2 Les sous-espaces orthogonaux

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle orthogonal de F, et on note $\mathrm{F}^{\perp}$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F, c'est-à-dire :

$$\mathrm{F}^{\perp} = \{u \in \mathrm{E} \mid \forall\, v \in \mathrm{F},\ \langle u, v\rangle = 0\}.$$

PROPOSITION (RAPPEL) **espaces supplémentaires orthogonaux**

Soit F*, un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien* $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$*. Alors*

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}.$$

En particulier $$\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{F}^{\perp} = \dim \mathrm{E}.$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}_{2n}[x]$, on considère le produit scalaire $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ et F le sous-espace vectoriel des polynômes impairs. On a $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x, x^3, x^5, \cdots, x^{2n+1})$. On vérifie que $\mathrm{F}^{\perp}$ est le sous-espace des polynômes pairs.

Remarque. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de F que l'on complète par $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$, une base orthonormée de E. On a

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p), \quad \mathrm{F}^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n).$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, considérons $u = (1,0,1)$ et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u)$, la droite vectorielle engendrée par u. Déterminons une base de $\mathrm{F}^{\perp}$.

- *Rédaction 1.* Soit $\mathrm{X} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} \in \mathrm{Vect}(u)^{\perp} &\iff \langle x, u\rangle = 0 \\
&\iff 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \\
&\iff x = -z \\
&\iff \mathrm{X} = (x, y, -x) = x(1,0,-1) + y(0,1,0).
\end{aligned}$$

Si on pose $v = (1,0,-1)$ et $w = (0,1,0)$, on obtient

$$\mathrm{Vect}(u)^{\perp} = \mathrm{Vect}(v, w).$$

Comme v et w sont non colinéaires, ils forment une base de $\mathrm{F}^{\perp}$.

- *Rédaction 2.* Notons que

$$\dim \mathrm{F}^{\perp} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{F} = 2.$$

On vérifie que si on pose $v=(1,0,-1)$ et $w=(0,1,0)$,

$$\langle v,u\rangle=0 \quad \text{et} \quad \langle w,u\rangle=0.$$

On a donc $v,\ w\in F^{\perp}$, puis $\mathrm{Vect}(v,w)\subset F^{\perp}$. Or (v,w) est une famille libre contenant autant de vecteurs que la dimension, c'est une base de $F^{\perp}$.

Exercice 2

✦ *Les questions sont indépendantes.*

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère les plans F et G d'équations respectives :

$$x+2y+3z=0 \quad \text{et} \quad x-y-z=0.$$

Déterminer une base de $F^{\perp}$ puis de $(F\cap G)^{\perp}$.

2. Soit $\mathbb{R}_3[x]$ muni du produit scalaire $\langle P,Q\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. On pose $F=\mathbb{R}_1[x]$. Déterminer une base de $F^{\perp}$.

p. 16

Exercice 3

✦✦ Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels.
Justifier que F et G sont supplémentaires si et seulement si $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$ sont supplémentaires.

p. 17

PROPOSITION — **condition nécessaire et suffisante d'appartenance à l'orthogonal**

Soit $F=\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k)$ *un sous-espace vectoriel de* E. *On a*

$$u\in F^{\perp} \iff \forall i\in [\![1;k]\!],\qquad \langle u,e_i\rangle=0.$$

Exercice 4

✦ **Vecteur normal à un hyperplan**
Soit F un hyperplan d'un espace euclidien $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1. Montrer qu'il existe $u_0\in E$ tel que pour tout $v\in E$: $\quad v\in F \iff \langle u_0,v\rangle=0$.
2. *Exemples*
   a) On considère $E=\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et l'hyperplan $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+3y-z=0\}$. Déterminer un vecteur normal à F.
   b) Soit maintenant $E=\mathbb{R}_3[x]$ et le produit scalaire défini par $\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,dt$. Déterminer un vecteur normal à $\mathbb{R}_2[x]$.

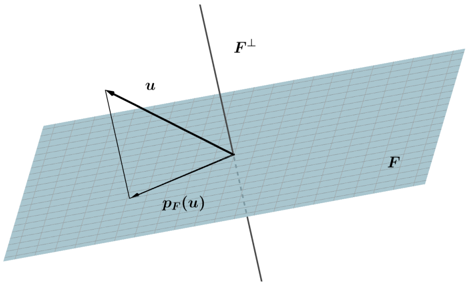
p. 17

2 Projecteurs orthogonaux

2.1 Définitions et exemples

DÉFINITION — **projecteur orthogonal**

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$*, un espace euclidien.*
On appelle ***projection orthogonale*** *sur* F*, notée* p_F*, la projection sur* F *parallèlement à* $F^{\perp}$.
Pour tout $u\in E$, $p_F(u)$ *est appelé le* ***projeté orthogonal de*** u ***sur*** F.



Retenons

$$v = p_{\mathrm{F}}(u) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} v & \in & \mathrm{F} \\ u - v & \in & \mathrm{F}^\perp. \end{array} \right.$$

Remarque. D'après le rappel du début de chapitre, un projecteur p est orthogonal si et seulement si $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires orthogonaux, si et seulement si $\mathrm{E}_0(p)$ et $\mathrm{E}_1(p)$ sont des supplémentaires orthogonaux de E.

Exercice 5

✧ Soit p un projecteur orthogonal. Justifier que pour tout $u \in \mathrm{E}$

$$\langle p(u), u\rangle = \|p(u)\|^2.$$

p. 17

Exercice 6

✦ ✎ **Exemple**
Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{AB}\right)$. On définit l'application

$$p : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad p(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}}{2}.$$

p. 17

1. Vérifier que p est un projecteur. Préciser le noyau et l'image de p.
2. Est-ce que p est un projecteur orthogonal ?

Proposition — caractérisation

Soit p, un projecteur d'un espace euclidien $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- **i)** *Le projecteur p est orthogonal.*
- **ii)** *L'endomorphisme p est symétrique.*

Preuve. Raisonnons par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons que p est orthogonal. Soient $u, v \in \mathrm{E}$. Il existe $u_{\mathrm{K}}, v_{\mathrm{K}} \in \mathrm{Ker}\, p$, $u_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{I}} \in \mathrm{Im}\, p$ tels que

$$u = u_{\mathrm{K}} + u_{\mathrm{I}} \quad \text{et} \quad v = v_{\mathrm{K}} + v_{\mathrm{I}}.$$

En particulier, on a $p(u_k) = 0 = p(v_k)$, $p(u) = u_{\mathrm{I}}$ et $p(v) = v_{\mathrm{I}}$. Comme $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont orthogonaux

$$\begin{aligned} \langle p(u), v\rangle &= \left\langle u_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{K}} + v_{\mathrm{I}}\right\rangle \\ &= \left\langle u_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{K}}\right\rangle + \langle u_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{I}}\rangle \\ &= \langle u_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{I}}\rangle \end{aligned}$$

et de même $$\langle u, p(v)\rangle = \langle u_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{I}}\rangle.$$

D'où l'égalité $\langle p(u), v\rangle = \langle u, p(v)\rangle$. Le projecteur p est orthogonal.

$\Leftarrow$ Supposons que p est symétrique. Soient $u \in \mathrm{Ker}\, p$ et $v \in \mathrm{Im}\, p$. On a

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= \langle u, p(v)\rangle && \text{car } v \in \mathrm{Im}\, p = \mathrm{E}_1(p) \\ &= \langle p(u), v\rangle && \text{symétrie} \\ &= \langle 0, v\rangle && \text{car } u \in \mathrm{Ker}\, p \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où, le noyau et l'image sont des espaces orthogonaux et p est un projecteur orthogonal. ■

PROPOSITION **caractérisation matricielle**

Soient E *un espace euclidien,* $\mathscr{B}$ *une base orthonormée de* E*,* p *un endomorphisme et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$.
On a l'équivalence entre :

- **i)** *L'endomorphisme* p *est un projecteur orthogonal.*
- **ii)** *La matrice* A *est symétrique et* $A^2 = A$.

Preuve. D'après ce qui précède, un endomorphisme p est un projecteur orthogonal si et seulement si on a les deux conditions :

I. $p \circ p = p$ II. p est symétrique.

Matriciellement, la condition I équivaut à $A^2 = A$. La condition II équivaut à ${}^tA = A$ car $\mathscr{B}$ est une base orthonormée. ■

⚠ **Attention.** Il ne faut pas oublier la condition : $\mathscr{B}$ est une base orthonormée.

Exemples.

- Soient $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} u_i{}^2 = 1$ et $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On vérifie que ${}^tUU = 1$ et $U\,{}^tU$ est une matrice de rang 1 qui est la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(u)$.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et J_n, la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des $1/n$. On vérifie que $J_n{}^2 = J_n$ et J_n est symétrique. C'est donc la matrice d'un projecteur orthogonal dans la base canonique. Comme $\mathrm{rg}(J_n) = 1$ (le noyau est donc de dimension $n-1$) et $J_n U = U$ (où U est la matrice colonne ne contenant que des 1), on peut donc affirmer que J_n est la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(1, 1, \ldots, 1)$.

2.2 Expression et calcul explicite du projeté

THÉORÈME **expression du projeté dans une b.o.n**

Soit F*, un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien* $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *et* p_F*, le projecteur orthogonal sur* F.

