CHAPITRE 16

Convergences et approximations

Ce calcul délicat s'étend aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité.

PIERRE-SIMON, MARQUIS DE LAPLACE
Mathématicien, physicien français (1749-1827)

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir les notions de convergences vues en première année afin de pouvoir énoncer et illustrer deux des grands théorèmes des probabilités : la loi des grands nombres et le théorème limite central.

1 Inégalités de concentration

PROPOSITION **inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev**

- *Soit* Z *une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathbf{P}\big([Z \geqslant \lambda]\big) \leqslant \frac{\mathbf{E}(Z)}{\lambda}.$$

- *Soit* X *une variable aléatoire réelle admettant une variance, alors*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathbf{P}\big(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Preuve. Pour tout événement A, on définit l'application *indicatrice de* A, notée $\mathbf{1}_A$, par

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application $\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbf{P}(A)$. Ainsi

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A).$$

Par conséquent, pour toute variable aléatoire positive Z, la croissance de l'espérance donne

$$Z \geqslant \lambda \mathbf{1}_{[Z\geqslant\lambda]} \quad \text{puis} \quad \mathbf{E}(Z) \geqslant \lambda \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{[Z\geqslant\lambda]}\right) = \lambda \mathbf{P}\big([Z \geqslant \lambda]\big).$$

On en déduit la première inégalité. La seconde inégalité en découle directement en considérant $Z = \big(X - \mathbf{E}(X)\big)^2$ et $\lambda = \varepsilon^2$.

$$\mathbf{P}\big(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) = \mathbf{P}\big((X - \mathbf{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\big) \leqslant \frac{\mathbf{E}\Big(\big(X - \mathbf{E}(X)\big)^2\Big)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

■

Exercice 1

✦ **Preuve dans le cas discret et à densité**

1. Soit Z une variable aléatoire discrète positive admettant une espérance. Notons $Z(\Omega) = \{z_i \mid i \in I\}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. On pose $J = \{i \in I \mid z_i \geqslant \lambda\}$.
   a) Vérifier que $\mathbf{P}\big([Z \geqslant \lambda]\big) = \sum_{i \in J} \mathbf{P}\big([Z = z_i]\big)$.
   b) En déduire l'inégalité de Markov.
2. Faire la preuve dans le cas d'une variable aléatoire à densité.

p. 29

Exemple. Si $\mathbf{E}(X) = 10$ et $\sigma(X) = 0.1$ sont les valeurs exactes de la moyenne et de l'écart-type d'une variable aléatoire X, sans aucune indication particulière sur la loi de X, on sait que X prendra des valeurs entre 9.7 et 10.3 avec une probabilité supérieure à 88%. En effet,

$$\mathbf{P}\big(|X-10| \geqslant 0,3\big) \leqslant \frac{(0,1)^2}{(0,3)^2} = \frac{1}{9}, \quad \text{puis,} \quad \mathbf{P}\big(|X-10| < 0,3\big) = 1 - \mathbf{P}\big(|X-10| \geqslant 0,3\big) \geqslant 1 - \frac{1}{9} \simeq 88\%.$$

Si on connait la loi de X, on a des estimations beaucoup plus précises.

Exercice 2

✦ En moyenne, une personne sur 100 sait placer dans le bon ordre les pays baltes sur une carte. On choisit au hasard n personnes et de manière indépendante, notons Y_n le pourcentage des personnes capables de donner le bon ordre.

1. Donner l'espérance et la variance de Y_n.
2. Par application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une valeur de n à partir de laquelle Y_n se trouve dans l'intervalle

$$I =]0,009; 0,011[$$

avec une probabilité supérieure à 0,9.

p. 29

Remarque. Ces inégalités ont peu d'applications pratiques, car la majoration qu'elles fournissent est la plupart du temps excessive, mais elles sont valables quelle que soit la loi de X, pourvu que l'on puisse définir une espérance ou une variance. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous permettra toutefois de démontrer la loi faible des grands nombres (voir théorème page 4).

Exercice 3

✦ Soit X une variable aléatoire possédant une espérance de 6 et une variance de 2. Appliquer, lorsque cela est possible, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour majorer ou minorer les probabilités des événements suivants. Préciser si le résultat obtenu est intéressant.

p. 30

1. $[2 \leqslant X \leqslant 10]$;
2. $[5 < X < 7]$;
3. $[X \leqslant 7]$;
4. $[|X-6| \geqslant 1]$;
5. $[X \geqslant 11]$;
6. $[X \geqslant 4]$.

2 Convergence en probabilité

2.1 Définition et exemples

DÉFINITION **Convergence en probabilité**

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *et* X *une variable aléatoire définie aussi sur cet espace.*
On dit que la suite $(X_n)_n$ ***converge en probabilité*** *vers la variable aléatoire* X*, noté* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} X$ *si :*

$$\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_*^+,\qquad \mathbf{P}\big(|X_n - X|\geqslant\varepsilon\big)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0..$$

Exemple. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose de plus que

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad X_n\hookrightarrow\mathscr{U}([0;1]).$$

Étudions la convergence en probabilité de la variable $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Soit $\varepsilon\in\,]0;1[$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(|Y_n-1|\geqslant\varepsilon\big) = \mathbf{P}(1-Y_n\geqslant\varepsilon) = \mathbf{P}(Y_n\leqslant1-\varepsilon) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i\leqslant1-\varepsilon]\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_i\leqslant1-\varepsilon)\ \text{indépendance des variables aléatoires}\\
&= \big(F(1-\varepsilon)\big)^n \qquad \text{où F est la fonction de répartion de la loi } \mathscr{U}([0;1])\\
\mathbf{P}(|Y_n-1|\geqslant\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \qquad & \text{car } 1-\varepsilon\in\,]0;1[.
\end{aligned}$$

On constate que $$\mathbf{P}(|Y_n-1|\geqslant\varepsilon)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Notons que si $\varepsilon\geqslant1$, la conclusion est identique.
On vient de montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire presque surement constante à 1.

Exercice 4

✧ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Reprendre le calcul précédent pour justifier la convergence en probabilité de $(Z_n)_n$ vers une variable aléatoire que l'on précisera. p. 30

Remarque. Une suite de variables à densité peut donc converger vers une variable discrète. Nous verrons que la réciproque est aussi possible.

2.2 Les théorèmes de convergence en probabilité

Règles de calcul

Attention. Contrairement au cas des suites réelles ou des fonctions numériques, il n'y a pas unicité de la limite (si elle existe). Plus précisément, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et X, X′ des variables aléatoires définies sur le même espace et telles que

$$X_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}}X \quad\text{et}\quad X_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}}X' \quad\text{alors}\quad \mathbf{P}\big(X\neq X'\big)=0.$$

Pour les détails de la démonstration, on pourra consulter l'exercice **??**, p.**??**.

PROPOSITION **convergence en probabilité et combinaisons linéaires**

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de variables aléatoires sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si $\quad X_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}}X$ *et* $Y_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}}Y$

Alors *pour tout* $\lambda\in\mathbb{R}$, $\quad \lambda X_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}}\lambda X$ *et* $X_n+Y_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}}X+Y.$

Exercice 5

✦ Prouver cet énoncé. *Pour le second point, on pourra utiliser l'encadrement*

$$\left[|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \cap \left[|Y_n - Y| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset \left[\left|X_n + Y_n - (X+Y)\right| < \varepsilon\right].$$

p. 30

Exemple. Reprenons l'exercice 4 avec $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathscr{U}([0;1])$. On a

$$\frac{1}{2}\left(\max\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) + \min\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}.$$

PROPOSITION — **composition par une fonction continue**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- *La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X.*
- *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.*

Alors

$$f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} f(X).$$

Résultat admis.

Remarque. On peut affiner le théorème en ne supposant seulement que f est continue sur un intervalle I tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n \in I) = 1$.

Exercice 6

✦✦ **Preuve dans deux cas particuliers**

Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x-y|$.
   Montrer que $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} f(X)$.
2. Justifier que si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec les variables X_n à valeurs dans $[a;b]$, alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} f(X)$.

p. 30

Loi faible des grands nombres

THÉORÈME — **loi faible des grands nombres**

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et X une variable aléatoire définie aussi sur cet espace.

Si
- *La variable X admet un moment d'ordre 2.*
- *Les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi que X.*

Alors *la suite des variables aléatoires $\overline{X_n}$, moyenne arithmétique des n variables $X_1, X_2, \cdots, X_n$, converge en probabilité vers son espérance mathématique $\mathbf{E}(X)$. Autrement dit,*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} \mathbf{E}(X).$$

Preuve. Calculons l'espérance mathématique et la variance de la moyenne arithmétique $\overline{X_n}$. Par linéarité de l'espérance sachant que les X_i ont même loi et sachant que les variables ont même loi et donc même espérance $\mathbf{E}(X)$, il vient

$$\mathbf{E}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(X_i) = \frac{n\mathbf{E}(X)}{n} = \mathbf{E}(X).$$

Par indépendance des variables X_i, $$\mathbf{V}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}(X_i) = \frac{\mathbf{V}(X)}{n}.$$

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec la variable $\overline{X_n}$,

$$\mathbf{P}\big(|\overline{X_n} - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) = \mathbf{P}\big(|\overline{X_n} - \mathbf{E}(\overline{X_n})| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(\overline{X_n})}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{V}(X)}{n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où le résultat. ■

Remarque. Loi faible des grands nombres dans le cas de la loi binomiale
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ avec

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n; p).$$

Il existe une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes de même loi (de Bernoulli de paramètre p) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n et $\sum_{i=1}^{n} X_i$ soient égaux en loi. D'après la loi faible des grands nombres, on obtient la convergence en probabilité :

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} Z, \qquad \text{où Z est une variable aléatoire certaine égale à } p.$$

Application. Considérons une expérience aléatoire, et un événement A de probabilité théorique p associé à cette expérience. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Répétons n fois l'expérience de manière indépendante et désignons par X_n le nombre de succès (c'est-à dire le nombre de fois où A est réalisé). Y_n suit donc une loi binomiale de paramètres n, p.
Posons de plus,

$$F_n(A) = \frac{Y_n}{n}, \text{ la fréquence empirique d'apparition de l'événement A.}$$

Par la loi faible des grands nombres, on en déduit l'énoncé suivant :

COROLLAIRE — **interprétation d'une probabilité**

Lorsque le nombre d'expériences aléatoires augmente indéfiniment, la fréquence d'apparition $F_n(A)$ *d'un événement* A *converge en probabilité vers sa probabilité théorique* p*. Autrement dit*

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathbf{P}\Big(\big|F_n(A) - p\big| > \varepsilon\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a une première formulation mathématique de l'interprétation intuitive d'une probabilité d'un événement.

> La probabilité d'un événement est la fréquence que l'on observerait si on effectuait une infinité de fois l'expérience dans « des conditions parfaitement identiques ».

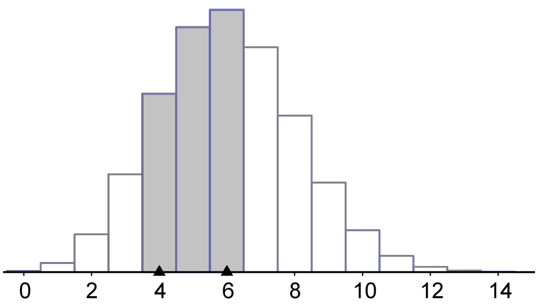
Remarques.
- Il existe de nombreuses versions de la loi des grands nombres. Par exemple, la loi *forte* des grands nombres établit la convergence *presque sûr* de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir exercice 41, p.27).
- Nous verrons une nouvelle application avec les méthodes dites de Monte-Carlo (p. 19).

3 Convergence en loi

3.1 Rappels : représentations graphiques des lois

Cas des variables aléatoires discrètes

• Soit X une variable finie avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$.
Nous avons vu que l'on peut résumer une loi d'une variable finie par un tableau. Pour chaque indice i, on indique la probabilité $\mathbf{P}(X = x_i)$.
On peut aussi utiliser les diagrammes en bâtons, en abscisse, on place les valeurs x_i. Dans la suite, on s'arrange pour que la hauteur du bâton partant de x_i soit telle que l'aire du rectangle s'identifie à $\mathbf{P}(X = x_i)$.

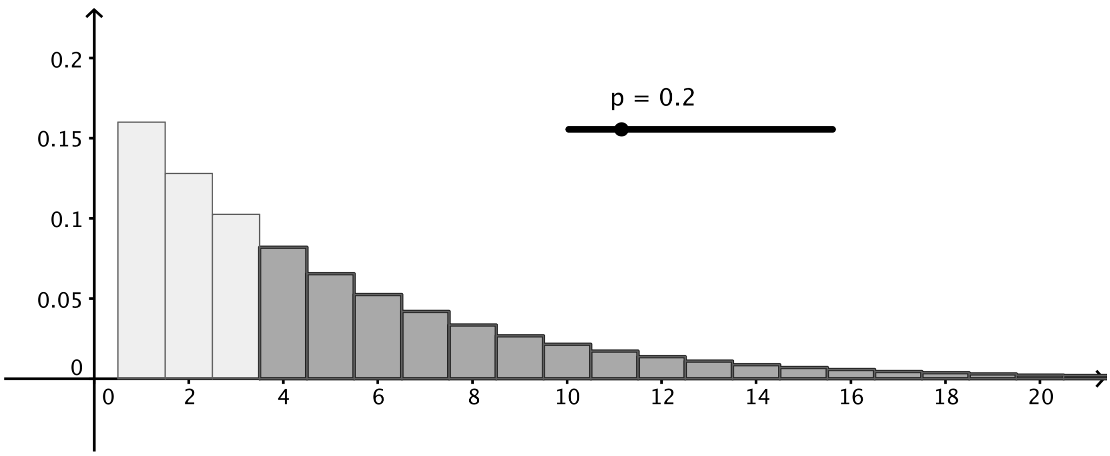


Exemple. Ci-contre, le cas de la loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0,3$.
Notons que pour avoir la probabilité $\mathbf{P}\Big([X \in [a;b]]\Big)$, il suffit de sommer les aires des rectangles compris entre les abscisses a et b. En particulier, la somme des aires totales des rectangles est $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
Dans notre exemple, la partie grisée a pour aire

$$\mathbf{P}\Big([X \in [4;6]]\Big).$$

• Lorsque X est une variable aléatoire discrète dénombrable ($X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$), on ne considère qu'un nombre fini de valeurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. En géneral, les valeurs où la probabilité n'est pas négligeable.