Si $\mathscr{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ *est une base orthonormée de* F*,*

alors $\forall\, u \in E, \quad p_F(u) = \sum_{i=1}^{p} \langle u, e_i \rangle\, e_i.$

Preuve. On peut compléter $\mathscr{B}_F$ en une base $\mathscr{B}$ orthonormée de E. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Soit $u \in E$.

- *Rédaction 1.*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle\, e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \langle u, e_i \rangle\, e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \langle u, e_i \rangle\, e_i}_{\in F^\perp}.$$

Par définition de projecteur orthogonal, p projette sur F parallèlement à $F^\perp$,

$$p_F(u) = \sum_{i=1}^{p} \langle u, e_i \rangle\, e_i.$$

- *Rédaction 2.*

$$\begin{aligned}
p_F(u) &= \sum_{i=1}^{n} \langle p_F(u), e_i \rangle\, e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle u, p_F(e_i) \rangle\, e_i \quad \text{car } p_F \text{ est symétrique} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \langle u, p_F(e_i) \rangle\, e_i + \sum_{i=p+1}^{n} \langle u, p_F(e_i) \rangle\, e_i \\
p_F(u) &= \sum_{i=1}^{p} \langle u, e_i \rangle\, e_i.
\end{aligned}$$

En effet, par définition du projecteur, si $i \in [\![1;p]\!]$, $p_F(e_i) = e_i$ et si $i \in [\![p+1;n]\!]$, $p_F(e_i) = 0_E$. ■

Exemples.

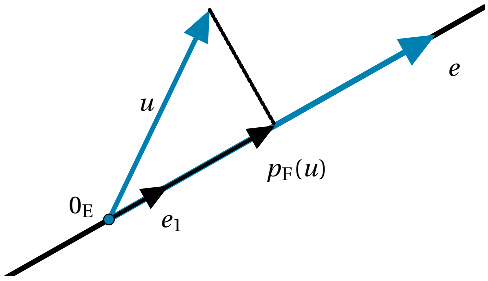
- **Projection sur une droite vectorielle**

Considérons le cas où F est une droite vectorielle. Il existe donc $e \in E \setminus \{0_E\}$ tel que

$$F = \operatorname{Vect}(e).$$

La famille constituée d'un unique vecteur $(e_1) = (e/\|e\|)$ est une base de F et d'après ce qui précède

$$p_F(u) = \langle u, e_1 \rangle\, e_1 = \frac{\langle u, e \rangle}{\|e\|^2}\, e.$$



- **Projection sur un hyperplan**

Soit H un hyperplan de E. L'orthogonal $H^\perp$ est donc de dimension 1 et on peut considérer u_0, un vecteur non nul unitaire de $H^\perp$ (u_0 est un vecteur normal à H, voir exercice 4).
Soit q le projecteur sur la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(u_0) = H^\perp$ orthogonal. D'après ce que précède

$$\forall\, u \in E, \qquad q(u) = \langle u, u_0 \rangle\, u_0.$$

Or $p_H = \mathrm{id}_E - q$ est le projecteur orthogonal sur H. Donc

$$\forall\, u \in E, \qquad p_H(u) = u - \langle u, u_0 \rangle\, u_0.$$

Remarque. Retour sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

- *Orthonormalisation de deux vecteurs.*
  Considérons les deux vecteurs u_1, u_2 non colinéaires. Posons p_1 le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Vect}(u_1)$ puis

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{et} \quad v_2 = u_2 - p_1(u_2), \quad e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

  Alors les vecteurs (e_1, e_2) forment une base orthonormée de $\operatorname{Vect}(e_1, e_2) = \operatorname{Vect}(u, v)$.

- *Cas général de n vecteurs.*
  Soient $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E non nécessairement orthonormée. Pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, posons p_k, le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$. On définit ensuite la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E par la récurrence

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![2;k-1]\!], \quad e_{k+1} = \frac{u_{k+1} - p_k(u_{k+1})}{\left\|u_{k+1} - p_k(u_{k+1})\right\|}$$

  La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est bien définie, elle constitue une base orthonormée de E avec

$$\forall\, k \in [\![1;n]\!], \qquad \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k).$$

En pratique, pour le calcul du projeté, on préféra toutefois la méthode suivante qui ne nécessite pas le calcul en amont d'une base orthonormée.

Méthode

Comment calculer un projeté ?

Soient $u \in \mathrm{E}$ et F, un sous-espace vectoriel de E. Calculons $p_{\mathrm{F}}(u)$, le projeté orthogonal de u sur F.

- *Étape 1*
  On trouve une base $(u_1, \dots, u_p)$ de F (non nécessairement orthonormée).
- *Étape 2*
  Comme $p_{\mathrm{F}}(u) \in \mathrm{F}$, il existe un unique p-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $p_{\mathrm{F}}(u) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. On remarque ensuite que

$$\begin{cases} \langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_1 \rangle = 0 \\ \langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_2 \rangle = 0 \\ \quad \vdots \\ \langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_p \rangle = 0. \end{cases}$$

  On explicite alors le système linéaire d'inconnues $(\lambda_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$

$$\begin{cases} \langle u, u_1 \rangle = \langle p_{\mathrm{F}}(u), u_1 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u_i, u_1 \rangle \\ \langle u, u_2 \rangle = \langle p_{\mathrm{F}}(u), u_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u_i, u_2 \rangle \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \langle u, u_p \rangle = \langle p_{\mathrm{F}}(u), u_p \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u_i, u_p \rangle. \end{cases}$$

- *Étape 3*
  On résout le système linéaire précédent à p équations pour trouver les p inconnues $(\lambda_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$. On conclut par le calcul de $p_{\mathrm{F}}(u) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminons le projeté de $u = (0, -1, 4)$ sur l'espace vectoriel

$$\mathrm{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\right\}.$$

- *Étape 1.* Soit $\mathrm{X} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{X} \in \mathrm{F} \iff x - 2y + 3z = 0 &\iff x = 2y - 3z \\ &\iff \mathrm{X} = (2y - 3z, y, z) = y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (-3, 0, 1) \\ &\iff \mathrm{X} = y \cdot u_1 + z \cdot u_2. \end{aligned}$$

Où on a posé $u_1 = (2, 1, 0)$ et $u_2 = (-3, 0, 1)$. Ainsi,

$$\mathrm{X} \in \mathrm{F} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

On conclut, (u_1, u_2) est une famille génératrice de F. Les vecteurs u_1 et u_2 sont non colinéaires, la famille (u_1, u_2) est libre. Par conséquent, (u_1, u_2) est une base de F.

- *Étape 2.* Il existe donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $p_{\mathrm{F}}(u) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$. Précisons que

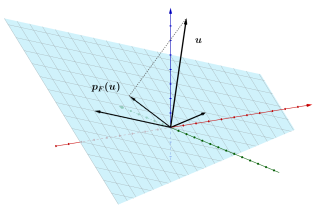
$$\langle u_1, u_2 \rangle = -6, \quad \langle u_1, u_1 \rangle = 5 \quad \langle u_2, u_2 \rangle = 10 \quad \text{et} \quad \langle u, u_1 \rangle = -1, \quad \langle u_2, u_2 \rangle = 4,$$

$$\langle p_{\mathrm{F}}(u), u_1 \rangle = 5\lambda_1 - 6\lambda_2 \quad \langle p_{\mathrm{F}}(u), u_2 \rangle = -6\lambda_1 + 10\lambda_2.$$

On obtient le système linéaire

$$\begin{cases} \langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_1 \rangle = 0 \\ \langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle p_{\mathrm{F}}(u), u_1 \rangle = \langle u, u_1 \rangle \\ \langle p_{\mathrm{F}}(u), u_2 \rangle = \langle u, u_2 \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} 5\lambda_1 - 6\lambda_2 &= -1 \\ -6\lambda_1 + 10\lambda_2 &= 4. \end{cases}$$

- *Étape 3.* On constate que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ est l'unique solution et
$$p_F(u) = u_1 + u_2 = (-1, 1, 1).$$
Le schéma ci-contre représente le plan F, le vecteur u et son projeté.



Exercice 7

✦ Exemple

Soient $\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ et $F = \mathbb{R}_1[x]$.
Donner l'expression du projeté orthogonal de $Q(x) = 1 + x + x^2$ sur F.

p. 18

3 Applications à l'optimisation

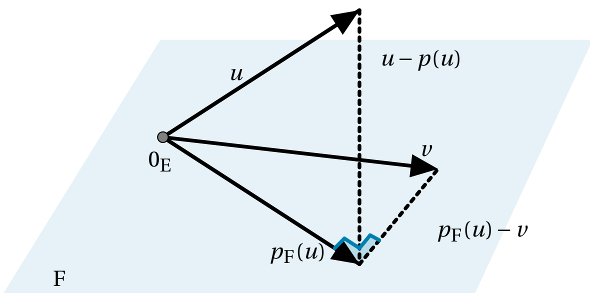
3.1 Distance à un sous-espace vectoriel

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ et $u \in E$. On définit (sous réserve d'existence), la distance du vecteur u à F par
$$d(u, F) = \min_{v\in F} \|u - v\|.$$
Notons que $u \in F$ si et seulement si $d(u, F) = 0$.

THÉORÈME — **caractérisation du projeté par minimisation de la norme**

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$, p_F la projection orthogonale sur F et $u \in E$. Alors la distance $d(u, F)$ est bien définie et
$$d(u, F) = \min_{v\in F} \|u - v\| = \big\|u - p_F(u)\big\|.$$
De plus, le minimum est atteint seulement pour $v = p_F(u)$.

Preuve. Soient $u \in E$ et $v \in F$,
$$u - v = \big(u - p(u)\big) + \big(p(u) - v\big).$$
Or, $u - p(u)$ est orthogonal à F, donc $u - p(u)$ est orthogonal à $p(u) - v \in F$. D'après le théorème de Pythagore :
$$\|u - v\|^2 = \|u - p(u)\|^2 + \|p(u) - v\|^2 \geqslant \|u - p(u)\|^2.$$
D'où l'inégalité avec égalité si et seulement si
$$\|p(u) - v\| = 0,$$
c'est-à-dire $v = p(u)$. ■



Remarques.

- Le projeté orthogonal de u sur F est caractérisé par
$$\forall\, v \in F, \quad \|u - v\| \geqslant \|u - p(u)\|.$$
Autrement dit : pour tout $u \in E$,
$$v = p_F(u) \quad\Longleftrightarrow\quad \Big(v \in F \quad\text{et}\quad \|u - v\| = \min_{w\in F} \|u - w\|\Big).$$
- Les vecteurs $u - p(u)$ et $p(u)$ sont orthogonaux, donc d'après le théorème de Pythagore,
$$\|u - p(u)\|^2 + \|p(u)\|^2 = \|u\|^2 \quad \text{d'où} \quad d(u, F)^2 = \|u - p(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|p(u)\|^2.$$

Exercice 8

✦ **Exemples**

Soient $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$, un espace euclidien, $u_0 \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ et un hyperplan H.

1. Exprimer la distance d'un vecteur x à la droite $\mathrm{Vect}(u_0)$.

p. 18

2. Faire de même avec la distance à H. On exprimera le résultat à l'aide d'un vecteur $u_0 \in \mathrm{H}^{\perp}$ (un vecteur normal, exercice 4).

Exemple. Justifions que la fonction de deux variables

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = 4(x-1)^2 + (x+y)^2 + (x-2y+1)^2$$

admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$. Considérons dans $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire canonique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et la norme $\|\cdot\|$ associée. On a

$$f(x,y) = \left\|\left(2(x-1)\,,\, x+y\,,\, x-2y+1\right)\right\|^2 = \left\|(2x\,,\, x+y\,,\, x-2y) - (2,0,-1)\right\|^2.$$

Si on pose $u = (2,0,-1)$ et si on définit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{F} = \left\{\, (2x, x+y, x-2y) \;\middle|\; x,y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2) \quad \text{où} \quad \left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & (2,1,1) \\ u_2 & = & (0,1,-2), \end{array}\right.$$

alors on a $f(x,y) = \|v-u\|^2$ avec $v = (2x, x+y, x-2y) \in \mathrm{F}$. Le théorème de minimisation s'applique, il existe donc bien un minimum, il est atteint pour $v = p_{\mathrm{F}}(u)$ où p_{F} est le projecteur orthogonal sur F.
Calculons le projeté $p_{\mathrm{F}}(u) = xu_1 + yu_2$ et

$$\left\{\begin{array}{l} \langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_1\rangle = 0 \\ \langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_2\rangle = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \langle u, u_1\rangle = \left\langle p_{\mathrm{F}}(u), u_1\right\rangle \\ \langle u, u_2\rangle = \left\langle p_{\mathrm{F}}(u), u_2\right\rangle. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 3 = 6x + (-1)y \\ 2 = (-1)x + 5y \end{array}\right.$$

car $\qquad \langle u, u_1\rangle = 3, \quad \langle u, u_2\rangle = 2, \quad \langle u_1, u_2\rangle = -1, \quad \langle u_1, u_1\rangle = 6 \quad \text{et} \quad \langle u_2, u_2\rangle = 5.$

La résolution de ce système donne $x = 17/29$ et $y = 15/29$ pour un minimum global qui vaut $f(17/29, 15/29) \simeq 2{,}2$.

Exercice 9

✦✦ Justifier que la quantité

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(t^2 - at - b\right)^2 \,\mathrm{d}t$$

p. 18

est bien définie et la calculer.

3.2 Problème des moindre carrés, droite de régression

Projeté sur l'image et moindre carrés

Soit f une application linéaire $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, b un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. Lorsque f n'est pas surjective ($p < n$), il se peut que b n'appartienne pas à l'image de f et l'équation $f(x) = b$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^p$, n'admet pas de solution. On cherche alors un vecteur x dont l'image « est la plus proche » de b. Plus précisément, on munit l'espace d'arrivée de sa structure euclidienne canonique et on veut justifier l'existence de

$$\min_{x\in\mathbb{R}^p} \|f(x) - b\|$$

et trouver un (le ?) vecteur x réalisant le minimum. On constate qu'il s'agit de rechercher

$$\min_{y\in\mathrm{Im}\,f} \|y - b\|.$$

Comme $\mathrm{Im}\,f$ est un sous-espace vectoriel de E, le théorème de minimisation prouve l'existence du minimum qui est atteint en un unique point :

$$y = p(b) \quad \text{où } p \text{ désigne le projeteur orthogonal sur } \mathrm{Im}\,f.$$

Précisons que si f est injectif (le rang de f est alors p), y étant unique, on un a bien un unique antécédent x tel que $f(x)$ soit « le plus proche » de b. Noter que y est unique mais si f n'est pas injective, x n'est pas unique. Tout vecteur $x + x_{\mathrm{K}}$ avec $x_k \in \mathrm{Ker}\,f$ convient.

Donnons une version matricielle :

THÉORÈME **problème des moindre carrés, pseudo-solution**

Soient n, $p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant p$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Alors il existe un unique vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\|AX - B\|$ où $\|\cdot\|$ désigne ici la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Preuve. Considérons l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX. \end{array} \right.$$

L'application f est clairement linéaire. De plus, la formule du rang donne

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})) - \operatorname{rg}(f) = p - \operatorname{rg}(A) = 0.$$

On en déduit que le noyau est trivial et l'application f est injective. Ensuite, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$$\|AX - B\| = \|f(X) - B\|.$$

Le théorème précédent conclut. Il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $f(X_0)$ minimise la norme avec

$$f(X_0) = p_{\operatorname{Im} f}(B).$$

Le vecteur $f(X_0)$ est unique, puis par injectivité de f, X_0 est unique. ■

Remarque. Le second exercice qui suit permet de justifier que le vecteur X_0 est l'unique solution du système de Cramer ${}^tAAX = {}^tAB$. On parle alors de **pseudo-solution**.

Exercice 10

✧ **Exemple**

On pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

p. 18

Justifier et calculer l'unique matrice colonne X telle que la norme $\|AX - B\|$ soit minimale.

Exercice 11

✦✦ Reprenons les notations du théorème et justifions la remarque précédente.

1. **a)** Justifier que $\operatorname{Ker}({}^tAA) = \operatorname{Ker}(A)$, puis $\operatorname{rg}({}^tAA) = \operatorname{rg}(A)$.

b) En déduire que ${}^tAA$ est une matrice inversible.

2. **a)** Vérifier que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, {}^tA(AX_0 - B)\rangle = 0$. p. 19

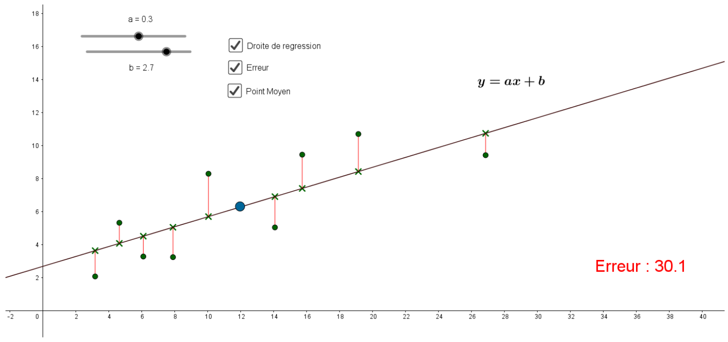
b) En déduire que ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.