Donnons l'exemple de la loi géométrique de paramètre $p = 0,2$ où on s'est limité à $[\![0;20]\!]$.



L'aire de la partie la plus grisée correspond à une approximation de $\mathbf{P}([X \geqslant 4])$.

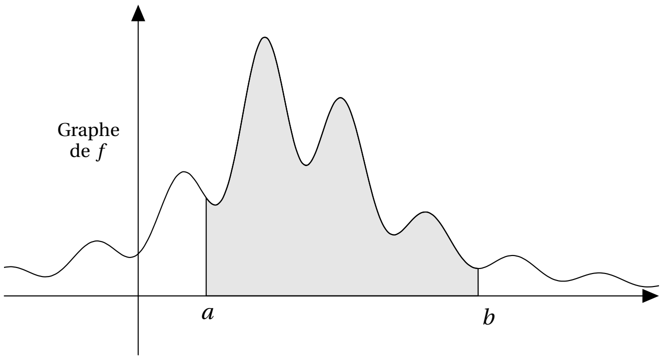
Graphe des densités des variables aléatoires à densité

Soit X une variable aléatoire à densité dont f, est une densité.
L'aire de la partie grisée comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ correspond exactement à la probabilité que X prenne les valeurs entre a et b.

$$\text{Aire} = \mathbf{P}\big([a \leqslant X \leqslant b]\big) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$, on retrouve bien

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$



3.2 Définition et exemples

DÉFINITION — **convergence en loi**

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires et* X *une variable aléatoire toutes définies sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Notons
- *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, F_n, *la fonction de répartition de la variable* X_n,
- F, *la fonction de répartition de la variable* X.

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge en loi*** *vers* X, *noté* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$, *si en tout point x de continuité de* F :

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x).$$

⚠ **Attention.** Il n'y a pas unicité de la limite lors d'une convergence en loi. Si X et Y sont deux variables aléatoires de même loi, alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X \iff X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Y.$$

Exemples.
- *Exemple 1.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on vérifie que la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = n^2 t \exp\left(-n^2 t^2/2\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

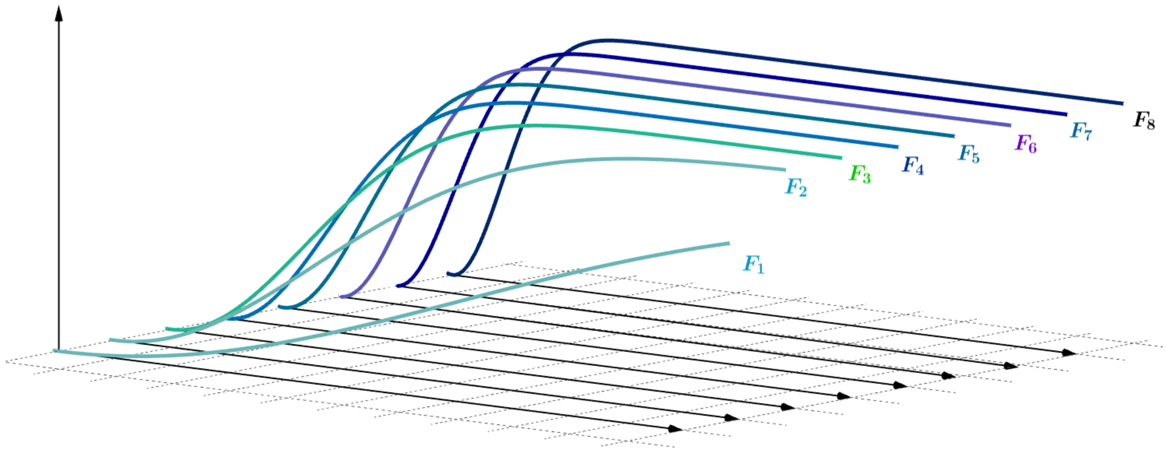
est une densité de probabilité. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à densité où f_n est une densité de X_n. Dans un premier temps, on montre que la fonction de répartition F_n de X_n est donnée par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x n^2 t \exp\left(-n^2 t^2/2\right)\mathrm{d}t = \left[-\exp\left(-n^2 t^2/2\right)\right]_0^x = 1 - \exp\left(-n^2 x^2/2\right).$$

Vérifions par le calcul que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X où X est une variable presque surement constante à 0.
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Procédons par disjonction des cas :

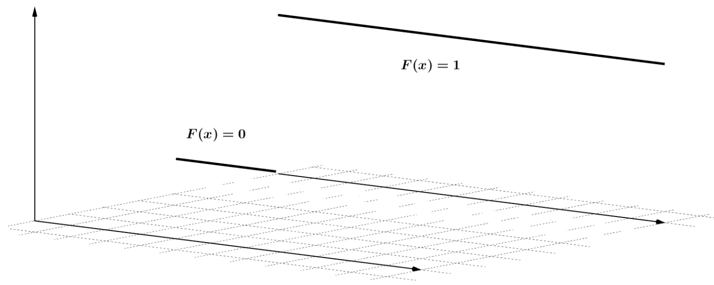
- Si $x \in \mathbb{R}_*^-$, $F_n(x) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = F(x)$.
- Si $x \in \mathbb{R}_*^+$, $F_n(x) = 1 - \exp\left(-n^2 x^2/2\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = F(x)$.
- Il n'est pas utile de considérer le cas $x = 0$. C'est un point de discontinuité de F.

Représentons les courbes des premières fonctions de répartition.



On constate que « les courbes convergent vers une courbe limite » qui n'est autre que la courbe de la fonction de répartition d'une loi presque surement constante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



- *Exemple 2.*

Reprenons le cas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1]).$$

Étudions la convergence en loi des variables $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F_{Y_n}(x) = G(x)^n \quad \text{où} \quad \text{G est la fonction de répartion de } \mathscr{U}([0;1]).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ **fixé.** Procédons par disjonction des cas.

- Lorsque $x \in \mathbb{R}_*^-$, on a directement $F_{Y_n}(x) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Pour $x \in [0;1[$, on a $F_{Y_n}(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Enfin, pour $x \in [1;+\infty[$, $F_{Y_n}(x) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

En résumé, si F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire presque surement constante, pour tout point x de continuité de F (ici $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$), on a

$$F_{Y_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x).$$

C'est la définition, de la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une variable presque surement constante en 1.

- L'exercice suivant donne un exemple où la suite converge vers une variable non presque surement constante.

Exercice 7

✦ Reprenons les notations de l'exemple précédent et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n = n(1 - Y_n).$$

p. 31

Étudier la convergence en loi de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

PROPOSITION — **convergence en loi**

La convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers une variable* X *impose pour tous points* a, b *de continuité de* F

$$\mathbf{P}\Big([a < X_n \leqslant b]\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}\Big([a < X \leqslant b]\Big).$$

Preuve. Il suffit de rappeler que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}\Big([X_n \in]a;b]\,]\Big) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a), \quad \mathbf{P}\Big([X \in]a;b]\,]\Big) = F_X(b) - F_X(a)$$

et, en tous points a, b de continuité de F,

$$F_{X_n}(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(a), \quad F_{X_n}(b) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(b).$$

■

PROPOSITION — **convergence en loi dans le cas discret**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires telles que :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n(\Omega) \subset \mathbb{N} \quad \textit{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}\big([X_n = k]\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p_k \in [0;1].$$

Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers une variable aléatoire* X *avec*

$$X(\Omega) \subset \mathbb{N} \quad \textit{et} \quad \forall\, k \in X(\Omega), \qquad \mathbf{P}\big([X = k]\big) = p_k.$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

- Si $x < 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n(x) = 0$ et $F(x) = 0$. On a bien $F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x)$.
- Si $x \geqslant 0$. On a maintenant

$$F_n(x) = \mathbf{P}(X_n \leqslant x) = \mathbf{P}(X_n \leqslant \lfloor x \rfloor) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbf{P}(X_n = k).$$

  La somme est finie, le nombre de termes est indépendants de n. On a

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} p_k = F(x).$$

La définition est vérifiée, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

■

Remarque. Noter que la réciproque est vraie, c'est une conséquence directe de l'énoncé précédent où pour $k \in \mathbb{N}$, on choisit $[a;b] = [k - 1/2; k + 1/2]$ de sorte que

$$\mathbf{P}\Big([a < X_n \leqslant b]\Big) = \mathbf{P}\big([X_n = k]\big).$$

Exemple. Si $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p_n)$ avec $p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p \in]0;1[$. On montre que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. En effet, seules les valeurs $k \in \{0;1\}$ comptent et

$$\mathbf{P}\big([X_n = 1]\big) = p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\big([X_n = 0]\big) = 1 - \mathbf{P}\big([X_n = 1]\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - p.$$

Exercice 8

✧ **Exemples** *Les questions 1 et 2 sont indépendantes*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_n une variable aléatoire de loi

$$X_n(\Omega) = \{0;1;2\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([X_n = 0]) = \frac{n-\alpha}{3n}, \quad \mathbf{P}([X_n = 1]) = \frac{n+\cos(n)^2}{3n} \quad \mathbf{P}([X_n = 2]) = \frac{n+\sin(n)^2}{3n}.$$

p. 31

   a) Déterminer la valeur de α.
   b) Vérifier que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi usuelle.

2. Soit $X_n \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_n)$ avec $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}_*^+$.
   Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

3.3 Les théorèmes de convergence en loi

Règles de calculs sur les limites

⚠ **Attention.** Contrairement à la convergence en probabilité, la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X et Y n'implique pas nécessairement la convergence de la suite $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $X + Y$.

Exercice 9

✦ **Contre-exemple**
Soit $X \in \mathscr{B}(1/2)$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X$ et $Y_n = X$.
Vérifier que cela fournit bien un contre-exemple.

p. 32

Remarques. *Un peu de hors-programme*

- On montre que la convergence en probabilité implique la convergence en loi :

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbf{P}}{\longrightarrow}} X \quad \Rightarrow \quad X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X \qquad \text{(voir exercice 42, p.27).}$$

Il est à noter que la réciproque est fausse. Il suffit de reprendre le contre-exemple de l'exercice précédent.

Exercice 10

✧ Soient c un réel et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en loi vers une variable aléatoire X. Alors la suite de variables aléatoires $(X_n + c)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X + c$.

p. 32

- L'exercice s'étend avec le théorème de Slutsky :

Si $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X$ et si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une constante c, alors :

  – $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X + c$
  – $(X_n Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers cX.

La preuve en exercice (page 27).

PROPOSITION **composition et convergence en loi**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- *La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.*
- *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.*

Alors

$$f(X_n) \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} f(X).$$

Résultat admis.

Exercice 11

✦ **Cas particulier**

Justifier l'énoncé précédent dans le cas particulier où la fonction f est bijective croissante.

p. 32

Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson

THÉORÈME — **convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson**

Soient $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires binomiales* $\mathscr{B}(n;p_n)$ *telles que*

$$np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}_*^+.$$

Alors la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Poisson* $\mathscr{P}(\lambda)$.

$$\mathrm{X}_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathscr{L}}} \mathrm{Z} \quad \textit{avec} \quad \mathrm{Z} \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda).$$

Exercice 12

✦✦ Voici la preuve du théorème. Complétez-la.

Soit $k\in\mathbb{N}$. Pour $n\geqslant k$, on a $\quad \mathbf{P}\big([\mathrm{X}_n=k]\big)=\binom{n}{k}{p_n}^k(1-p_n)^{n-k}=\binom{n}{k}(1-p_n)^n\left(\dfrac{p_n}{1-p_n}\right)^k.$

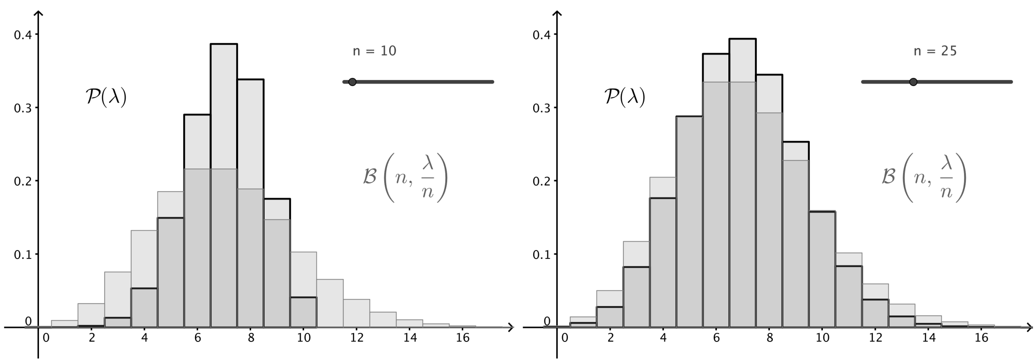
1. Justifier les équivalents de chacun des facteurs lorsque n tend vers $+\infty$ (k est fixé). p. 32

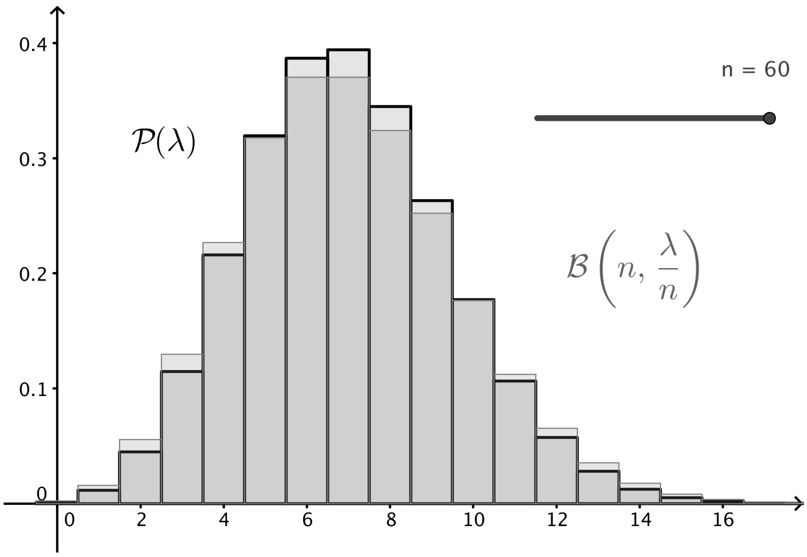
$(a)\quad \left(\dfrac{p_n}{1-p_n}\right)^k \underset{n+\infty}{\sim} \left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k;\quad (b)\quad \ln(1-p_n) \underset{n+\infty}{\sim} -\dfrac{\lambda}{n},\ (1-p_n)^n \underset{n+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\lambda};\quad (c)\quad \binom{n}{k} \underset{n+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}.$

2. Conclure.

Interprétation graphique

On trace les diagrammes représentant les lois binomiales $\mathscr{B}(n;\lambda/n)$ et de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. On constate que plus n est grand, plus les diagrammes associés aux lois $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{B}(n;\lambda/n)$ se confondent.