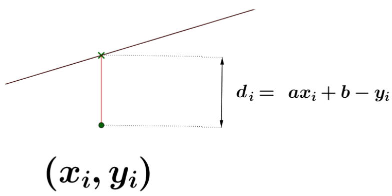
On a donc bien une unique solution donnée par $X_0 = ({}^tAA)^{-1}AB$. *Pour une seconde démonstration, voir l'exercice 18, p.13, partie II.*

Régression linéaire

Considérons n points de $\mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ non alignés verticalement. On cherche la droite qui « approxime » au mieux ces n points. Si on note $y = ax + b$, l'équation d'une droite, on cherche à minimiser l'erreur

$$E_r = \sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2.$$





Traduisons matriciellement le problème. Posons

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{de sorte que} \quad \mathrm{AX} - \mathrm{B} = \begin{bmatrix} ax_1 + b - y_1 \\ ax_2 + b - y_2 \\ \vdots \\ ax_n + b - y_n \end{bmatrix}.$$

Si on considère le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la norme associée

$$\mathrm{E}_r = \|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|^2.$$

Les deux colonnes de la matrice A forment une famille libre (les points ne sont pas alignés verticalement). La matrice A est donc de rang 2. D'après le théorème précédent, il existe un seul vecteur minimisant $\|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|$. Calculons ce vecteur X_0 à l'aide de la remarque. On a

$${}^t\mathrm{AA} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^n {x_i}^2 & \sum\limits_{i=1}^n x_i \\ \sum\limits_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Justifions que ${}^t\mathrm{AA}$ est inversible.

$$\det\left({}^t\mathrm{AA}\right) = n \sum_{i=1}^n {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ aux vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $u_0 = (1, \dots, 1)$, il vient :

$$\langle u_0, x\rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^n {x_i}^2$$

Cette inégalité est en fait stricte car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Le déterminant est donc non nul et la matrice ${}^t\mathrm{AA}$ est inversible. L'inverse est donné par

$$\left({}^t\mathrm{AA}\right)^{-1} = \frac{1}{n \sum\limits_{i=1}^n {x_i}^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^2} \begin{bmatrix} n & -\sum\limits_{i=1}^n x_i \\ -\sum\limits_{i=1}^n x_i & \sum\limits_{i=1}^n {x_i}^2 \end{bmatrix}.$$

De plus, on calcule

$${}^t\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum\limits_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}.$$

Ceci permet d'expliciter le vecteur X, puis ses composantes a et b :

$$a = \frac{n \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i\right)}{n \sum\limits_{i=1}^n {x_i}^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i - \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n y_i\right)}{\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^n {x_i}^2 - \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^2}.$$

Si $\bar{x}$ (resp. $\bar{y}$) et σ_x (resp. σ_y) désignent la moyenne et l'écart-type empirique de la série statistique $\{x_i \mid i \in [\![1;n]\!]\}$ (resp. $\{y_i \mid i \in [\![1;n]\!]\}$), $\mathrm{Cov}(x,y)$ désigne la covariance empirique de x et y et $\rho_{x,y}$ désigne le coefficient de corrélation empirique, alors la droite de régression linéaire de y en x a pour équation :

$$y - \bar{y} = \rho_{x,y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}).$$

Remarque. Nous verrons une seconde démonstration de ce résultats par le calcul différentiel.

Exercices - TD

Exercice 12. ✦ Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{H} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

≫ Solution p. 19

Exercice 13. ✦✦ **À bonne distance d'Attila**
On considère $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{AB}\right) \in \mathbb{R}.$$

Soit H, le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle.

1. Donner la dimension de $\mathrm{H}^{\perp}$. Préciser une base.
2. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer $\min\limits_{\mathrm{A} \in \mathrm{H}} \|\mathrm{A} - \mathrm{J}\|$.

≫ Solution p. 19

Exercice 14. ✦✦✦ **CNS pour un projecteur orthogonal**
Soient $\left(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ un espace euclidien et p, un projecteur de E.

1. Montrer l'équivalence entre les énoncés :

   i) Le projecteur p est orthogonal **ii)** $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \left\langle x, p(x) \right\rangle \geqslant 0.$

   Indication. On pourra considérer $\lambda x + y$ où $x \in \mathrm{Ker}\, p$, $y \in \mathrm{Im}\, p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Même question avec les énoncés :

   i) Le projecteur p est orthogonal **iii)** $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$

≫ Solution p. 19

Exercice 15. ✦✦ **Matrice d'un projecteur orthogonal**
Soient $\left(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$, un espace euclidien et F, un sous-espace vectoriel de E.
Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $\left(u_1, \ldots, u_p\right)$ une base orthonormée de F. On note $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_p$ les vecteurs colonnes des coordonnées de $u_1, \ldots, u_p$ dans la base $\mathscr{B}$. Montrer que la matrice du projeté orthogonal sur F, noté p_{F}, dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(p_{\mathrm{F}}\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{U}_i\, {}^t\mathrm{U}_i.$$

≫ Solution p. 20

Exercice 16. ✦✦✦ *D'après Oraux ESCP*

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $\mathrm{F}(x, y, z) = 24x^2 + 2y^2 + z^2 + 12xy + 2yz + 4zx - 240x - 48y - 12z$.
   a) Déterminer les points critiques de F.
   b) On admet (par le calcul) que

   $$\mathrm{F}(x, y, z) = (2x + y + z - 6)^2 + (4x + y - 18)^2 + 4(x - 9)^2 - 684.$$

   Montrer que F atteint son minimum sur $\mathbb{R}^3$ en un unique point. Préciser ses coordonnées, ainsi que la valeur du minimum.
2. **a)** Donner la valeur de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^n \,\mathrm{d}t$.
   b) Justifier la convergence et exprimer en fonction de F, l'intégrale :

   $$\mathrm{I}(a, b, c) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \mathrm{d}t.$$

   c) Justifier l'existence et calculer

   $$\mathrm{I} = \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \mathrm{I}(a, b, c).$$

3. a) Justifier (brièvement) que

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t)\,dt$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

b) Calculer la distance du polynôme $P_0(x) = x^3$ au sous-espace $H = \mathbb{R}_2[x]$.

c) Soit $T(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme appartenant à H. Montrer que T est le projeté orthogonal du polynôme x^3 sur le sous-espace H si et seulement si

$$\partial_1 F(a,b,c) = 0, \quad \partial_2 F(a,b,c) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_3 F(a,b,c) = 0$$

et retrouver le résultat précédent.

≫ Solution p. 20

Exercice 17. ✦✦✦ Sommes de projecteurs orthogonaux *d'après ESCP 2001*

Soit $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$. On rappelle que le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{s,1}(\mathbb{R})$ est

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{s,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y\rangle = {}^tXY = \sum_{k=1}^{s} x_k y_k.$$

On note $\|\cdot\|$, la norme associée à ce produit scalaire.

1. On suppose dans cette question que $s = 4$, et on considère la matrice :

$$P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calculer ${}^tP$ et P^2.

b) Déterminer les valeurs propres de P et les sous-espaces propres associés. Montrer que P est la matrice d'une projection orthogonale sur un sous-espace de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ que l'on déterminera.

2. On revient maintenant au cas général (s quelconque). Redémontrer que la matrice $P \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ est la matrice d'une projection orthogonale si et seulement si on a $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.

3. Soient P et Q deux matrices de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ représentant chacune une projection orthogonale. On suppose de plus que pour tout $X \in \mathcal{M}_{s,1}(\mathbb{R})$:

$$\|PX\|^2 + \|QX\|^2 \leqslant \|X\|^2 \quad (\bullet)$$

a) Montrer que $PQ = QP = 0_s$.

b) En déduire que $P + Q$ est la matrice d'une projection orthogonale.

4. Soient $P_1, P_2, \dots, P_n$, n matrices représentant chacune une projection orthogonale de $\mathcal{M}_{s,1}(\mathbb{R})$ et telles que $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$.
Montrer que pour toute partie non vide E de $\{1, 2, \dots, n\}$, $\sum_{k \in E} P_k$ est la matrice d'une projection orthogonale de $\mathcal{M}_{s,1}(\mathbb{R})$.

5. On se place à nouveau dans le cas $s = 4$ et on considère la matrice :

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Montrer que Q est la matrice d'une projection orthogonale de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que P et Q vérifient la relation $(\bullet)$, où P est la matrice de la première question. Que peut-on dire de $P + Q$?

≫ Solution p. 21

Exercice 18. ✦✦✦ Sujet de révision *extrait de ESSEC 2012*

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Ainsi si

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),$$

le produit scalaire de X et Y s'obtient par la relation ${}^tXY = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$ et la norme euclidienne de Y par : $\|Y\|_m^2 = {}^tYY = \sum_{i=1}^{m} {y_i}^2$.

1. *Question préliminaire.*
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k non nulle et $\left(U_1, U_2, \dots, U_k\right)$ une base orthonormée de vecteurs colonnes de F.
On envisage la projection orthogonale sur F représentée par sa matrice P dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que $P = \sum_{i=1}^{k} U_i {}^tU_i$ et vérifier que P est une matrice symétrique.

2. **Partie I.** *Décomposition spectrale de la matrice* ${}^t AA$ *associée à une matrice* A *de* $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
On envisage dans toute cette partie une matrice A appartenant à $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
   a) Préciser la taille de la matrice ${}^tAA$ et vérifier que $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} {}^tAA$.
   b) Montrer que si $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$ alors $\|AX\|_m = 0$ et établir que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$. Montrer que A et ${}^tAA$ sont nulles simultanément.
   c) Justifier l'égalité : $\operatorname{Im} {}^tA = \operatorname{Im} {}^tAA$.

3. a) Établir que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable et en calculant $\|AX\|_m^2$ pour X vecteur propre de la matrice ${}^tAA$, montrer que ses valeurs propres sont des réels positifs.
   b) On désigne par $\left(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\right)$ la liste des valeurs propres distinctes de la matrice ${}^tAA$, classée dans l'ordre croissant. On rappelle que
$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}\left({}^tAA\right) \text{ où } E_{\lambda_i}\left({}^tAA\right) = \operatorname{Ker}\left({}^tAA - \lambda_i I_n\right).$$
Pour i entier naturel compris entre 1 et p, on note P_i la matrice de la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}\left({}^tAA\right)$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Vérifier que pour i et j distincts compris entre 1 et p, P_iP_j est la matrice nulle.
Justifier les relations : $I_n = \sum_{i=1}^{p} P_i$ et ${}^tAA = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$. Cette dernière écriture s'appelle la décomposition spectrale de ${}^tAA$.

4. *Exemples*
   a) Déterminer la décomposition spectrale de ${}^tAA$ lorsque A est la matrice 3,3 égale à
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
   b) On envisage la matrice ligne $A = (a_1 a_2 \cdots a_n)$ où les réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont fixés, non tous nuls simultanément. Ainsi, $A {}^tA$ est un réel. Montrer que le polynôme $X^2 - \left(A {}^tA\right) X$ est annulateur pour la matrice ${}^tAA$. Préciser la liste des valeurs propres et la décomposition spectrale de la matrice ${}^tAA$.

Partie II. *Pseudo solution d'une équation linéaire.*
On s'intéresse dans cette partie à l'équation $AX = B$ où $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Une matrice X appartenant à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite solution de cette équation si elle vérifie la relation $AX = B$. Elle est dite pseudo solution de cette équation si elle vérifie :
$$\forall Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \|AX - B\|_m \leqslant \|AZ - B\|_m$$

5. On suppose que l'équation $AX = B$ admet au moins une solution. Montrer que X est une pseudo solution si et seulement si elle est solution de l'équation.

6. On suppose que X est une pseudo solution de l'équation. Montrer que, pour tout réel λ et toute matrice Y de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :
$$\lambda^2 \|AY\|_m^2 + 2\lambda {}^tY {}^tA(AX - B) \geqslant 0.$$
En déduire que ${}^tAAX = {}^tAB$.

7. Montrer que tout X de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant la relation ${}^tAAX = {}^tAB$ est pseudo solution et en déduire qu'il existe toujours au moins une pseudo-solution de l'équation.

8. *Exemple*
Déterminer toutes les pseudo-solutions de l'équation $AX = B$ lorsque :
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Parmi celles-ci, préciser celle dont la norme euclidienne est minimale.

9. Donner une condition sur le rang de A pour que l'équation admette une unique pseudo solution.

≫ Solution p. 21

Les exotiques

Exercice 19. ✦✦✦ Dans la suite, on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires centrées et admettant un moment d'ordre 2. On pose

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad C_X = \left(\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)\right)_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Soit $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Exprimer la variance $\mathbf{V}\left(\langle u, X\rangle\right)$ à l'aide de C_X et u.
($\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne ici le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$).

2. Soient H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et $u \in H^\perp$.
Montrer que l'événement $[X \in H]$ est presque sûr si et seulement si $u \in \operatorname{Ker} C_X$.

≫ Solution p. 21

Exercice 20. ✦✦✦ Soient X_1, X_2, deux variables aléatoires indépendantes et suivant une loi normale centrée réduite. Soit M, un point de coordonnées (X_1, X_2). Soient $a \in \mathbb{R}$ et Δ_a la droite d'équation $y = ax$. On pose

$$Y = \inf_{u \in \Delta_a} \|M - u\|^2.$$

Justifier que Y admet une espérance et la calculer.

≫ Solution p. 21

Indications et solutions

Exercice 1

p. 2

1.(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p^k = p \quad \text{et} \quad p^0 = \mathrm{id}_E.$$

Par *la formule du binôme de Newton* (les endomorphismes p et $2\,\mathrm{id}_E$ commutent) :

$$\begin{aligned}
(2\,\mathrm{id}_E + p)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\,\mathrm{id}_E)^k p^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \,\mathrm{id}_E \circ p^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k p^{n-k} + 2^n p^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k p + 2^n \,\mathrm{id}_E \\
(2\,\mathrm{id}_E + p)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k\right) p + 2^n \,\mathrm{id}_E
\end{aligned}$$

Or, par la *formule du binôme de Newton,* (dans les cas des réels),

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k - 2^n = (2+1)^n - 2^n.$$

Concluons :

$$\boxed{(2\,\mathrm{id}_E + p)^n = 2^n \,\mathrm{id}_E + (3^n - 2^n) p.}$$

1.(b) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& (\lambda p + \mu\,\mathrm{id}_E) \circ (2\,\mathrm{id}_E + p) \\
= \;& 2\lambda p \circ \mathrm{id}_E + 2\mu\,\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E + \lambda p \circ p + \mu\,\mathrm{id}_E \circ p \\
= \;& 2\lambda p + 2\mu\,\mathrm{id}_E + \lambda p + \mu p \\
= \;& 2\mu\,\mathrm{id}_E + (3\lambda + \mu) p.
\end{aligned}$$

On constate que le choix de $\mu = 1/2$, $\lambda = -1/6$ donne $3\lambda + \mu = 0$ et

$$(\lambda p + \mu\,\mathrm{id}_E) \circ (2\,\mathrm{id}_E + p) = \mathrm{id}_E.$$

Comme ces deux endomorphismes commutent, on a aussi

$$(2\,\mathrm{id}_E + p) \circ (\lambda p + \mu\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E.$$

Par *la caractérisation des applications bijectives,* on peut conclure sur la bijectivité de $2\,\mathrm{id}_E + p$ avec

$$\boxed{(2\,\mathrm{id}_E + p)^{-1} = \lambda p + \mu\,\mathrm{id}_E = \frac{1}{2}\mathrm{id}_E - \frac{1}{6} p.}$$

2. Nous savons que $p \circ q$ est linéaire par composition.
Comme p et q commutent

$$(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p \circ p \circ q \circ q = p \circ q.$$

Concluons : $\boxed{p \circ q \text{ est un projecteur.}}$

- Soit $u \in \ker(p) + \ker(q)$.

Il existe donc $(u_1, u_2) \in \ker(p) \times \ker(q)$ tel que $u = u_1 + u_2$.
Comme p et q commutent,

$$\begin{aligned}
p \circ q(u) &= p \circ q(u_1) + p \circ q(u_2) \\
&= p\big(q(u_1)\big) + p\big(q(u_2)\big) \\
p \circ q(u) &= q\big(p(u_1)\big) + p\big(q(u_2)\big).
\end{aligned}$$

Comme $p(u_1) = 0_E$ et $q(u_2) = 0_E$, on trouve :

$$p \circ q(u) = 0_E \quad \text{puis,} \quad u \in \ker(p \circ q).$$

Finalement, $\boxed{\ker p + \ker(q) \subset \ker(p \circ q).}$

Exercice 2

p. 3

1. Par exemple, si on pose

$$u_1 = (-3, 0, 1) \quad \text{et} \quad u_2 = (-2, 1, 0)$$

alors on vérifie que

$$F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$$

et si on pose $v = (1, 2, 3)$, on constate que

$$\langle u_1, v \rangle = 0 = \langle u_2, v \rangle.$$

De plus, $\dim F = 2$, $\dim F^{\perp} = 3 - 2 = 1$ et

$$F^{\perp} = \mathrm{Vect}(v).$$

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
u \in F \cap G \iff & \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \\
\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \begin{cases} 3y + 4z = 0 \\ x = y + z \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y = -\frac{4}{3} z \\ x = -\frac{1}{3} z \\ z = z \end{cases} \\
\iff & \begin{aligned} u &= \left(-\tfrac{1}{3} z, -\tfrac{4}{3} z, z\right) \\ &= z\left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{4}{3}, 1\right). \end{aligned}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$F \cap G = \mathrm{Vect}\left(\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1\right)\right) = \mathrm{Vect}\big((-1, -4, 3)\big).$$

En particulier $\dim(F\cap G)=1$, puis

$$\dim\left((F\cap G)^{\perp}\right)=2.$$

Il suffit de donner deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux à $(-1,-4,3)$. Par exemple

$$v_1=(4,-1,0) \quad \text{et} \quad v_2=(3,0,1).$$

2. Comme F est de dimension 2,

$$\dim F^{\perp}=\dim \mathbb{R}_3[x]-\dim F=4-2=2.$$

Il suffit de déterminer deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux à 1 et x. Soient $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbb{R}_3[x]$.

$$\langle 1,Q(x)\rangle=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d=0$$
$$\langle x,Q(x)\rangle=\frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}+\frac{d}{2}=0$$

- Testons avec $c=0, d=-2$, Q est solution si et seulement si

$$\begin{cases}\frac{a}{4}+\frac{b}{3}=2\\ \frac{a}{5}+\frac{b}{4}=1\end{cases} \iff \begin{cases}a=-40\\ b=36\end{cases}$$

on trouve un premier vecteur avec

$$Q_1(x)=-40x^3+36x^2-2.$$

Testons avec $c=-6, d=0$, Q est solution si et seulement si

$$\begin{cases}\frac{a}{4}+\frac{b}{3}=3\\ \frac{a}{5}+\frac{b}{4}=2\end{cases} \iff \begin{cases}a=-20\\ b=24\end{cases}$$

Un second vecteur est :

$$Q_2(x)=-20x^3+24x^2-6x.$$

Les vecteurs Q_1 et Q_2 sont linéairement indépendants. Ils forment une base de l'orthogonal de F.