Application à l'approximation

Considérons $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$, on a pour $k \in [\![0;n]\!]$,

$$\mathbf{P}\big([X=k]\big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ce produit peut être assez difficile à évaluer numériquement lorsque n est « très grand » et p « petit ». En effet, on doit faire le produit entre p^k extrêmement petit et $\binom{n}{k}$ potentiellement très grand. Notons de plus, que les coefficients binomiaux ne sont pas si aisés à calculer [1].
L'idée est donc dans les cas limites (n est « très grand » et p « petit ») d'avoir une expression approchée plus simple de la probabilité en posant $\lambda = np$ et

$$\mathbf{P}\big([X=k]\big) \simeq \mathbf{P}\big([Z=k]\big) \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda).$$

Remarque. Dans la pratique, dès que $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0,1$ et $np < 15$, on approche $\mathscr{B}(n,p)$ par $\mathscr{P}(np)$.

Exemple. En moyenne un étudiant d'ECG fait une faute d'orthographe tous les 500 mots.
Lors d'une rédaction de 2000 mots, quelle est la probabilité de faire plus de 5 fautes ?

Modélisons la situation : la probabilité de faire une faute sur un mot est $p = 1/500$. On suppose que les fautes arrivent de manière indépendantes (c'est une hypothèse forte). Lors de la rédaction, on a donc une succession de 2000 expériences de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes. Si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de fautes alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 2000$ (le nombre de répétitions) et $p = 1/500$ (le paramètre de la loi de Bernoulli). Ainsi, la probabilité recherchée est

$$\mathbf{P}\big([X \geqslant 5]\big) \quad = \quad 1 - \mathbf{P}\big([X<5]\big) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \mathbf{P}\big([X=k]\big) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{2000}{k} \left(\frac{1}{500}\right)^k \left(\frac{499}{500}\right)^{2000-k}.$$

Cette somme est difficile à évaluer. On peut la calculer avec PYTHON :

---

1. On pourra penser à la formule $\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$. Cette formule est peu pratique à cause de la forte croissance de la factorielle.

Console

```
p=1/500
q=1-p
n=2000
print(1-(q**n+n*p*q**(n-1)+n*(n-1)/2*p**2*q**(n-2)+n*(n-1)*(n-2)/6*p**(3)*q**(n-3)+n*(n-1)
    *(n-2)*(n-3)/24*p**4*q**(n-4)))

>>> # script executed

0.371162999567369
```

Comme $n \gg 1$ et $np = 4$. D'après ce qui précède, on peut approximer par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$. Soit $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathscr{P}(4)$, alors

$$\mathbf{P}\big([\mathrm{X} \geqslant 5]\big) \simeq \mathbf{P}\big([\mathrm{Z} \geqslant 5]\big) = 1 - \mathbf{P}\big([\mathrm{Z} \leqslant 4]\big) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{4} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

PYTHON donne

Console

```
lda=4
print(1-np.exp(-lda)*(1+lda+lda**2/2+lda**3/6+lda**4/24))

>>> # script executed
0.3711630648201266
```

L'erreur relative est d'environ 3×10^{-7}%. L'approximation est ici excellente.

Exercice 13. Soit $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

1. **a)** Justifier que pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

b) En déduire $\mathbf{P}\big([\mathrm{Z}\,\text{est pair}]\big)$.

2. *Application.* Une ligne de transmission entre émetteur et récepteur transporte des données représentées par 10 000 bits (un bit est un élément de $\{0;1\}$). La probabilité que la transmission d'un bit soit erronée est estimée à 10^{-5} et on admet que les erreurs sont mutuellement indépendantes les unes des autres. On contrôle la qualité de la transmission avec un calcul de parité sur le nombre de « 1 » envoyés :

- S'il y a un nombre impair d'erreurs, un message d'erreur apparaît.
- Sinon, c'est-à-dire s'il y a un nombre pair d'erreurs, la transmission est acceptée.

a) Considérons X la variable aléatoire associant à chaque envoi de données, le nombre d'erreurs lors de la transmission, c'est-à-dire le nombre de bits parmi les 10 000 dont la transmission est erronée. Quelle est la loi de X ?

b) Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune erreur sachant que la transmission est acceptée.
On admettra que l'on peut approximer le problème par une loi de Poisson.

Exercice 14

✦ Proposer une méthode pour simuler une loi de Poisson $\mathscr{P}(5)$ uniquement à partir de la commande **rd.random()**.

p. ??

4 Théorème limite central

4.1 Le théorème

THÉORÈME **limite central**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- *Les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.*
- *Les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi et admettent une espérance m et une variance $\sigma^2 \neq 0$.*
- *On note $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X_n}^* = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X_n} - m)$.*

Alors
$$\left(\overline{X_n}^*\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \quad \text{avec} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1).$$

Autrement dit, pour tous $a < b$,
$$\mathbf{P}\left(\left[a \leqslant \overline{X_n}^* \leqslant b\right]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2/2}\,dt,$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Résultat admis.

L'énoncé du théorème central limite est parfois surprenant et n'a souvent rien à voir avec celui du programme.

Rapport de Jury : Oral HEC 2021

4.2 Cas particuliers

Rappelons que si X est une variable aléatoire admettant une variance σ^2 (et donc une espérance), on définit la variable aléatoire centrée réduite associée à X, notée X^* par

$$\boxed{X^* = \frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma} \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}(X^*) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X^*) = 1.}$$

Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$ alors $X^* = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

THÉORÈME **de Moivre-Laplace**

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires suivant des lois binomiales $\mathscr{B}(n;p)$ avec $p \in]0;1[$, alors

$$X_n^* = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \quad \text{avec} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1).$$

Autrement dit, pour tous $a < b$, on a

$$\mathbf{P}\left(\left[a \leqslant X_n^* \leqslant b\right]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2/2}\,dt,$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Preuve.

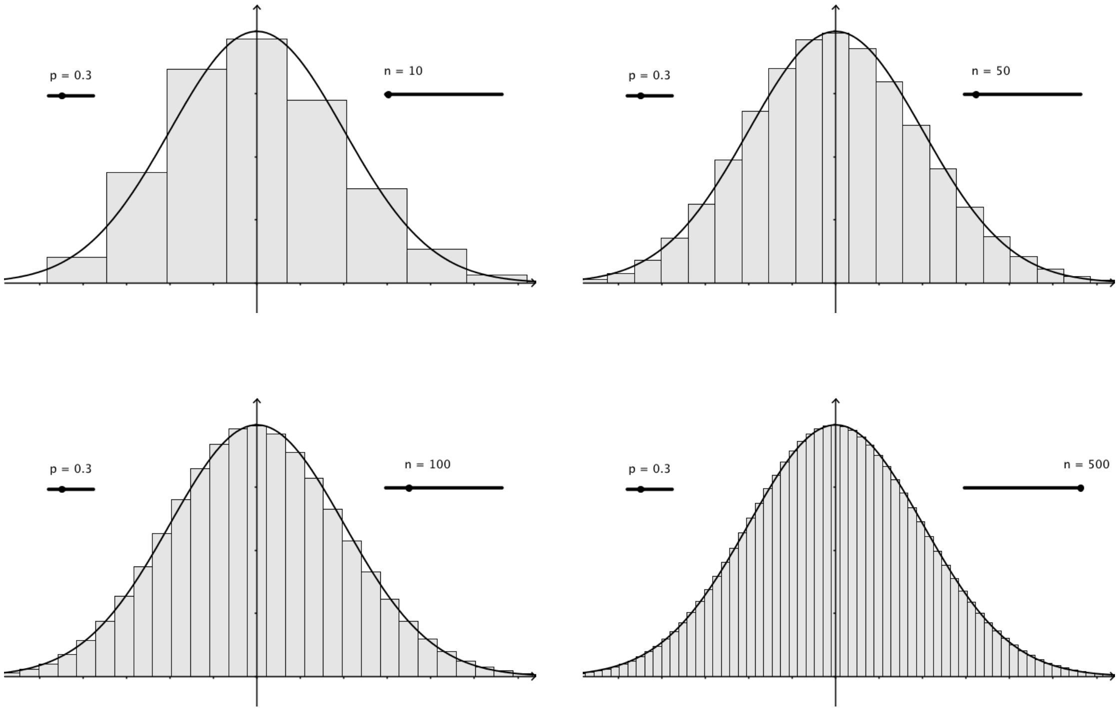
..

■

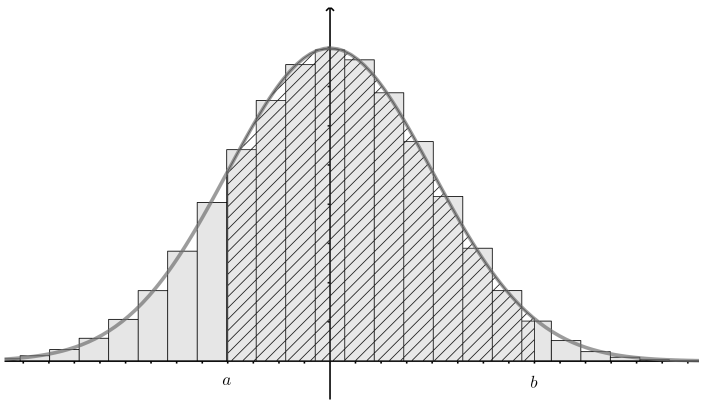
Remarque. Dans la pratique, dès que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $nq \geqslant 5$, on approche $\mathscr{B}(n,p)$ par $\mathcal{N}(np, npq)$.

Interprétation graphique

On trace les histogrammes associés aux lois de ${X_n}^*$ pour différentes valeurs de n (10, 50, 100 et 500). On superpose la courbe représentative de la densité de loi normale centrée réduite.



On constate que plus n est grand, plus les histogrammes épousent la forme de la courbe.



Interprétons.
Soit $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$. De nouveau, plaçons l'histogramme associé à la loi ${X_n}^*$. L'aire hachurée est l'aire sous la courbe représentative de la densité. Elle vaut donc

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}\big([a \leqslant Z \leqslant b]\big),$$

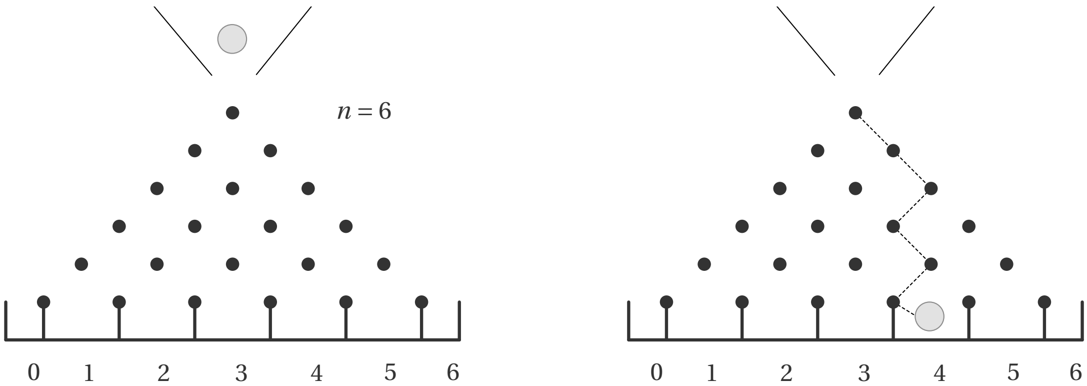
où $\quad f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-t^2) \quad$ et $\quad Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1)$.

Cette aire s'identifie approximativement à l'aire des rectangles compris entre les droites $x = a$ et $x = b$. Or, cette dernière est par construction $\mathbf{P}\big([a \leqslant {X_n}^* \leqslant b]\big)$. On en déduit l'approximation :

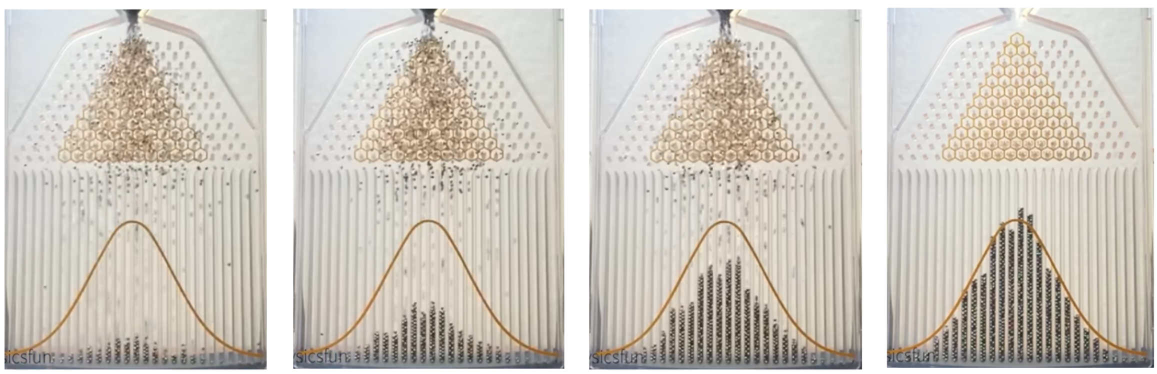
$$\mathbf{P}\Big(\big[a \leqslant X_n^* \leqslant b\big]\Big) \simeq \mathbf{P}\Big(\big[a \leqslant Z \leqslant b\big]\Big).$$

Exemple. *La planche de Galton.*
Des clous sont plantés dans une planche de manière régulière. On place la planche à la verticale de sorte qu'une bille

lachée au sommet percute les clous sous l'effet de la gravité.



On modélise la situation en supposant que lors du choc avec le clou, la bille a une probabilité de $1/2$ d'aller à gauche et une probabilité de $1/2$ d'aller à droite. On suppose que les chocs sont mutuellement indépendants. Soit n le nombre de lignes de clous. Si on numérote les cases de 0 à n, notons X la variable aléatoire, qui a une bille associe la case de chute.
Alors X compte le nombre de fois où la bille va à droite, X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n;1/2)$.
On peut illustrer physiquement la situation :



Lien vers la vidéo
Planche de Galton

Attention. Il y a deux théorèmes de convergence impliquant des lois binomiales. Précisons la différence :

- Dans le cas de convergence vers une loi de Poisson : $n \to +\infty$ mais $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda > 0$, sous-entendu, $p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Dans le cas de convergence vers une loi normale : $n \to +\infty$ mais p correspond à une probabilité fixée strictement positive.

THÉORÈME — **convergence des lois de Poisson**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que $X_n \hookrightarrow \mathscr{P}(n\lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors la suite des variables aléatoires centrées réduites $({X_n}^*)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

$$ {X_n}^* = \frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z \quad \textit{avec} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1). $$

Remarque. Dans la pratique, dès que $\lambda \geqslant 18$, on approche la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda,\lambda)$.

Le déterminisme laplacien **Le saviez-vous**

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) est un mathématicien, astronome et physicien français. Il est l'un des principaux scientifiques de la période napoléonienne ; il a apporté des contributions fondamentales dans divers domaines allant de la mécanique céleste à la théorie des probabilités (dont le théorème précédent). Philosophiquement, il fut l'un des membres les plus influents du déterminisme.

« Une intelligence qui, pour un instant donné, connaitrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre, dans la perfection qu'il a su donner à l'astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. »

C'est justement la faiblesse de l'esprit humain qui rend l'utilisation des probabilités inévitables. Si tout phénomène a une cause, on parle de hasard lorsqu'on n'est pas en mesure d'expliciter les causes et les enchaînements précisément. **Le hasard n'est alors « qu'une mesure de notre ignorance »**.

Tous les événements, ceux même qui par leur petitesse, semblent ne pas tenir aux grandes lois de la nature, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions du soleil. Dans l'ignorance des liens qui les unissent au système entier de l'univers, on les a fait dépendre des causes finales, ou du hasard, suivant qu'ils arrivaient et se succédaient avec régularité, ou sans ordre apparent ; mais ces causes imaginaires ont été successivement reculées avec les bornes de nos connaissances, et disparaissent entièrement devant la saine philosophie, qui ne voit en elles, que l'expression de l'ignorance où nous sommes de véritables causes.

Essai philosophique sur les probabilités, LAPLACE (1814).

4.3 Applications à l'approximation

Méthode

Comment approximer une probabilité à l'aide d'une loi normale ?

On lance une pièce équilibrée 10000 fois et on souhaite calculer la probabilité que le nombre de « PILE » soit compris dans l'intervalle $[4900;5100]$.
On suppose les lancers mutuellement indépendants.
Ainsi si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de « PILE », X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10000$, $p = \frac{1}{2}$. L'espérance de X est $np = 5000$, l'écart type est $\sqrt{np(1-p)} = 50$. Évaluons $\mathbf{P}\big([4900 \leqslant X \leqslant 5100]\big)$.

- La première étape consiste à renormaliser en introduisant X^* :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big([4900 \leqslant X \leqslant 5100]\big) &= \mathbf{P}\big([np-100 \leqslant X \leqslant np+100]\big) = \mathbf{P}\big([-100 \leqslant X-np \leqslant 100]\big)\\ &= \mathbf{P}\left(\left[-2 \leqslant \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant 2\right]\right) = \mathbf{P}\big([-2 \leqslant X^* \leqslant 2]\big).\end{aligned}$$

- Puis, on applique le théorème précédent.

$$\mathbf{P}\Big(\Big[-2 \leqslant X^* \leqslant 2\Big]\Big) \simeq \mathbf{P}\big([-2 \leqslant Z \leqslant 2]\big) \quad \text{avec} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1).$$

Notons Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$\mathbf{P}\big([4900 \leqslant X \leqslant 5000]\big) \simeq \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1.$$

À l'aide de Python ou de table de la loi normale, on sait que $\Phi(2) \simeq 0,9772$.

Conclusion : la probabilité recherchée vaut environ $0,9544$.

Exemple. Surbooking.
Afin d'augmenter le nombre de personnes transportées, une compagnie aérienne vend plus de billets qu'elle n'a de places en pariant sur les absences de certains de ses passagers.
Considérons un vol d'un appareil contenant $\ell = 400$ places. On suppose que $q = 8\%$ des passagers ne pourront être à l'heure pour l'embarquement. La compagnie vend $n = 420$ billets. On cherche à calculer le risque de surbooking, c'est-à-dire la probabilité qu'il y ait strictement plus de passagers présents à l'embarquement que de places disponibles.

On pose X le nombre de personnes présentes à l'embarquement. Si on suppose la présence des passagers indépendante les unes des autres (c'est une hypothèse forte, il peut avoir des familles, un problème d'accès à l'aéroport), alors X suit une loi binomiale de paramètres n, q avec $p = 1 - q = 92\%$. Précisons que $\mathbf{E}(X) = nq = 386.4$ et l'écart-type est $\sigma_X = \sqrt{npq} \simeq 5.56$.
Il y a surbooking si l'événement $[X > \ell]$ est réalisé.

Étape I. On introduit la variable X^* :

$$\mathbf{P}\big([X > \ell]\big) = \mathbf{P}\big([X - \mathbf{E}(X) > \ell - np]\big) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{X-\mathbf{E}(X)}{\sigma_X} > \frac{\ell-np}{\sqrt{npq}}\right]\right) \quad \text{avec} \quad \frac{\ell-np}{\sqrt{npq}} \simeq 2,45.$$

Étape II. On applique le théorème limite central ($n >> 1$). Si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$, on a

$$\mathbf{P}\big([X > \ell]\big) = \mathbf{P}\left(\left[X^* > \frac{\ell-np}{\sqrt{npq}}\right]\right) \simeq \mathbf{P}\big([Z > 2,45]\big) = 1 - \mathbf{P}\big([Z \leqslant 2,45]\big) = 1 - \Phi(2,45).$$

En utilisant les tables ou sa calculatrice, il vient $\mathbf{P}\big([X > \ell]\big) \simeq 0.007$. Il y a moins de 1% de chance de rencontrer du surbooking sur ce vol.

5 Applications avec Python

5.1 Simulation d'une loi normale par la méthode des 12 uniformes

D'après le théorème limite central, si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0;1]$, la variable aléatoire $\overline{X_n}^*$ centrée réduite associée à la moyenne arithmétique des variables $X_1, \ldots, X_n$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 15

✦✦

1. En se limitant à douze variables $X_1, \ldots, X_{12}$ suivant des lois uniformes, écrire une fonction Python qui renvoie une simulation de la loi normale centrée réduite.

2. En déduire une seconde fonction qui prend en arguments μ, σ, m et renvoient m simulations d'une loi $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. p. 33

3. Tester votre programme en superposant sur une même figure l'histogramme de 2000 simulations de loi $\mathcal{N}(1,4)$ et la densité de cette loi.

5.2 La méthode de Monte-Carlo pour l'approximation d'intégrales

- **Principe**

  Considérons :

— $g : [0,1] \to [a;b]$ une fonction continue dont on souhaite calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

— $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

— Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $g(U_i)$. D'après les lemme de l'égalité en loi et le lemme des coalitions, les variables sont indépendantes et de même loi.

Par le théorème de transfert, les variables $X_i = f(U_i)$ admettent toutes une même espérance donnée par

$$\mathbf{E}(X_i) = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

De même, ces variables admettent une variance et la loi faible des grands nombres donne

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} \mathbf{E}(X_1) = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dès lors, pour calculer une valeur approchée de l'intégrale, on peut simuler un grand nombre de fois les variables U_i, calculer les images $f(U_i)$ et en faire leur moyenne arithmétique.

Exercice 16

✦ **La théorie : estimation de la probabilité de l'erreur**

Soit X, une variable aléatoire à valeurs dans $[a;b]$.

1. Pour quelle valeur de m, $\mathbf{E}\left((X-m)^2\right)$ atteint son minimum? Avec $m = \frac{a+b}{2}$, déduire :

$$\mathbf{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}.$$

p. 33

2. En reprenant les notations du début, justifier que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \mathbf{P}\left(\left|\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(U_k)\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4n\varepsilon^2} \qquad (\bullet)$$

✦ **La pratique**

Exercice 17

On pose
$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{4}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Donner la valeur explicite de I. En déduire, une fonction Python qui prend en argument n qui permet d'approcher I. p. 34
2. Déterminer n afin d'obtenir une valeur à 10^{-3} près de I avec une probabilité d'au moins 95%. Commenter.

Exercices - TD

Révisions

Exercice 18. ✦ Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Montrer que $x\mathbf{P}(X > x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

≫ Solution p. ??

Exercice 19. ✦ **Estimation**
Une urne contient une proportion p de boules blanches. On souhaite obtenir expérimentalement une approximation de p. Pour cela, on effectue $n \in \mathbb{N}^*$ tirages avec remise et on note X_n le nombres de boules blanches obtenues au cours de ces n tirages. On suppose les tirages mutuellement indépendants.

1. Donner la loi de X_n. Préciser l'espérance et la variance.
2. Justifier que pour tout réel $\varepsilon > 0$, $\quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. Combien de tirages faut-il effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque inférieur à 5%, que la fréquence d'obtention de boules blanches au cours des n tirages diffère de p d'au plus 1% ?

≫ Solution p. 34

Exercice 20. ✦✦ **Les souris mutantes**
Un laboratoire élève des souris dont 1/4 sont mutantes. La durée de vie d'une souris mutante est une variable aléatoire dont la moyenne est de 3 ans avec un écart-type de 9 mois, mais elle ne vit jamais plus de 4 ans. La durée de vie d'une souris normale a une moyenne d'un an, avec un écart-type de 6 mois. On ne prend en compte que les souris dont la durée de vie est strictement positive.

Une souris est vivante au bout de deux ans. On note α la probabilité qu'elle soit mutante.

On considère l'événement M : « La souris est une souris mutante »et on note X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la souris.

1. Exprimer $\dfrac{\mathbf{P}(M \cap [X \geqslant 2])}{\mathbf{P}(\overline{M} \cap [X \geqslant 2])}$ en fonction de α.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de α.

≫ Solution p. 34

Exercice 21. ✦✦ **Inégalité de Chernov**

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire discrète telle que e^{tX} admette une espérance. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Markov, que pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)}{e^{ta}}.$$
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
   a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, e^{tX} admet une espérance et que :
   $$\mathbf{E}\left(e^{t\mathbf{X}}\right) = \left(1 - p + pe^t\right)^n.$$
   b) Étudier les variations de la fonction $f : t \mapsto (1-p)e^{-\frac{t}{2}} + pe^{\frac{t}{2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$, égal à $2\sqrt{p(1-p)}$.
   c) À l'aide de la question 1, montrer que $\mathbf{P}\left(X \geqslant \frac{n}{2}\right) \leqslant 2^n\left(p(1-p)\right)^{\frac{n}{2}}$.

≫ Solution p. 35

Exercice 22. ✦✦ **Comparaison entre la médiane et l'espérance**
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X admet une variance.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que $\quad \mathbf{P}\left([X \geqslant \mathbf{E}(X) + \alpha]\right) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}\left(\left(X - \mathbf{E}(X) + \beta\right)^2\right)}{(\alpha+\beta)^2}$.
2. Avec $\beta = \mathbf{V}(X)/\alpha$, en déduire que $\quad \mathbf{P}\left([X \geqslant \mathbf{E}(X) + \alpha]\right) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \alpha^2}$.

3. On suppose dans cette question que X est une variable aléatoire à densité.
   a) Justifier qu'il existe un réel m tel que
$$\mathbf{P}\big([X \leqslant m]\big) = \frac{1}{2}.$$
   Un tel réel est une médiane de X.
   b) À l'aide de la question 1, justifier que : $\quad \big|m - \mathbf{E}(X)\big| \leqslant \sigma(X).$

≫ Solution p. 35

Convergences en probabilité et en loi

Exercice 23. ✦✦ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$Y_n = X_n + X_{n+1} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

1. Calculer l'espérance et la variance de T_n.
2. Peut-on appliquer la loi des grands nombres pour étudier la convergence en probabilité de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
3. Justifier que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire presque sûrement constante.

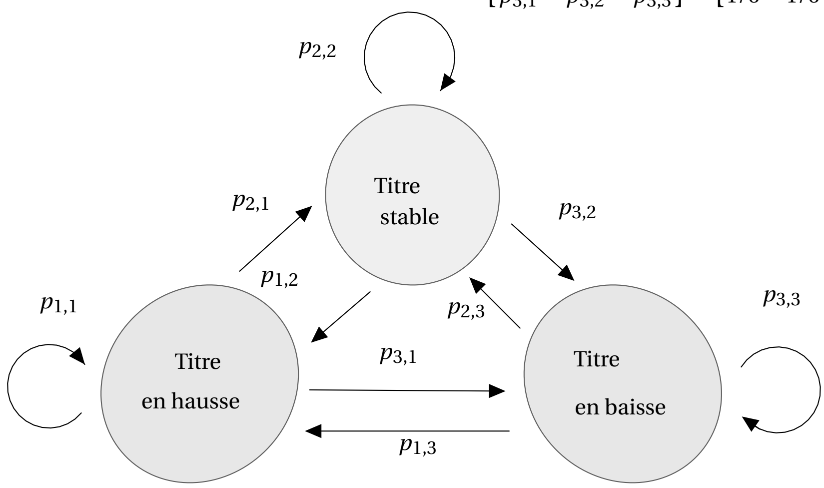
≫ Solution p. 36

Exercice 24. ✦ **Chaîne de markov : évolution d'un titre boursier**
Dans une bourse de valeurs, un titre peut monter, descendre ou rester stable. On modélise l'évolution du titre.

- Si un jour n, le titre monte, le jour suivant, il montera avec la probabilité $2/3$, restera stable avec la probabilité $1/6$, et baissera avec la probabilité $1/6$.
- Si un jour n, le titre est stable, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $1/6$, restera stable avec la probabilité $2/3$, et baissera avec la probabilité $1/6$.
- Si un jour n, le titre baisse, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $1/6$, restera stable la probabilité $1/6$, et baissera avec la probabilité $2/3$.

Le premier jour, le titre est stable.

Les probabilités sont spécifiées par une matrice dite de transition : $M = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}.$



On souhaite connaître l'évolution de ce titre. Pour cela, on introduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire aléatoire X_n définie par
$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si le titre donné monte le jour } n \\ 0 & \text{si le titre est stable le jour } n \\ -1 & \text{si le titre donné baisse le jour } n. \end{cases} \quad \text{et} \quad U_n = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = -1) \end{bmatrix}.$$

1. a) Vérifier que $\quad U_{n+1} = MU_n$.
   b) En déduire U_n en fonction de M et U_1.
2. Donner la loi de X_n.