Exercice 3 p. 3

Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires.
Soient $u\in F^{\perp}\cap G^{\perp}$. Pour tout $x\in E$, il existe $x_F\in F, x_G\in G$ tels que

$$x=x_F+x_G.$$

D'où
$$\langle u,x\rangle=\underbrace{\langle u,x_F\rangle}_{=0}+\underbrace{\langle u,x_G\rangle}_{=0}=0.$$

Le vecteur u est orthogonal à tout vecteur de E, c'est le vecteur nul. Dès lors

$$F^{\perp}\cap G^{\perp}=\{0_E\} \quad (\bullet)$$

De plus

$$\dim F+\dim G=\dim E \quad L_1$$
$$\dim F+\dim F^{\perp}=\dim E \quad L_2$$
$$\dim G+\dim G^{\perp}=\dim E \quad L_3$$

Avec $L_3+L_2-L_1$, il vient

$$\dim F^{\perp}+\dim G^{\perp}=\dim E \quad (\bullet\bullet)$$

Les conditions $(\bullet)$ et $(\bullet\bullet)$ permettent d'affirmer que $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$ sont supplémentaires.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons maintenant que $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$ sont supplémentaires. D'après ce qui précède

$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp}=F \quad \text{et} \quad \left(G^{\perp}\right)^{\perp}=G$$

sont supplémentaires.

Exercice 4 p. 3

1. Comme F est de $\dim(E)-1$,

$$\dim\left(F^{\perp}\right)=1.$$

Soit $u_0\in F^{\perp}\setminus\{0_E\}$ de sorte que

$$F^{\perp}=\mathrm{Vect}(u_0).$$

Appliquons la proposition

$$v\in\left(F^{\perp}\right)^{\perp}=F \iff \langle u_0,v\rangle=0.$$

2.(a) Vérifier que $u_0=(2,3,-1)$ convient.

2.(b) Posons $Q(x)=x^3+ax^2+bx+c$ de sorte que

$$\langle 1,Q(x)\rangle=\frac{2a}{3}+2c,$$
$$\langle x,Q(x)\rangle=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b,$$
$$\left\langle x^2,Q(x)\right\rangle=\frac{2a}{5}+\frac{2c}{3}.$$

On vérifie que $Q(x)=5x^3-3x$ convient.

Exercice 5 p. 4

Le projecteur est orthogonal, u et $u-p(u)$ sont orthogonaux. D'où

$$\begin{aligned}\langle p(u),u\rangle&=\langle p(u),p(u)+\langle u-p(v)\rangle\rangle\\&=\underbrace{\langle p(u),p(u)\rangle}_{=\|p(u)\|^2}+\underbrace{\langle p(u),u-p(u)\rangle}_{=0}.\end{aligned}$$

Exercice 6 p. 4

- En tant que combinaison linéaire de deux applications linéaires (l'application id et l'application transposée), p est linéaire.
Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}p(p(M))&=p\left(\frac{M+{}^tM}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}p(M)+p({}^tM)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{M+{}^tM}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{{}^tM+M}{2}\right)\\&=p(M).\end{aligned}$$

L'application p est donc un projecteur.

- On vérifie que
$$\mathrm{Ker}(p) = \mathscr{A}_n \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(p) = \mathscr{S}_n$$

où $\mathscr{A}_n$ (resp. $\mathscr{S}_n$) désigne l'ensemble des matrices antisymétriques (symétriques). De plus, pour $A \in \mathscr{A}_n$, $S \in \mathscr{S}_n$
$$\begin{aligned}\langle A, S\rangle &= \mathrm{Tr}\left({}^t AS\right)\\ &= -\mathrm{Tr}(AS)\\ \langle S, A\rangle &= \mathrm{Tr}({}^t SA)\\ &= \mathrm{Tr}(SA)\\ &= \mathrm{Tr}(AS)\end{aligned}$$

Comme $\langle A, S\rangle = \langle S, A\rangle$, on a $\langle A, S\rangle = 0$. Ce résultats étant valables pour toutes matrices $A \in \mathscr{A}_n$, $S \in \mathscr{S}_n$, on en déduit que $\mathscr{A}_n$, $\mathscr{S}_n$ sont des sous-espaces orthogonaux. On a donc bien un projecteur orthogonal.

Exercice 7 p. 8

Exercice 8 p. 9

1. On a vu que si p est le projecteur orthogonal sur la droite vectorielle engendrée par u_0, on a
$$p(u) = \frac{\langle u, u_0\rangle}{\|u_0\|^2} u_0.$$
puis par le théorème de minimisation,
$$\begin{aligned}d(u, F)^2 &= \|u - p(u)\|^2\\ &= \|u\|^2 - \|p(u)\|^2\\ &= \|u\|^2 - \frac{\langle u, u_0\rangle^2}{\|u_0\|^2}.\end{aligned}$$
Si u_0 est unitaire on a simplement
$$d(u, F)^2 = \|u\|^2 - \langle u, u_0\rangle^2.$$

2. D'après les exemples page 6, on peut exprimer la projection orthogonal sur H à l'aide de u_0, un vecteur normal à H par
$$\forall u \in E, \quad p_H(u) = u - \frac{\langle u, u_0\rangle}{\|u_0\|^2} u_0.$$
D'où
$$\begin{aligned}d(u, H) &= \left\|u - p_H(u)\right\|\\ &= \left\|\frac{\langle u, u_0\rangle}{\|u_0\|^2} u_0\right\| = \frac{|\langle u, u_0\rangle|}{\|u_0\|}.\end{aligned}$$

Exercice 9 p. 9

- Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$, $F = \mathbb{R}_1[x]$ et le produit scalaire
$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

et $\|\cdot\|$, la norme associée. Dès lors, pour $P(t) = t^2$, on peut traduire le problème posé par
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(t^2 - at - b\right)^2 dt = \inf_{Q\in F} \|P - Q\|^2 = d(P, F)^2.$$

D'après le théorème précédent, on sait que cette quantité est bien définie, c'est même un minimum uniquement atteint pour $Q = p_F(P)$ au p_F est le projecteur orthogonal sur F.

- Calculons le projeté, puis la distance.

On a $F = \mathrm{Vect}(1, x)$ et $Q(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x$,
$$\begin{cases}\langle P - p_F(P), 1\rangle = 0\\ \langle P - p_F(P), x\rangle = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\langle P, 1\rangle = \left\langle p_F(P), 1\right\rangle\\ \langle P, x\rangle = \left\langle p_F(P), x\right\rangle\end{cases}$$
Or on a
$$\langle P, 1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}, \quad \langle P, x\rangle = \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0$$
$$\langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} dt = 2, \quad \langle x, 1\rangle = 0, \quad \langle x, x\rangle = \frac{2}{3}.$$
Pour $p_F(P)$, on obtient le système :
$$\begin{cases}\frac{2}{3} &= 2\cdot\lambda_1 + \lambda_2\cdot 0\\ 0 &= 0\cdot\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2.\end{cases}$$
D'où $\lambda_1 = 1/3$ et $\lambda_2 = 0$. $p_F(P) = \frac{1}{3}$ (polynôme constant). Dans ce cas
$$\begin{aligned}d(P, F)^2 &= \left\|P - p_F(P)\right\|^2\\ &= \|P\|^2 - \left\|p_F(P)\right\|^2.\end{aligned}$$
Le calcul donne
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(t^2 - at - b\right)^2 dt = d(P, F)^2 = \frac{8}{45}.$$

Exercice 10 p. 10

On calcule
$${}^t AA = \begin{bmatrix} 6 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}, \quad \left({}^t AA\right)^{-1} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 5 & -3\\ -3 & 6\end{bmatrix}$$
$${}^t AB = \begin{bmatrix} 4\\ 2\end{bmatrix} \text{ puis } X_0 = \left({}^t AA\right)^{-1}\left({}^t AB\right) = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Exercice 11 p. 10

1.(a) On a l'inclusion
$$\ker A \subset \ker\left({}^t AA\right).$$
Prouvons l'inclusion réciproque. Soit $X \in \ker({}^t AA)$. On a
$$\|AX\|^2 = {}^t(AX)(AX) = {}^t X\left({}^t AA\right)X = 0.$$
D'où $AX = 0$, $X \in \ker A$. On a donc l'égalité $\ker A = \ker\left({}^t AA\right)$. L'égalité sur le rang découle de la formule du rang.

1.(b) D'après l'énoncé, $\mathrm{rg}A = p$. Or
$${}^t AA \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}({}^t AA) = \mathrm{rg}A = p.$$
Nécessairement, ${}^t AA$ est inversible.