3. Justifier que $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire X.

4. Comparer MU et U où $U = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(X=1) \\ \mathbf{P}(X=0) \\ \mathbf{P}(X=-1) \end{bmatrix}$. Commenter.

≫ Solution p. 37

Exercice 25. ✧ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable X_n dont la loi est donnée par :

$$X_n(\Omega) = \{0, n\}, \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}.$$

Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la convergence de la suite numérique $\left(\mathbf{E}(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Commenter.

≫ Solution p. 37

Exercice 26. ✦ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(1; 1/n)$.

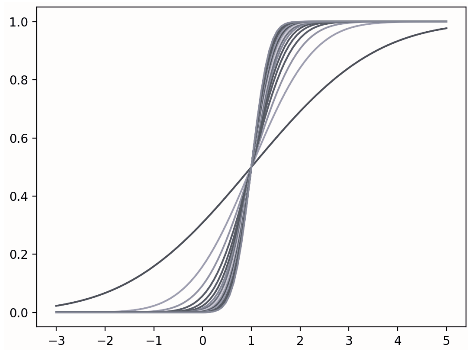
1. Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Expliquer et commenter le programme Python suivant.
   La commande **sp.ndtr(x)** *renvoie* $\Phi(x)$ *où* Φ *est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.*

≫ Solution p. 38

Editeur

```
import scipy.special as sp
import numpy as np

def Fnormal(x,k):
    return sp.ndtr(k**(1/2)*(x-1)/2)
x=np.linspace(-3,5,100)
for k in range(1,50,3) :
    y=Fnormal(x, k)
    plt.plot(x, y)
plt.show()
```



Exercice 27. ✦✦ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère X_n une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, {\sigma_n}^2)$ et X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec σ_n, σ strictement positifs. On suppose de plus que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes. Montrer l'équivalence entre :

- *i)* La suite de variable aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
- *ii)* La suite de réels $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers σ.

≫ Solution p. ??

Exercice 28. ✦ Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On pose $Z_n = \min(U_1, \ldots, U_n)$.

1. Montrer que la suite (nZ_n) converge en loi vers Y.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Déterminer la loi de $Z = e^{-X}$.
3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoire indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   Déterminer la limite en loi de la suite (nT_n) où $T_n = \min\left(e^{-\lambda X_1}, \ldots, e^{-\lambda X_n}\right)$.

≫ Solution p. ??

Exercice 29. ✦✦ **Convergence en loi avec des lois de Cauchy**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \frac{n}{\pi\left(1 + n^2 t^2\right)}.$$

1. Justifier que f_n est une densité de probabilité. Soit X_n une variable aléatoire dont f_n est une densité.
2. Peut-on appliquer l'inégalité de Markov à X_n ?
3. Donner la fonction de répartition de X_n. En déduire la convergence en loi de la suite de variable aléatoire $(X_n)_n$.

≫ Solution p. 38

Exercice 30. ✦✦ **Variante de la loi faible des grands nombres**
Soit $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels appartenant à $[0,1]$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $k\in\mathbb{N}^*, X_k$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p_k. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad m_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k.$$

1. a) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $\mathbf{V}\left(X_k\right)\leqslant\frac{1}{4}$. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, une majoration de $\mathbf{V}(Y_n)$. On admet que la variance d'une somme de variables de Bernoulli indépendantes est la somme des variances.
   b) En déduire, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que, pour tout $\varepsilon>0$,

$$\mathbf{P}\left(|Y_n-m_n|<\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1.$$

2. On suppose que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers m.
   a) Soit $\varepsilon>0$. On suppose $|m_n-m|<\frac{\varepsilon}{2}$. Comparer les événements $\left[|Y_n-m_n|<\frac{\varepsilon}{2}\right]$ et $[|Y_n-m|<\varepsilon]$. En déduire que

$$\mathbf{P}\left(|Y_n-m_n|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\leqslant\mathbf{P}\left(|Y_n-m|<\varepsilon\right).$$

   b) En déduire la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

≫ Solution p. 38

Exercice 31. ✦ **Convergence de loi discrète vers une loi à densité**
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire discrète $X_n\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1;n]\!])$. On pose $Y_n=X_n/n$.
Justifier que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.
Indication. On pourra utiliser l'expression de la fonction de répartition de X_n,

$$\forall x\in[0;n],\qquad F_n(x)=\frac{\lfloor x\rfloor}{n}.$$

≫ Solution p. 39

Exercice 32. ✦ Soit $\lambda\in\mathbb{N}^*$. Pour tout entier $n>\lambda$, on considère une variable aléatoire X_n suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. Étudier la convergence en loi de la suite (Y_n) définie par

$$Y_n=\frac{X_n}{n}.$$

≫ Solution p. ??

Exercice 33. ✦✦ **Un classique** *D'après EMLyon 2017*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ \frac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{si } t\geqslant 0\end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.
   a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance? une variance?
3. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à densité, à valeurs strictement positives, mutuellement indépendantes, dont chacune a pour densité f.
   On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $M_n=\max(X_1,\ldots,X_n)$ et $Z_n=\frac{n}{M_n}$.
   a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.
   b) Justifier :

$$\forall u\in\,]0;+\infty[,\quad \operatorname{Arctan}(u)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{\pi}{2}\quad\text{et}\quad \operatorname{Arctan}(u)\underset{u\to 0}{\sim}u.$$

   c) Montrer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\forall x\in\,]0;+\infty[,\quad \mathbf{P}(Z_n\leqslant x)=1-\left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n.$$

d) En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on reconnaîtra la loi.

⋙ *Pour une version similaire, voir EDHEC 2019 Exercice 2.*

≫ Solution p. 39

Exercice 34. ✦✦ **Convergence en loi et fonctions génératrices**

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X, définies sur le même espace probabilisé, à valeurs dans $[\![x_0, x_m]\!]$. Les fonctions génératrices sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$G_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{P}\left(X_n = x_k\right) \cdot t^k \quad \text{et} \quad G_X(x) = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{P}(X = x_k) \cdot t^k.$$

1. Vérifier que, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G_X(x) \qquad (\bullet)$$

2. L'objectif de la suite, est d'établir la réciproque. On suppose donc que la propriété $(\bullet)$ est vérifiée. On pose de plus

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \dots & {x_0}^m \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \dots & {x_1}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & {x_m}^2 & \dots & {x_m}^m \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{m+1}(\mathbb{R})$$

a) Notons $C_0, C_1, \dots, C_m$, les $m+1$ colonnes de A. Justifier que les colonnes de A forment une famille libre, en déduire l'inversibilité de A.

b) Soit $k \in [\![0; m]\!]$. En déduire que la suite $(\mathbf{P}(X_n = k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ_k, la limite.

c) Montrer que les réels $\left(\ell_k\right)_{0\leqslant k\leqslant m}$ sont les coefficients d'une loi de probabilité, et en déduire que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi.

3. • **Application.**
On dispose d'une infinité de boites $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$
Dans B_n, il y a des boules blanches en proportion p_n et des boules noires en proportion $q_n = 1 - p_n$. On effectue successivement dans chacune de ces boites m tirages avec remise, $m \in \mathbb{N}^*$.
Soit X_n, le nombre de boules blanches tirées dans la boite B_n.
Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et reconnaitre la loi limite, lorsque cette condition est remplie.

≫ Solution p. **??**

Approximations

Exercice 35. ✦✦ **Aiguilles de Buffon**

On dispose d'un sol recouvert de parquet, dont les lattes ont une largeur de 20 cm. On dispose aussi de grandes aiguilles, dont la longueur est égale à 20 cm. On admet que si on laisse tomber une aiguille par terre, la probabilité que l'aiguille soit à cheval sur deux lattes est égale à $\frac{2}{\pi}$.

1. Proposer une expérience, à base de lancers d'aiguille, permettant de donner une approximation de $\frac{2}{\pi}$ (dont on déduira une approximation de π).

2. De façon théorique, et en utilisant la valeur de π, combien de lancers faudrait-il réaliser, approximativement, pour obtenir une approximation de $\frac{2}{\pi}$ à moins de 0,01 valable avec une probabilité de 95% ?
Données : $\Phi(1,645) \simeq 0,95$, $\Phi(1,960) \simeq 0,975$.

≫ Solution p. 39

Exercice 36. ✦✦✦ **Approximation de π via la méthode de Monte Carlo** *d'après oraux ESCP 2014*

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et toutes de même loi uniforme sur $[0,1]$. On suppose que toutes les variables U_n et V_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) sont indépendantes.

1. Pour tout réel $x \in]0,1]$, calculer l'intégrale :

$$J(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,\mathrm{d}t.$$

On pourra justifier et utiliser le changement de variable (à x fixé) :

$$\varphi :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}, \qquad \theta \mapsto t = \frac{x}{2}\sin\theta + \frac{x}{2}.$$

2. **a)** Déterminer la loi de U_n^2.

b) Justifier que la variable $U_n^2+V_n^2$ possède une densité h, que l'on exprimera sous forme d'une intégrale.

c) Déterminer $h(x)$ pour $x \in [0,1]$.

3. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } {U_n}^2+{V_n}^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la loi de X_n.

4. **a)** Prouver que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n = \frac{4}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, converge en probabilité vers la constante π. C'est-à-dire, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\mathbf{P}\left(|Z_n-\pi| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) Soit $\alpha \in]0,1[$ et $\delta > 0$.
Montrer qu'il existe un entier n_0, qu'on exprimera en fonction de α et δ, tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \mathbf{P}\left(|Z_n-\pi| > \delta\right) \leqslant \alpha$$

c) En déduire un programme Python qui donne une approximation de π.

≫ Solution p. ??

Les inclassables

Exercice 37. ✦✦ **Application de la formule de Stirling** *D'après EDHEC 2007*

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. Rappeler quelle est la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.

2. À l'aide du théorème central limite, établir que $\mathbf{P}(S_n \leqslant n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

3. En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}\, dt.$$

4. **a)** Utiliser le résultat précédent pour montrer que $\displaystyle\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz}\, dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2n^{n+1}}$.

b) On admet que $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$. En déduire un nouvel équivalent de $\displaystyle\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz}\, dz$.

≫ Solution p. 40

Exercice 38. ✦✦

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que : $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$.

1. Calculer $\mathbf{P}\left(X_n \leqslant \frac{n}{4}\right)$.

2. En utilisant le théorème de la limite centrée déterminer un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{k} 3^{n-k}$.

≫ Solution p. 40

Exercice 39. ✦✦✦

1. En appliquant le théorème limite central à une suite de variables aléatoires indépendantes (X_n) suivant toutes une loi de Poisson $\mathscr{P}(1)$, démontrer que

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

2. Écrire la formule de Taylor à la fonction exponentielle entre 0 et n, en déduire

$$\int_0^n e^{-t} t^n\, dt \underset{n+\infty}{\sim} \frac{n!}{2}.$$

≫ Solution p. ??

Exercice 40. **Amélioration de la méthode de Monte-Carlo, Réduction de la variance par méthode des variables antithétiques.**

Soit f, une fonction continue dont on souhaite approcher

$$I = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

La méthode de Monte-Carlo part de l'égalité $I = \mathbf{E}\big(f(U)\big)$ où $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])$.
Dans la suite, on pose g définie sur $[0;1]$ par $g(t) = (f(t) + f(1-t))/2$.

1. Vérifier que $I = \mathbf{E}\big(g(U)\big)$.
2. Comparer les variances de $f(U)$ et $g(U)$.
3. Reprendre l'exemple précédent avec g. Comparer les deux méthodes.

Compléments théoriques sur les différentes convergences

Exercice 41. ✦✦✦ **Convergence presque sûr**
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. Toutes les variables sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On dit que la suite (X_n) converge presque sûrement vers X si :

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Justifier que si la suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X, alors elle converge aussi en probabilité vers X.

Exercice 42. ✦✦✦ **La convergence en probabilité implique la convergence en loi** *d'après oraux HEC*
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et X des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telles que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X. On note F_n la fonction de répartition de X_n et F la fonction de répartition de X.
Soit x un point de continuité de F, et soit $\delta > 0$ fixé.

1. Montrer qu'on peut choisir ε tel que $F(x-\varepsilon) > F(x) - \delta$ et $F(x+\varepsilon) < F(x) + \delta$.
2. Montrer que
$$[X_n \leqslant x] \subset [X \leqslant x+\varepsilon] \cup [|X_n - X| > \varepsilon].$$
Montrer de même que
$$[X \leqslant x-\varepsilon] \subset [X_n \leqslant x] \cup [|X_n - X| > \varepsilon].$$
3. En déduire que
$$F_n(x) \leqslant F(x) + \delta + P(|X_n - X| > \varepsilon) \text{ et } F(x) - \delta \leqslant F_n(x) + \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon).$$
4. Conclure en prouvant que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

Exercice 43. **Preuve du théorème de Slutsky**

$$afaire$$

Exercice 44. Problème IV - Inégalités de Markov et de Cantelli Dans ce problème, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et on note $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = m \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sigma^2 + m^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on introduit la variable aléatoire $Y_\varepsilon : \Omega \to \{0,1\}$ définie pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$Y_\varepsilon(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |X(\omega)| > \varepsilon \\ 0 & \text{si } |X(\omega)| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

IV.1) En posant $p_\varepsilon := \mathbb{P}([|X| > \varepsilon])$, donner l'expression de $\mathbb{E}(Y_\varepsilon)$.
IV.2) Montrer que pour tout $a \in [0,2], \mathbb{E}\left(|X|^a\right) \geqslant \mathbb{E}\left(|X|^a Y_\varepsilon\right)$.
IV.3) En déduire l'inégalité de Markov : pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $a \in [0,2]$,

$$\mathbb{P}([|X| > \varepsilon]) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(|X|^a\right)}{\varepsilon^a}.$$

IV.4) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0, \mathbb{P}([X - \alpha > \varepsilon]) \leqslant \mathbb{P}([|X - \alpha| > \varepsilon])$.
IV.5) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}([X - m + \lambda > \varepsilon + \lambda]) \leqslant \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\varepsilon + \lambda)^2}.$$

IV.6) Après avoir fait l'étude de la fonction $\lambda \in [0, \infty[\mapsto \left(\sigma^2 + \lambda^2\right)/(\varepsilon + \lambda)^2$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la meilleure majoration est donnée par

$$\mathbb{P}([X - m > \varepsilon]) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 + \sigma^2}.$$

IV.7) En vous inspirant des questions précédentes, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}([X - m < -\varepsilon]) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 + \sigma^2}.$$

IV.8) En déduire l'inégalité de Cantelli : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}([|X - m| > \varepsilon]) \leqslant \frac{2\sigma^2}{\varepsilon^2 + \sigma^2}.$$

IV.9) Pour quelles valeurs de $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Cantelli est-elle préférable à celle de Bienaymé-Tchebychev?

Exercice 45. Soit $\lambda > 0$. Si X_n est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre λ/n, alors X_n converge en loi vers une variable exponentielle de paramètre λ lorsque $n \to \infty$ (c'est-à-dire que pour tout $x \geqslant 0$ on a $\mathbb{P}(X_n \leqslant x) \to \mathbb{P}(Z \leqslant x)$ où Z est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ).

Exercice 46. Oruax HEC BL 2021

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On dit que la fonction f vérifie la propriété $\mathscr{L}_k$ sur I s'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^{+^*}$ tel que

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

1. Question de cours. Rappeler l'égalité et l'inégalité des accroissements finis.

2. (a) Montrer que les fonctions sinus et valeur absolue vérifient la propriété $\mathscr{L}_1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que l'on ne peut pas trouver de réel $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que la fonction racine carrée vérifie la propriété $\mathscr{L}_k$ sur $[0, 1]$.

(c) Montrer que s'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que f vérifie la propriété $\mathscr{L}_k$ sur I, alors f est continue sur I.

3. Soient un réel $k \in]0, 1[$, f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété $\mathscr{L}_k$ sur $\mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|.$$

(b) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite notée ℓ et vérifiant $f(\ell) = \ell$.

4. Soient un réel $k \in]0, 1[$, f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété $\mathscr{L}_k$ sur $\mathbb{R}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à densité définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+1} = f(T_n).$$

Soit ℓ la limite trouvée à la question 3 .

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = [k^n |T_0 - \ell| \geqslant \varepsilon]$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$$

(b) Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|T_n - \ell| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_{T_n} la fonction de répartition de la variable T_n. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{\ell\}, \quad \lim_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = F(x)$$

où F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont on reconnaitra la loi.

Indications et solutions

Exercice 1 p. 2

1.(a) Raisonnons dans un premier temps sur les événements. $\big([Z=z_i]\big)_{i\in I}$ est un système complet d'événements. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl}
[Z\geqslant\lambda] & = & \Omega\cap[Z\geqslant\lambda]\\
 & = & \Big(\bigsqcup_{i\in I}[Z=z_i]\Big)\cap[Z\geqslant\lambda]\\
[Z\geqslant\lambda] & = & \bigsqcup_{i\in I}\big([Z=z_i]\cap[Z\geqslant\lambda]\big).
\end{array}$$

Rappelons que J est l'ensemble des indices i pour lesquels $z_i\geqslant\lambda$.
Soit $i\in I$.

- Si $i\in J$, alors, $\qquad [Z=z_i]\cap[Z\geqslant\lambda]=[Z=z_i].$
- Sinon, $i\notin J$, et $\qquad [Z=z_i]\cap[Z\geqslant\lambda]=\varnothing.$

On obtient : $\qquad [Z\geqslant\lambda]=\bigsqcup_{i\in J}[Z=z_i].$

Les événements sont deux à deux disjoints, par *la propriété d'additivité d'une probabilité*, on a la convergence et l'égalité :

$$\boxed{\mathbf{P}\big([Z\geqslant\lambda]\big)=\sum_{i\in J}\mathbf{P}\big([Z=z_i]\big).}$$

1.(b) Par définition de l'espérance :

$$\mathbf{E}(Z)=\sum_{i\in I}z_i\mathbf{P}\big([Z=z_i]\big).$$

Puis,

$$\begin{array}{rcll}
\lambda\mathbf{P}\big([Z\geqslant\lambda]\big) & = & \lambda\sum_{i\in J}\mathbf{P}\big([Z=z_i]\big) & \\
 & = & \sum_{i\in J}\lambda\mathbf{P}\big([Z=z_i]\big) & \\
 & \leqslant & \sum_{i\in J}z_i\mathbf{P}\big([Z=z_i]\big) & \left(\begin{array}{c}\text{par}\\\text{définition}\\\text{de J}\end{array}\right)\\
\lambda\mathbf{P}\big([Z\geqslant\lambda]\big) & \leqslant & \sum_{i\in I}z_i\mathbf{P}\big([Z=z_i]\big)\ =\ \mathbf{E}(Z). &
\end{array}$$

Précisons que la dernière majoration est vraie puisque toute probabilité est positive et pour tout indice i, $z_i\geqslant 0$. Z est une variable aléatoire positive.

Finalement, $\qquad \boxed{\mathbf{P}\big([Z\geqslant\lambda]\big)\leqslant\dfrac{\mathbf{E}(Z)}{\lambda}.}$

2.

Exercice 2 p. 2

1. Si on suppose que les personnes sont choisies de manière mutuellement indépendantes, alors nY_n compte le nombre de personnes connaissant le bon ordre. On sait que :

$$\boxed{nY_n\hookrightarrow\mathscr{B}(n;1/100).}$$

On a d'après le cours :

$$\mathbf{E}(nY_n)=\frac{n}{100},\quad\text{puis,}\quad\mathbf{E}(Y_n)=\frac{1}{100}.$$

$$\mathbf{V}(nY_n)=n\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{99}{100},$$

D'où, $\qquad \mathbf{V}(Y_n)=\dfrac{\mathbf{V}(nY_n)}{n^2}=\dfrac{99}{10^4n}.$

2. On cherche n tel que

$$\mathbf{P}\big([0,009<Y_n<0,011]\big)\geqslant 0,9.$$

De plus,

$$\begin{array}{rl}
 & [0,009<Y_n<0,011]\\
= & \big[-0,001<Y_n-0,01<0,001\big]\\
= & \big[-10^{-3}<Y_n-\mathbf{E}(Y_n)<10^{-3}\big]\\
= & \big[|Y_n-\mathbf{E}(Y_n)|<10^{-3}\big].
\end{array}$$

L'événement complémentaire est :

$$\Big[\big|Y_n-\mathbf{E}(Y_n)\big|\geqslant 10^{-3}\Big],$$

On cherche donc n tel que

$$\mathbf{P}\Big(\big[|Y_n-\mathbf{E}(Y_n)|\geqslant 10^{-3}\big]\Big)\leqslant 1-0,9\quad(\bullet).$$

D'après *l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev*, on sait que

$$\mathbf{P}\Big(\big[|Y_n-\mathbf{E}(Y_n)|\geqslant 10^{-3}\big]\Big)\leqslant\frac{\mathbf{V}(Y_n)}{(10^{-3})^2},$$

Il suffit de trouver n tel que

$$\frac{\mathbf{V}(Y_n)}{(10^{-3})^2}\leqslant 0,1.$$

On effectue l'application numérique à l'aide des calculs de la question 1, on trouve

$$\boxed{n\geqslant 99\,000.}$$

Exercice 3 p. 2

Remarque. Rappelons que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'utilise :
→ soit pour majorer la probabilité d'un événement de la forme $[|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon]$, ou inclus dans un tel événement;
→ soit pour minorer la probabilité d'un événement de la forme $[|X - \mathbf{E}(X)| < \varepsilon]$, ou contenant un tel événement.

1. $[2 \leqslant X \leqslant 10] = [|X-6| \leqslant 4] = [|X - \mathbf{E}(X)| \leqslant 4] \supset [|X - \mathbf{E}(X)| < 4]$. Donc

$$\mathbf{P}(2 \leqslant X \leqslant 10) \geqslant \mathbf{P}\big(|X-\mathbf{E}(X)| < 4\big) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{V}(X)}{4^2}.$$

Ce qui donne $$\boxed{\mathbf{P}(2 \leqslant X \leqslant 10) \geqslant \frac{7}{8}.}$$

2. $[5 < X < 7] = [|X-6| < 1] = [|X - \mathbf{E}(X)| < 1]$. Donc

$$\mathbf{P}(5 < X < 7) = \mathbf{P}\big(|X-\mathbf{E}(X)| < 1\big) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{V}(X)}{1^2}.$$

Ce qui donne $$\boxed{\mathbf{P}(5 < X < 7) \geqslant -1.}$$

Cette minoration n'apporte rien.

3. $[X \leqslant 7]$. Cet événement n'est inclus dans aucun événement de la forme $[|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon]$, et ne contient pas d'événement de la forme $[|X-\mathbf{E}(X)| < \varepsilon]$. On ne peut pas appliquer *l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*

4. $[|X-6| \geqslant 1] = [|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant 1]$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$\mathbf{P}\big(|X-\mathbf{E}(X)| \geqslant 1\big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{1^2}.$$

D'où
$$\boxed{\mathbf{P}\big(|X-6| \geqslant 1\big) \leqslant 2.}$$

Cette majoration n'apporte rien.

5. $[X \geqslant 11] \subset [X \leqslant 1] \cup [X \geqslant 11] = [|X-\mathbf{E}(X)| \geqslant 5]$. D'où

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geqslant 11) \leqslant \mathbf{P}(|X-\mathbf{E}(X)| \geqslant 5) \leqslant \frac{4}{25}.}$$

6. $[X \geqslant 4]$. Cet événement n'est inclus dans aucun événement de la forme $[|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon]$, et ne contient pas d'événement de la forme $[|X-\mathbf{E}(X)| < \varepsilon]$. On ne peut pas appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 4 p. 3

Justifions que $(Z_n)_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire presque surement constante à 0. On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$1 - F_{Z_n}(x) = (1-F(x))^n.$$

Ainsi pour tout $\varepsilon \in]0;1[$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|Z_n| \geqslant \varepsilon) &= \mathbf{P}(Z_n > \varepsilon) \quad (Z_n \text{ est à densité})\\ &= 1 - F_{Z_n}(\varepsilon)\\ &= \big(1-F(\varepsilon)\big)^n\\ &= (1-\varepsilon)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ car } 1-\varepsilon \in]0;1[.\end{aligned}$$

Ce qui conclut.

Exercice 5 p. 4

- Si $\lambda = 0$, le résultat est clair. On suppose donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$, on a

$$\mathbf{P}(|\lambda X_n - \lambda X| \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}\left(|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car} \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} X.$$

- Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par inégalité triangulaire

$$|X_n + Y_n - (X+Y)| \leqslant |X_n - X| + |Y_n - Y|.$$

on en déduit que

$$\left[|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \cap \left[|Y_n - Y| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset \Big[|X_n + Y_n - (X+Y)| < \varepsilon\Big].$$

Par passage au complémentaire

$$[|X_n + Y_n - (X+Y)| \geqslant \varepsilon] \subset \left[|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \left[|Y_n - Y| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Puis par croissance de la probabilité

$$0 \leqslant \mathbf{P}(|X_n + Y_n - (X+Y)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}\left(|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbf{P}\left(|Y_n - Y| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Noter l'utilisation de l'inégalité

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Or on a les convergences en probabilité

$$\mathbf{P}\left(|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\left(|Y_n - Y| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Concluons par le théorème d'encadrement :

$$\mathbf{P}(|X_n + Y_n - (X+Y)| \geqslant \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 6 p. 4

1. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur f,

$$\big|f(X_n) - f(X)\big| \leqslant \alpha |X_n - X|.$$

D'où
$$\left[|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{\alpha}\right] \subset \Big[\big|f(X_n) - f(X)\big| < \varepsilon\Big]$$

puis par passage au complémentaire

$$\left[|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{\alpha}\right] \supset \Big[\big|f(X_n) - f(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big],$$

et par croissance de la probabilité

$$\mathbf{P}\left(|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \geqslant \mathbf{P}\Big(\big|f(X_n) - f(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \geqslant 0.$$

Or (X_n) converge en probabilité vers X, donc

$$\mathbf{P}\left(|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et par encadrement

$$\mathbf{P}\Big(\big|f(X_n) - f(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ce qui conclut.

Remarque. Justifions que f est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\alpha|x-a| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0,$$

par encadrement

$$|f(x)-f(a)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

Puis $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$. La fonction est donc continue en a. Ce calcul étant valable pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a;b]$, donc le maximum de $|f'|$ sur $[a;b]$ existe. Posons

$$\alpha = \max_{t\in[a;b]} |f'(t)|.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall\, x\, y \in [a;b], \quad |f(x)-f(y)| \leqslant \alpha|x-y|.$$

On conclut alors comme précédemment.

Exercice 7 p. 8

On a vu que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Précisons la loi de M_n. Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= \mathbf{P}(M_n \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}(n(1-Y_n) \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}\left(1-Y_n \leqslant \frac{x}{n}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(1-\frac{x}{n} \leqslant Y_n\right) \\ &= 1-\mathbf{P}\left(Y_n \leqslant 1-\frac{x}{n}\right) \quad Y_n \text{ est à densité} \\ F_{M_n}(x) &= 1-F_{Y_n}\left(1-\frac{x}{n}\right). \end{aligned}$$

- Si $x \leqslant 0$, $F_{M_n}(x) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $x \geqslant 1$, $F_{M_n}(x) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
- $x \in [0;n]$, $1-x/n \in [0;1]$ et

$$F_{M_n}(x) = 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n.$$

Précisons la limite lorsque $n \to +\infty$

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \\ &= 1-e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \\ &= 1-e^{n\left(-\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ F_{M_n}(x) &= 1-e^{-x+o(1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1-e^{-x} \end{aligned}$$

par continuité de la fonction exponentielle.
On constate que si X suit une loi exponentielle de paramètre 1, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{M_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(x).$$

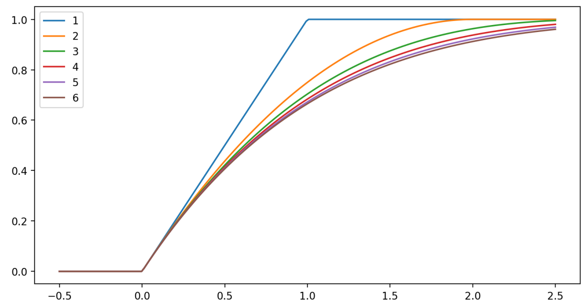
Par définition $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable X suivant une loi $\mathscr{E}(1)$.

```python
# Un test

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def Fxn(x,n):
    if x<0 : return 0
    if x>n : return 1
    else :
        return 1-(1-x/n)**n

X=np.linspace(-1/2,2.5,200)
for n in range(1,7):
    Y=np.zeros(200)
    for i in range(200):
        Y[i]=Fxn(X[i],n)
    plt.plot(X,Y,label=n)
    plt.legend()
plt.show()
```



Exercice 8 p. 10

1.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les événements $[X_n = 0]$, $[X_n = 1]$ et $[X_n = 2]$ forment un système complet d'événements. En particulier,

$$\mathbf{P}([X_n=0]) + \mathbf{P}([X_n=1]) + \mathbf{P}([X_n=2]) = 1.$$

Or, $\cos(n)^2 + \sin(n)^2 = 1$. Nécessairement,

$$\boxed{\alpha = 1.}$$

1.(b) Par encadrement, on a les limites

$$\mathbf{P}([X_n=0]) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}([X_n=1]) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

$$\text{et} \quad \mathbf{P}([X_n=2]) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi uniforme discrète sur $\{0;1;2\}$.