2.(a) Notons $p_{\mathrm{Im}\,f}(B)$, le projeté orthogonal de B sur l'image de f (voir notation du théorème). La matrice $B - p_{\mathrm{Im}\,f}(B)$ est orthogonal à tout vecteur de l'image
$$\begin{aligned}\forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad 0 &= \langle AX, B - AX_0\rangle\\ &= {}^t(AX)\,(B - AX_0)\\ &= {}^t X\,{}^t A\,(B - AX_0)\\ &= \left\langle X, {}^t A\,(B - AX_0)\right\rangle.\end{aligned}$$

2.(b) Seul le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs, donc
$$ {}^t\mathrm{A}\,(\mathrm{AX}_0-\mathrm{B})=0 \quad \text{puis} \quad {}^t\mathrm{AAX}_0={}^t\mathrm{AB}. $$

Exercice 12 — p. 12

Vérifier que le vecteur
$$ u=\frac{1}{\sqrt{n}}(1,1,\ldots,1)\in\mathbb{R}^n $$
donne une base orthonormée de $\mathrm{H}^\perp$. Notons U, le vecteur de U dans la base canonique. La matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{H}^\perp$ est alors $\mathrm{U}{}^t\mathrm{U}$.
La matrice de la projection orthogonale sur H est donc $\mathrm{I}_n-\mathrm{U}{}^t\mathrm{U}$. Après simplifications, on trouve
$$ \frac{1}{n}\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & -1\\ -1 & \cdots & -1 & n-1\end{bmatrix}. $$

Exercice 13 — p. 12

1. Le sous-espace H est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
$$ \dim\mathrm{H}=\dim\mathscr{M}_n(\mathbb{R})-1=n^2-1. $$
D'où $\qquad \dim\mathrm{H}^\perp=1.$

2. Toute matrice de $\mathrm{H}^\perp$ non nulle donne une base. Par exemple
$$ \mathrm{H}^\perp=\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)\,. $$
Notons p, le projecteur orthogonal sur H. Par le théorème de minimisation
$$ \min_{\mathrm{A}\in\mathrm{H}}\|\mathrm{A}-\mathrm{J}\|=\|p(\mathrm{J})-\mathrm{J}\|. $$
Or, on sait que $\mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}-p$ est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{H}^\perp$ (parallèlement à $\left(\mathrm{H}^\perp\right)^\perp=\mathrm{H}$). Et
$$ (\mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}-p)(\mathrm{J})=\frac{\langle \mathrm{J},\mathrm{I}_n\rangle}{\|\mathrm{I}_n\|^2}\mathrm{I}_n=\frac{n}{n}\mathrm{I}_n=\mathrm{I}_n $$
puis $\qquad p(\mathrm{J})=\mathrm{J}-\mathrm{I}_n.$

Enfin $\qquad \|p(\mathrm{J})-\mathrm{J}\|=\|\mathrm{I}_n\|=\sqrt{n}.$

On pourra relire la question 2 de l'exercice 8 pour les détails.

Exercice 14 — p. 12

1. Prouvons que **i**) implique **ii**).
Soit $x\in\mathrm{E}$, $p(x)\in\mathrm{Im}\,p$ et $x-p(x)\in\mathrm{Ker}\,p$. Comme dans le cas d'un projecteur orthogonal, le noyau est orthogonal à l'image, on a
$$ \begin{aligned}\langle x,p(x)\rangle &= \overbrace{\langle x-p(x),p(x)\rangle}^{=0}+\langle p(x),p(x)\rangle\\ &=\|p(x)\|^2\geqslant 0.\end{aligned} $$

Prouvons que **ii**) implique **i**).
Soient $x\in\mathrm{Ker}\,p$, $y\in\mathrm{Im}\,p$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a
$$ \begin{aligned}0\leqslant\langle\lambda x+y,p(\lambda x+y)\rangle &= \langle\lambda x+y,y\rangle\\ &=\lambda\langle x,y\rangle+\|y\|^2\end{aligned} $$
En regardant les cas $\lambda\to\pm\infty$, la condition sur le signe impose
$$ \langle x,y\rangle=0. $$
On en déduit que le noyau est orthogonal à l'image. Cela suffit pour dire que le projecteur est orthogonal.

2. i) implique **iii**).
Par le théorème de Pythagore avec x orthogonal à $p(x)$
$$ \|x\|^2=\|p(x)\|^2+\|x-p(x)\|^2. $$
Puis $\|x\|^2-\|p(x)\|^2\geqslant 0$, d'où l'énoncé.

iii) implique **i**).
Soient $x\in\mathrm{Ker}\,p$, $y\in\mathrm{Im}\,p$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
$$ \|\lambda x+y\|^2\geqslant\|p(\lambda x+y)\|^2=\|y\|^2 $$
En développant le membre de gauche
$$ \lambda^2\|x\|^2+2\lambda\langle x,y\rangle\geqslant 0. $$
Nécessairement $\langle x,y\rangle=0$ si on veut que l'inégalité soit valable pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$. En effet pour $\lambda\to 0$ et $\langle x,y\rangle\neq 0$ on aurait
$$ \lambda^2\|x\|^2+2\lambda\langle x,y\rangle\underset{\lambda\to 0}{\sim}2\lambda\langle x,y\rangle $$
et un changement de signe. De nouveau, on en déduit que le noyau est orthogonal à l'image. Cela suffit pour dire que le projecteur est orthogonal.

Exercice 15 — p. 12

Commençons par une remarque. Pour établir une égalité entre deux matrices $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, *il suffit de vérifier pour tout* $\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{AX}=\mathrm{BX}$ *(on peut revenir aux applications linéaires canoniquement associés pour s'en convaincre). Ensuite, on peut se limiter à vérifier l'égalité* $\mathrm{AX}=\mathrm{BX}$ *pour des vecteurs* X *qui forment une base de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a
$$ \mathrm{F}\oplus\mathrm{F}^\perp=\mathrm{E} \quad\text{et}\quad \mathrm{F}=\mathrm{Vect}\left(u_1,u_2,\cdots,u_p\right) $$
Complétons la base $\left(u_1,u_2,\cdots,u_p\right)$ en une base $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ de E. Notons U_i, la matrice de u_i dans la base orthonormée $\mathscr{B}$. Les matrices colonnes $\mathrm{U}_1,\ldots,\mathrm{U}_n$ forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

→ Soit $i_0\in[\![1;p]\!]$. D'une part,
$$ p_{\mathrm{F}}(u_i)=u_i \quad\text{i.e}\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(p_{\mathrm{F}}\right)\mathrm{U}_i=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(p_{\mathrm{F}}(u_i)\right)=\mathrm{U}_i. $$
D'autre part
$$ 0=\left\langle u_i,u_{i_0}\right\rangle={}^t\mathrm{U}_i\mathrm{U}_{i_0}=\delta_{i,i_0}. $$

Puis
$$\left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{U}_i {}^t\mathrm{U}_i\right)\mathrm{U}_{i_0} = \left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{U}_i\right){}^t\mathrm{U}_i\mathrm{U}_{i_0} = \mathrm{U}_{i_0}.$$
On a donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(p_{\mathrm{F}}\right)\mathrm{U}_{i_0} = \left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{U}_i {}^t\mathrm{U}_i\right)\mathrm{U}_{i_0}.$$

→ Soit $i \in [\![p+1;n]\!]$. D'une part
$$p_{\mathrm{F}}(u_i) = 0, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(p_{\mathrm{F}}\right)\mathrm{U}_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(p_{\mathrm{F}}(u_i)\right) = 0_{n,1}.$$
D'autre part, u_i est orthogonal à tous les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$:
$$\forall\, j \in [\![1;p]\!], \quad 0 = \left\langle u_j, u_i\right\rangle = {}^t\mathrm{U}_j\mathrm{U}_i.$$
Puis
$$\left(\sum_{j=1}^{p} \mathrm{U}_j {}^t\mathrm{U}_j\right)\mathrm{U}_i = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{U}_j\left({}^t\mathrm{U}_j\mathrm{U}_i\right) = 0_{n,1}.$$
On vérifie que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(p_{\mathrm{F}}\right)\mathrm{U}_i = \left(\sum_{j=1}^{p} \mathrm{U}_j {}^t\mathrm{U}_j\right)\mathrm{U}_i.$$

→ On conclut avec la remarque préliminaire.

Exercice 16 p. 12

1.a) La fonction F est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$. De plus,
$$\begin{cases} \partial_1 \mathrm{F}(x,y,z) = 48x + 12y + 4z - 240 \\ \partial_2 \mathrm{F}(x,y,z) = 4y + 12x + 2z - 48 \\ \partial_3 \mathrm{F}(x,y,z) = 2z + 2y + 4x - 12. \end{cases}$$
(x,y,z) est point critique si et seulement si le gradient est nul, si et seulement si
$$\begin{cases} 12x + 3y + z = 60 \\ 6x + 2y + z = 24 \\ 2x + y + z = 6. \end{cases}$$
On trouve $\mathrm{A} = (x,y,z) = (9,-18,6)$. Précisons que
$$\mathrm{F(A)} = -684.$$

1.b) Si F admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$, il est automatiquement atteint en un point critique. Or, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2$
$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x,y,z) - \mathrm{F(A)} = &(2x+y+z-6)^2 \\ &+ (4x+y-18)^2 + 4(x-9)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$
F(A) est bien un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

2.a) Par une intégration par parties, vérifier que
$$\mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n.$$
Comme $\mathrm{I}_0 = 1$, on obtient
$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{I}_{k+1}}{\mathrm{I}_k} = \prod_{k=0}^{n-1} (k+1) = n!$$
Remarque. On peut aussi utiliser les résultats sur les densités des lois gamma pour avoir
$$\mathrm{I}_n = \Gamma(n+1) = n!$$

2.b) Soient a, b, $c \in \mathbb{R}$, on développe le carré
$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b,c) &= \mathrm{I}_6 + a^2\mathrm{I}_4 + b^2\mathrm{I}_2 + c^2\mathrm{I}_0 \\ &\quad + 2a\mathrm{I}_5 - 2b\mathrm{I}_4 - 2c\mathrm{I}_3 \\ &\quad + 2ab\mathrm{I}_3 + 2ac\mathrm{I}_2 \\ &\quad + 2bc\mathrm{I}_1 \\ &= \mathrm{I}_6 + \mathrm{F}(a,b,c) \\ &= 720 + \mathrm{F}(a,b,c).\end{aligned}$$

2.c) On a vu que F admet un minimum atteint en $\mathrm{A} = (9,-18,6)$, donc la fonction $\mathrm{I} : (a, bc) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \mathrm{I}(a,b,c)$ admet aussi un minimum avec
$$\mathrm{I(A)} = 720 + \mathrm{F(A)} = 720 - 684 = 16.$$

3.a) Cours.