2. Soit $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Par définition de la loi de Poisson, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}([Z=k]) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par continuité de l'application $t \mapsto e^{-t}t^k/k!$, on trouve

$$\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda_n}\frac{\lambda_n{}^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Ainsi, $\qquad \mathbf{P}([X_n=k]) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}([Z=k]).$

La suite $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 9 p. 10

On a $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ mais X et Y ayant même loi, on a aussi $Y_n \to Y$.
Regardons maintenant les sommes

$$X_n + Y_n = 2X \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} 2X.$$

Pourtant $X+Y=1$ et 2X et 1 n'ont pas même loi. Pour détailler, on peut écrire

$$\begin{aligned} F_{X_n+Y_n}\left(\frac{1}{2}\right) &= F_{2X}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{P}\left(2X \leqslant \frac{1}{2}\right) \\ &= \mathbf{P}(X=0) = p \\ \text{et}\quad F_{X+Y}\left(\frac{1}{2}\right) &= \mathbf{P}\left(X+Y \leqslant \frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

En particulier

$$F_{X_n+Y_n}\left(\frac{1}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\not\longrightarrow}} F_{X+Y}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Il n'y a donc pas convergence en loi.

Exercice 10 p. 10

Posons $Y = X + c$. Soit F_Y, sa fonction de répartition.
Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}(y \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}(X + c \leqslant x) = F_X(x-c). \end{aligned}$$

Si F_X est continue sur l'ensemble C_X, F_Y est continue sur

$$C_Y = \{x - c \quad : \quad x \in C_X\}.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = x_n + c$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= \mathbf{P}(Y_n \leqslant x) = \mathbf{P}(X_n \leqslant x - c) \\ &= F_{X_n}(x-c). \end{aligned}$$

Or en tout point $t \in C_X$ de continuité de F_X

$$F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t).$$

On en déduit que pour tout $x \in C_Y$, $x - c \in C_X$

$$F_{Y_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(x-c) = F_Y(x).$$

Ce qui justifie bien la convergence en loi demandée.

Exercice 11 p. 11

Notons F_n (respectivement F), la fonction de répartition de X_n (resp. X). Puis G_n, G pour $f(X_n)$ et $f(X)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbf{P}\big(f(X_n) \leqslant x\big) \\ &= \mathbf{P}\left(X_n \leqslant f^{-1}(x)\right) \quad f^{-1} \text{ croissante} \\ &= F_n\left(f^{-1}(x)\right) = F_n \circ f^{-1}(x). \end{aligned}$$

De même $\qquad G(x) = F \circ f^{-1}(x).$

Notons D, l'ensemble des points de continuité de F. L'ensemble

$$f(D) = \{f(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

est l'ensemble des points de continuité de G. Ensuite, par composition, pour tout $x = f(t) \in f(D)$ avec $t \in D$,

$$\begin{aligned} G_n(x) &= F_n \circ f^{-1}(x) \\ &= F_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(t) = F \circ f^{-1}(x) = G(x). \end{aligned}$$

Par définition,

$$f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} f(X).$$

Exercice 12 p. 11

1. Précisons que la condition,

$$np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \neq 0,$$

équivaut à $\qquad np_n \underset{n+\infty}{\sim} \lambda.$

(a) On a

$$\frac{p_n}{1-p_n} = \frac{np_n}{n - np_n} \underset{n+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}.$$

Par élévation à la puissance $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^k \underset{n+\infty}{\sim} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k.$$

(b) Comme $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on a

$$\ln(1-p_n) \underset{n+\infty}{\sim} -p_n \underset{n+\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}.$$

Ou encore : $\qquad \ln(1-p_n) = -\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$

D'où,

$$\begin{aligned} (1-p_n)^n &= \exp\left(n\left(-\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\big(-\lambda + o(1)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire, $\qquad (1-p_n)^n \underset{n+\infty}{\sim} e^{-\lambda}.$

(c) On a :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}. \end{aligned}$$

2. Par produit,

$$\mathbf{P}\big([X_n = k]\big) \underset{n+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Résumons, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}\big([X_n = k]\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathbf{P}\big([Z = k]\big)$$

$$\text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda).$$

Finalement,

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \quad \text{avec} \quad Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda).}$$

Exercice 13 p. 13

1.(a) Rappelons le développement en série de l'exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On a aussi :

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Par somme :

$$\begin{aligned}\frac{e^x+e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

Or, $$\frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=2k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Finalement, $$\boxed{\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.}$$

1.(b) On a $[Z \text{ est pair}] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [Z=2k]$.

Les événements sont deux à deux disjoints, *la propriété d'additivité d'une probabilité* impose :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big([Z \text{ est pair}]\big) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\big([Z=2k]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\ \mathbf{P}\big([Z \text{ est pair}]\big) &= e^{-\lambda} \cdot \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}.\end{aligned}$$

Concluons : $$\boxed{\mathbf{P}\big([Z \text{ est pair}]\big) = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}.}$$

2.(a) X compte le nombre d'erreurs dans une succession de $n = 10000$ épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes. Comme la probabilité d'une erreur est $p = 10^{-5}$,

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\big(10000; 10^{-5}\big).}$$

2.(b) On est dans le domaine d'application du théorème de convergence des lois binomiales vers une loi de Poisson :

$$n \gg 1 \quad \text{et} \quad np = 1.$$

On approxime

$$\mathbf{P}\big([X \text{pair}]\big) \simeq \mathbf{P}\big([Z \text{pair}]\big),$$

où $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$. D'après ce qui précède :

$$\boxed{\mathbf{P}\big([X \text{pair}]\big) \simeq \frac{1+e^{-2}}{2}.}$$

Ensuite, on cherche

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[X \text{ pair }]}(X=0) &= \frac{\mathbf{P}\big([X=0] \cap [X \text{ pair }]\big)}{\mathbf{P}\big([X \text{ pair }]\big)} \\ &= \frac{\mathbf{P}([X=0])}{\mathbf{P}\big([X \text{ pair }]\big)}\end{aligned}$$

Or à l'aide de l'approximation par une loi de Poisson

$$\mathbf{P}([X=0]) \simeq \mathbf{P}(Z=0) = e^{-1}$$

et

$$\mathbf{P}([X \text{ pair }]) \simeq \mathbf{P}\big([Z \text{ pair }]\big) = \frac{1+e^{-2}}{2}.$$

D'où la probabilité recherchée vaut approximativement

$$p \simeq \frac{2e^{-1}}{1+e^{-2}} = \frac{2e}{e^2+1} \simeq \frac{2}{3}.$$

Exercice 15 p. 19

Exercice 16 p. 19

1.(a) Soit $m \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big((X-m)^2\Big) &= \mathbf{E}\Big(X^2 - 2mX + m^2\Big) \\ &= \mathbf{E}\Big(X^2\Big) - 2m\mathbf{E}(X) + m^2 \\ &= \Big(\mathbf{E}\Big(X^2\Big) - \mathbf{E}(X)^2\Big) + \mathbf{E}(X)^2 - 2m\mathbf{E}(X) + m^2 \\ &= \mathbf{V}(X) + (\mathbf{E}(X) - m)^2.\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}\Big((X-m)^2\Big) \geqslant \mathbf{V}(X).$$

le minimum est $\mathbf{V}(X)$ et atteint uniquement pour

$$m = \mathbf{E}(X).$$

1.(b) Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in [a;b]$. On a toujours

$$|X(\omega) - m| \leqslant \frac{b-a}{2}.$$

Par croissance de l'espérance

$$\mathbf{E}\big((X-m)^2\big) \leqslant \mathbf{E}\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right) = \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Comme $\mathbf{V}(X)$ est le minimum, le résultat s'en déduit.

2. C'est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à

$$Z = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(U_k\big).$$

En effet

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{Z}) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\big(f(\mathrm{U}_k)\big)\\ &= \mathbf{E}\big(f(\mathrm{U}_1)\big) \text{ (même loi)}\\ &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathrm{Z}) &= \frac{1}{n^2}\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{U}_k)\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}\big(f(\mathrm{U}_k)\big) \quad \text{indépendance}\\ &= \frac{1}{n}\mathbf{V}\big(f(\mathrm{U}_1)\big) \quad \text{même loi.}\end{aligned}$$

Or $f(\mathrm{U}_1)$ est à valeurs dans $[a,b]$, la question 1.(b) donne

$$\mathbf{V}\big(f(\mathrm{U}_1)\big) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}.$$

D'où le résultat.

Exercice 17 p. 20

1. $\mathrm{I} = [4\arctan(t)]_0^1 = \pi$.

...

2. On cherche n tel que

$$\mathbf{P}\left(\left|\pi - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{U}_k)\right| \geqslant 10^{-3}\right) \leqslant (1-95\%).$$

D'après la relation (•), il suffit que

$$5\% \geqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2} \qquad \text{avec } a=1, b=0, \varepsilon = 10^{-3}.$$

D'où

$$n \geqslant \frac{100}{\varepsilon^2 - 45} = \frac{5}{\varepsilon^2} = 5\cdot 10^6.$$

La méthode est assez peu efficace en comparaison avec les sommes de Riemann.

Remarque. La méthode devient intéressante numériquement en dimension plus grande que 1.

Exercice 19 p. 21

1. X_n compte le nombre de succès (obtenir une boule blanche) dans une succession de n épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes. La probabilité de succès est p.

$$\boxed{\mathrm{X}_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p).}$$

L'espérance est np et la variance $np(1-p)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left|\frac{\mathrm{X}_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) &= \mathbf{P}\big(|\mathrm{X}_n - np| \geqslant n\varepsilon\big)\\ &= \mathbf{P}\big(|\mathrm{X}_n - \mathbf{E}(\mathrm{X}_n)| \geqslant n\varepsilon\big).\end{aligned}$$

Par application de *l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev*, il vient

$$\mathbf{P}\big(|\mathrm{X}_n - \mathbf{E}(\mathrm{X}_n)| \geqslant n\varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(\mathrm{X}_n)}{(n\varepsilon)^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

On conclut en remarquant que la fonction $p \in [0;1] \mapsto p(1-p)$ admet $1/4$ comme maximum.

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\left|\frac{\mathrm{X}_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.}$$

3. On cherche un entier n tel que

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\mathrm{X}_n}{n} - p\right| \geqslant 1\%\right) \leqslant 5\%.$$

D'après ce qui précède, il suffit que n vérifie

$$\frac{1}{4n\cdot(0,01)^2} \leqslant 0,05.$$

On trouve $\boxed{n \geqslant 50\,000.}$

La majoration fournie par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est souvent excessive.

Exercice 20 p. 21

1. Par définition, $\alpha = \mathbf{P}_{[\mathrm{X}\geqslant 2]}\mathrm{M} = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{M}\cap[\mathrm{X}\geqslant 2])}{\mathbf{P}(\mathrm{X}\geqslant 2)}$.
La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\mathrm{M},\overline{\mathrm{M}})$ donne

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}\geqslant 2) = \mathbf{P}(\mathrm{M}\cap[\mathrm{X}\geqslant 2]) + \mathbf{P}(\overline{\mathrm{M}}\cap[\mathrm{X}\geqslant 2]).$$

En divisant par $\mathbf{P}(\mathrm{M}\cap[\mathrm{X}\geqslant 2]) > 0$, on obtient

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{X}\geqslant 2)}{\mathbf{P}(\mathrm{M}\cap[\mathrm{X}\geqslant 2])} = 1 + \frac{\mathbf{P}(\overline{\mathrm{M}}\cap[\mathrm{X}\geqslant 2])}{\mathbf{P}(\mathrm{M}\cap[\mathrm{X}\geqslant 2])}.$$

Après simplifications

$$\boxed{\frac{\mathbf{P}(\mathrm{M}\cap[\mathrm{X}\geqslant 2])}{\mathbf{P}(\overline{\mathrm{M}}\cap[\mathrm{X}\geqslant 2])} = \frac{\alpha}{1-\alpha}.}$$

2. Notons Y la variable aléatoire réelle donnant la durée de vie d'un souris mutante et Z celle d'une souris normale. Par hypothèse

$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}) = 3 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathrm{Y}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Comme une souris mutante ne vit jamais plus de 4 ans, on peut affirmer que

$$[\mathrm{Y} > 2] = [2 < \mathrm{Y} < 4] = [|\mathrm{Y} - \mathbf{E}(\mathrm{Y})| < 1].$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev impose

$$\mathbf{P}(\mathrm{Y} > 2) = \mathbf{P}\big(|\mathrm{Y} - \mathbf{E}(\mathrm{Y})| < 1\big) \geqslant 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Par hypothèse $\mathbf{E}(\mathrm{Z}) = 1$ et $\mathbf{V}(\mathrm{Z}) = \frac{1}{4}$. On a $[\mathrm{Z}\geqslant 2] = [|\mathrm{Z}-1| \geqslant 1]$.
L'inégalité de *Bienaymé-Tchebychev* donne

$$\mathbf{P}(\mathrm{Z}\geqslant 2) = \mathbf{P}\big(|\mathrm{Z} - \mathbf{E}(\mathrm{Z})| \geqslant 1\big) \leqslant \frac{1}{4}.$$

On peut maintenant calculer

$$\frac{\mathbf{P}(\mathrm{M}\cap[\mathrm{X}\geqslant 2])}{\mathbf{P}(\overline{\mathrm{M}}\cap[\mathrm{X}\geqslant 2])} = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{M})\mathbf{P}_{\mathrm{X}\geqslant 2}\mathbf{P}(\overline{\mathrm{M}})}{\mathbf{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{X}\geqslant 2)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(\mathrm{M})\mathbf{P}(\mathrm{Y} \geqslant 2)}{\mathbf{P}(\overline{\mathrm{M}})\mathbf{P}(\mathrm{Z} \geqslant 2)}.$$