3.b) On a
$$\begin{aligned} d\left(\mathrm{P}_0, \mathrm{H}\right) &= \min_{\mathrm{Q}\in\mathrm{H}} \|\mathrm{P}_0 - \mathrm{Q}\| \\ &= \min_{\mathrm{Q}\in\mathrm{H}} \sqrt{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\mathrm{P}_0(t) - \mathrm{Q}(t)\right)^2 \mathrm{d}t} \\ &= \min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \sqrt{\mathrm{I}(a,b,c)}\end{aligned}$$
où on a écrit $\mathrm{Q}(x) = ax^2 + bx + c$. D'après ce qui précède
$$d\left(\mathrm{P}_0, \mathrm{H}\right) = 4.$$

3.c) On sait que le minimum est atteint pour le projeté de x^3 sur I. Il est donc atteint pour un point critique de I et aussi de F d'après la relation de la question 2.(b).

D'après la question 1.(a), le projeté est
$$\mathrm{T} = p_{\mathrm{H}}(\mathrm{P}_0) = a^2 + bx + c$$
avec $$(a,b,c) = \mathrm{A} = (9,-18,6).$$
La distance de P_0 à H vérifie
$$d(\mathrm{P}_0,\mathrm{H})^2 = \|\mathrm{P}_0 - \mathrm{T}\|^2 = \|\mathrm{P}_0\|^2 - \|\mathrm{T}\|^2.$$
Le reste est du calcul...

Donnons une rédaction qui n'utilise pas les premières questions.
D'après le théorème de minimisation, la distance de P_0 à H est bien définie et atteinte pour $p_{\mathrm{H}}\left(\mathrm{P}_0\right)$ le projeté orthogonal de P_0 sur H.
Calculons ce projeté.
Comme $\mathrm{Q} = p_{\mathrm{H}}\left(\mathrm{P}_0\right) \in \mathrm{H}$, il existe a, b, $c \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Q} = ax^2 + bx + c$. De plus $\mathrm{P}_0 - \mathrm{Q} \in \mathrm{H}^\perp$ donc
$$\begin{cases} \langle \mathrm{P}_0 - \mathrm{Q}, 1\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{P}_0 - \mathrm{Q}, x\rangle = 0 \\ \left\langle \mathrm{P}_0 - \mathrm{Q}, x^2\right\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle \mathrm{P}_0, 1\rangle = \langle \mathrm{Q}, 1\rangle \\ \langle \mathrm{P}_0, x\rangle = \langle \mathrm{Q}, x\rangle \\ \left\langle \mathrm{P}_0, x^2\right\rangle = \left\langle \mathrm{Q}, x^2\right\rangle \end{cases}$$
En utilisant la question 2.(a) :
$$\begin{cases} \mathrm{I}_3 = a\mathrm{I}_2 + b\mathrm{I}_1 + c\mathrm{I}_0 \\ \mathrm{I}_4 = a\mathrm{I}_3 + b\mathrm{I}_2 + c\mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_5 = a\mathrm{I}_4 + b\mathrm{I}_3 + c\mathrm{I}_2 \end{cases}$$

C'est-à-dire
$$\begin{cases} 6 = 2a+b+c \\ 24 = 6a+2b+c \\ 120 = 24a+6b+2c. \end{cases}$$
On retrouve $a = 9$, $b = -18$ et $c = 6$.

Exercice 17 p. 13

Exercice 18 p. 13

Exercice 19 p. 15

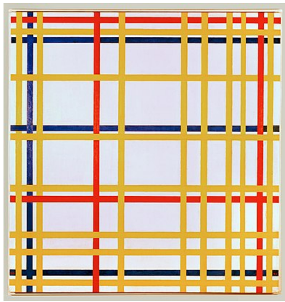
1. On a
$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\langle u, \mathrm{X}\rangle) &= \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \mathrm{X}_i\right) \\ &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \mathrm{X}_i, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{U}_j \mathrm{X}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i u_j \,\mathrm{Cov}\left(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j\right) = {}^t u \mathrm{C}_{\mathrm{X}} u. \end{aligned}$$

2. • Supposons que $u \in \mathrm{Ker}(\mathrm{C}_{\mathrm{X}})$. Dans ce cas
$$\mathbf{V}(\langle u, \mathrm{X}\rangle) = {}^t u \mathrm{C}_{\mathrm{X}} u = {}^t u \cdot 0 = 0.$$
On en déduit que la variable $\langle u, \mathrm{X}\rangle$ est presque surement constante. La constante vaut l'espérance et par linéarité
$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\langle u, \mathrm{X}\rangle) &= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \mathrm{X}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i \underbrace{\mathbf{E}\left(\mathrm{X}_i\right)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$
Autrement dit, presque surement, $\langle \mathrm{U}, \mathrm{X}\rangle = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{X} \in \mathrm{H} = \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$.

• Réciproquement, supposons que $\mathrm{X} \in \mathrm{H}^{\perp}$. On a donc d'après ce qui précède
$${}^t u \mathrm{C}_{\mathrm{X}} u = 0$$
Notons que C_{X} est une matrice symétrique avec pour pour tout $v \in \mathbb{R}^n$
$${}^t v \mathrm{C}_{\mathrm{X}} v = \mathbf{V}(\langle v, \mathrm{X}\rangle) \geqslant 0.$$
On retrouve le cas des matrices symétriques positives. On en déduit que le spectre de C_{X} *est inclus dans* $\mathbb{R}^+$ *et il existe une matrice* L *symétrique telle que* $\mathrm{C}_{\mathrm{X}} = \mathrm{L}^2 = {}^t\mathrm{L}\mathrm{L}$. Poursuivons :
$$\begin{aligned} \|\mathrm{L}u\| &= {}^t(\mathrm{L}u)(\mathrm{L}u) \\ &= {}^t u {}^t\mathrm{L}\mathrm{L}u = {}^t u \mathrm{C}_{\mathrm{X}} u = 0 \end{aligned}$$
D'où $\mathrm{L}u = 0$ puis $\mathrm{C}_{\mathrm{X}} u = 0$. Finalement
$$u \in \mathrm{Ker}\, \mathrm{C}_{\mathrm{X}}.$$

Exercice 20 p. 15

L'ensemble Δ_a est une droite vectorielle, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1. Le théorème de minimisation par les projecteurs orthogonaux permet de dire que Y est bien définie, c'est même un minimum atteint pour
$$u = p(\mathrm{M})$$
où p est la projection orthogonale sur Δ_a. Notons que $(1, a) \in \Delta_a$ et le vecteur
$$e = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1, a)$$
engendre Δ_a et est normé. Dans ce cas,
$$p(\mathrm{M}) = \langle \mathrm{M}, e\rangle e = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(\mathrm{X}_1 + a\mathrm{X}_2)\, e$$
Ensuite, par le théorème de Pythagore
$$\begin{aligned} \mathrm{Y} &= \|\mathrm{M} - p(\mathrm{M})\|^2 = \|\mathrm{M}\|^2 - \|p(\mathrm{M})\|^2 \\ &= \|\mathrm{M}\|^2 - \langle \mathrm{M}, e\rangle^2 \\ &= \mathrm{X}_1^2 + \mathrm{X}_2^2 - \frac{(\mathrm{X}_1 + a\mathrm{X}_2)^2}{1+a^2} \\ &= \frac{\left(1+a^2\right)\left(\mathrm{X}_1^2+\mathrm{X}_2^2\right) - \left(\mathrm{X}_1^2 + 2a\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2 + a^2\mathrm{X}_2^2\right)}{1+a^2} \\ &= \frac{a^2\mathrm{X}_1^2 + \mathrm{X}_2^2 - 2a\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2}{1+a^2} \\ &= \frac{(a\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2)^2}{1+a^2} \\ \mathrm{Y} &= \mathrm{Z}^2. \end{aligned}$$
où $\mathrm{Z} = (a\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2)/\sqrt{1+a^2}$. D'après la stabilité par combinaison linéaire des lois normales dans le cas d'indépendance, on a
$$\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1).$$
car
$$\mathbf{E}(\mathrm{Z}) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(a\mathbf{E}(\mathrm{X}_1) + \mathbf{E}(\mathrm{X}_2)) = 0$$
et
$$\mathbf{V}(\mathrm{Z}) = \frac{1}{1+a^2}\left(a^2\mathbf{V}(\mathrm{X}_1) + \mathbf{V}(\mathrm{X}_2)\right) = 1$$
De plus, d'après la formule de Koenig-Huygens
$$\mathbf{E}\left(\mathrm{Z}^2\right) = \mathbf{V}(\mathrm{Z}) + \mathbf{E}(\mathrm{Z})^2.$$
Finalement, on trouve tout simplement
$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}) = 1.$$



New York City,
1942, Piet Mondriaan