On déduit des résultats précédents :

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \geqslant \frac{7}{12}, \quad \text{puis,} \quad \boxed{\alpha \geqslant \frac{7}{19}.}$$

Exercice 21 p. 21

1. Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Comme $t > 0$, on a :

$$[\mathrm{X} \geqslant a] = [t\mathrm{X} \geqslant ta].$$

De plus, la fonction exponentielle est strictement croissante, on a aussi :

$$[\mathrm{X} \geqslant a] = \left[\mathrm{e}^{t\mathrm{X}} \geqslant \mathrm{e}^{ta}\right].$$

Comme la variable aléatoire $\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}$ est positive, et qu'elle admet une espérance (par hypothèse), on peut lui appliquer l'inégalité de Markov, et on obtient :

$$\mathbf{P}(\mathrm{X} \geqslant a) = \mathbf{P}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}} \geqslant \mathrm{e}^{ta}\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}\right)}{\mathrm{e}^{ta}}.$$

2.(a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Comme X est une variable aléatoire finie, $\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}$ également, donc admet une espérance. D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{tk}\mathbf{P}(\mathrm{X} = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(p\mathrm{e}^t\right)^k(1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

et donc avec la formule du binôme de Newton,

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}\right) = \left(1-p+p\mathrm{e}^t\right)^n.$$

2.(b) L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = -\frac{1}{2}(1-p)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}p\mathrm{e}^{\frac{t}{2}},$$

donc

$$\begin{aligned}f'(t) \geqslant 0 &\iff p\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \geqslant (1-p)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \\ &\iff \mathrm{e}^t \geqslant \frac{1-p}{p} \\ &\iff t \geqslant \ln\left(\frac{1-p}{p}\right),\end{aligned}$$

avec

$$f'(t) = 0 \iff t = \ln\left(\frac{1-p}{p}\right).$$

Ainsi $f' \leqslant 0$ sur l'intervalle $]0, \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)]$, $f' \geqslant 0$ sur l'intervalle $[\ln\left(\frac{1-p}{p}\right), +\infty[$, et ne s'annule qu'en $\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)$, il en résulte que :

→ f est strictement décroissante sur $]0, \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)]$;

→ f est strictement croissante sur $[\ln\left(\frac{1-p}{p}\right), +\infty[$.

On en déduit que pour $t \in \mathbb{R}_+^*$: si

$$t \leqslant \ln\left(\frac{1-p}{p}\right), \quad \text{alors} \quad f(t) \geqslant f\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)\right),$$

et si $t \geqslant \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)$, alors

$$f(t) \geqslant f\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)\right).$$

Donc f présente un minimum sur $\mathbb{R}$, atteint en $\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)$.

Enfin, on calcule :

$$\begin{aligned}f\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)\right) &= (1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{-\frac{1}{2}} + p\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1-p)\sqrt{\frac{p}{1-p}} + p\sqrt{\frac{1-p}{p}},\end{aligned}$$

donc

$$f\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)\right) = 2\sqrt{p(1-p)}.$$

(c) Avec la question 2(a), on sait que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la variable $\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}$ admet une espérance, qu'on a calculée. On peut donc appliquer la question 1 , avec $a = \frac{n}{2}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\mathrm{X} \geqslant \frac{n}{2}\right) &\leqslant \frac{\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}\right)}{\mathrm{e}^{t\frac{n}{2}}} \\ &\leqslant \frac{\left(1-p+p\mathrm{e}^t\right)^n}{\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right)^n} = \left(\frac{1-p+p\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}\right)^n = (f(t))^n.\end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a tout intérêt à regarder en particulier ce que cela donne pour $t = \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)$ (car f est minimale en ce point, donc f^n aussi, car $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f > 0$). On obtient, d'après 2.(b)

$$\mathbf{P}\left(\mathrm{X} \geqslant \frac{n}{2}\right) \leqslant \left(2\sqrt{p(1-p)}\right)^n = 2^n(p(1-p))^{\frac{n}{2}}.$$

Exercice 22 p. 21

1.(a) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\begin{aligned}[\mathrm{X} \geqslant \mathbf{E}(\mathrm{X}) + \alpha] &= [\mathrm{X} - \mathbf{E}(\mathrm{X}) \geqslant \alpha] \\ &= [\mathrm{X} - \mathbf{E}(\mathrm{X}) + \beta \geqslant \alpha + \beta] \\ &= [\mathrm{Z} \geqslant \alpha + \beta].\end{aligned}$$

Où on a posé $\mathrm{Z} = \mathrm{X} - \mathbf{E}(\mathrm{X}) + \beta$. De plus,

$$\left[\mathrm{Z}^2 \geqslant (\alpha+\beta)^2\right] = [\mathrm{Z} \geqslant \alpha+\beta] \cup [\mathrm{Z} \leqslant -(\alpha+\beta)].$$

Les événements sont disjoints,

$$\mathbf{P}\left(\left[\mathrm{Z}^2 \geqslant (\alpha+\beta)^2\right]\right) = \mathbf{P}([\mathrm{Z} \geqslant \alpha+\beta]) + \mathbf{P}([\mathrm{Z} \leqslant -(\alpha+\beta)]).$$

En particulier, on a :

$$\mathbf{P}([\mathrm{Z} \geqslant \alpha+\beta]) \leqslant \mathbf{P}\left(\left[\mathrm{Z}^2 \geqslant (\alpha+\beta)^2\right]\right).$$

Appliquons maintenant *l'inégalité de Markov* à la variable Z^2 positive. Z^2 admet une espérance puisque X admet un moment d'ordre 2.

$$\mathbf{P}\left([Z^2 \geqslant (\alpha+\beta)^2]\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}(Z^2)}{(\alpha+\beta)^2}.$$

C'est-à-dire,

$$\boxed{\mathbf{P}\left([X \geqslant \mathbf{E}(X)+\alpha]\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left((X-\mathbf{E}(X)+\beta)^2\right)}{(\alpha+\beta)^2}.}$$

1.(b) Pour $\beta = \mathbf{V}(X)/\alpha \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}&\left(X-\mathbf{E}(X)+\frac{\mathbf{V}(X)}{\alpha}\right)^2\\ &= \left(X-\mathbf{E}(X)\right)^2 + 2\cdot\frac{\mathbf{V}(X)}{\alpha}\left(X-\mathbf{E}(X)\right) + \frac{\mathbf{V}(X)^2}{\alpha^2}.\end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(\left(X-\mathbf{E}(X)+\frac{\mathbf{V}(X)}{\alpha}\right)^2\right)\\ &= \mathbf{V}(X) + \frac{\mathbf{V}(X)^2}{\alpha^2} = \frac{\mathbf{V}(X)}{\alpha^2}\left(\alpha^2+\mathbf{V}(X)\right).\end{aligned}$$

De plus,

$$(\alpha+\beta)^2 = \left(\alpha+\frac{\mathbf{V}(X)}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha^2+\mathbf{V}(X)\right)^2$$

Simplifions :

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbf{E}\left((X-\mathbf{E}(X)+\beta)^2\right)}{(\alpha+\beta)^2}\\ &= \frac{\frac{\mathbf{V}(X)}{\alpha^2}\left(\alpha^2+\mathbf{V}(X)\right)}{\frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha^2+\mathbf{V}(X)\right)^2} = \frac{\mathbf{V}(X)}{\alpha^2+\mathbf{V}(X)}.\end{aligned}$$

Concluons à l'aide du résultat de la question précédente,

$$\boxed{\mathbf{P}\left([X \geqslant \mathbf{E}(X)+\alpha]\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X)+\alpha^2}.}$$

3. Si X est presque surement constante, le résultat est clair. Appliquons l'inégalité de la question 2 avec $X = \sigma(X)$ sachant que $\sigma(X) \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\mathbf{P}([X \geqslant \mathbf{E}(x)+\sigma(X)]) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X)+\alpha^2} = \frac{1}{2}.$$

Or la fonction (X est a densité) $f : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbf{P}(X \geqslant t) = 1-F_X(t)$ est décroissante. Ainsi la condition

$$f(\mathbf{E}(X)+\sigma(X)) \leqslant \frac{1}{2} = f(m).$$

Impose nécessairement

$$\mathbf{E}(X)+\sigma(X) \geqslant m$$

c'est-a dire

$$m-\mathbf{E}(X) \leqslant \sigma(X).$$

Appliquons maintenant le résultat à la variable $-X$

$$m' - \mathbf{E}(-X) \leqslant \sigma(-X)$$

D'où $\mathbf{E}(X) - m' \leqslant \sigma(X)$. Ce qui donne le résultat.

Si $m(X)$ est une médiane de X alors $-m(X)$ est une médiane de $-X$. En effet

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(-X \leqslant -m) &= \mathbf{P}(X \geqslant +m)\\ &= 1-\mathbf{P}(X<m)\\ &= 1-\mathbf{P}(X \leqslant m)\\ &= 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 23 p. 22

1. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(Y_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2p = 2p.$$

- *Calcul de la variance.*

→ *Méthode 1.*

On peut remarquer que

$$\begin{aligned}T_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{i+1})\\ &= \frac{X_1+X_{n+1}}{2} + \frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n}X_i.\end{aligned}$$

Sous cette nouvelle forme, on reconnaît une somme de variables aléatoires indépendantes. Dès lors

$$\mathbf{V}(T_n) = \frac{\mathbf{V}(X_1)+\mathbf{V}(X_{n+1})}{n^2} + \frac{4}{n^2}\sum_{i=2}^{n}\mathbf{V}X_i.$$

Comme les variables X_i suivent des lois de Bernoulli, on obtient :

$$\mathbf{V}(T_n) = \frac{1}{n^2}(2pq) + \frac{4}{n^2}(n-1)pq = \frac{2pq}{n^2}(2n-2).$$

- *Méthode 2.*

Passons par la covariance en remarquant que pour $j<i$, Y_i et Y_j sont indépendantes (et donc de covariance nulle) dès que $j \neq i+1$.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(T_n) &= \frac{1}{n^2}\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}(Y_i)+2\sum_{i<j}\operatorname{cov}(Y_i,Y_j)\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\left(2npq+2\sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{cov}(Y_i,Y_{i+1})\right)\end{aligned}$$

Or, on a aussi

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Y_i,Y_{i+1}) &= \operatorname{cov}(X_i+X_{i+1},X_{i+1}+X_{i+2})\\ &= \operatorname{cov}(X_{i+1},X_{i+1}) = \mathbf{V}(X_{i+1}) = pq.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(T_n) &= \frac{1}{n^2}(2npq+2(n-1)pq)\\ &= \frac{2pq}{n^2}(2n-2)\end{aligned}$$

3. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbf{P}\left(|T_n - \mathbf{E}(T_n)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(T_n)}{\varepsilon^2}.$$

En reprenant les résultats de la question 1 et par encadrement

$$\mathbf{P}\left(\left|T_n - 2p\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 24 p. 22

1.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $([X_n = i])_{i\in\{0;1;-1\}}$ est un système complet d'événements. D'après *la formule des probabilités totales* (on suppose que les probabilités des événements M_n, B_n et S_n sont non nulles),

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X_{n+1}=1]) &= \mathbf{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1])\mathbf{P}([X_n=1]) + \\ &\mathbf{P}_{[X_n=-1]}([X_{n+1}=1])\mathbf{P}([X_n=-1]) \\ &+\mathbf{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1}=1])\mathbf{P}([X_n=0]).\end{aligned}$$

En utilisant les valeurs de l'énoncé, on trouve :

$$\boxed{\mathbf{P}([X_{n+1}=1]) = \frac{2}{3}\mathbf{P}([X_n=1]) + \frac{1}{6}\mathbf{P}([X_n=0]) + \frac{1}{6}\mathbf{P}([X_n=-1]).}$$

De même, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X_{n+1}=0]) &= \frac{1}{6}\mathbf{P}([X_n=1]) + \frac{1}{6}\mathbf{P}([X_n=-1]) + \frac{2}{3}\mathbf{P}([X_n=0]);\\ \mathbf{P}([X_{n+1}=-1]) &= \frac{1}{6}\mathbf{P}([X_n=1]) + \frac{2}{3}\mathbf{P}([X_n=-1]) + \frac{1}{6}\mathbf{P}([X_n=0]).\end{aligned}$$

1.b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned}MU_n &= \begin{bmatrix}2/3 & 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 2/3 & 1/6\\ 1/6 & 1/6 & 2/3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{P}([X_n=1])\\ \mathbf{P}([X_n=0])\\ \mathbf{P}([X_n=-1])\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\mathbf{P}([X_n=1]) + \frac{1}{3}\mathbf{P}([X_n=-1]) + \frac{1}{3}\mathbf{P}([X_n=0])\\ \frac{1}{3}\mathbf{P}([X_n=1]) + \frac{2}{3}\mathbf{P}([X_n=-1]) + \frac{1}{3}\mathbf{P}([X_n=0])\\ \frac{1}{3}\mathbf{P}([X_n=1]) + \frac{1}{3}\mathbf{P}([X_n=-1]) + \frac{2}{3}\mathbf{P}([X_n=0])\end{bmatrix}\\ MU_n &= \begin{bmatrix}\mathbf{P}([X_{n+1}=1])\\ \mathbf{P}([X_{n+1}=0])\\ \mathbf{P}([X_{n+1}=-1])\end{bmatrix} = U_{n+1}.\end{aligned}$$

Par récurrence, on prouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{U_n = M^{n-1}U_1.}$$

2. On constate que $J^2 = 3J$. Par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1}J$. Comme les matrices I_3 et J commutent, on peut appliquer *la formule du binôme de Newton* :

$$\begin{aligned}(3I_3+J)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k {I_3}^k J^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k J^{n-k}\\ &= 3^n J^0 + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}3^k J^{n-k}\\ &= 3^n I_3 + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}3^k 3^{n-k-1}J\\ (3I_3+J)^n &= 3^n I_3 + 3^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\right)J.\end{aligned}$$

Or, $$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \binom{n}{n} = 2^n - 1.$$

Puis, $$(3I_3+J)^n = 3^n I_3 + 3^{n-1}\left(2^n-1\right)J.$$

Comme $M = \frac{1}{6}\left(3I_3+J\right)$, on trouve :

$$\boxed{M^n = \frac{1}{2^n}I_3 + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)J.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme au premier jour, le titre est stable,

$$U_1 = {}^t[0 \quad 1 \quad 0] \quad \text{et} \quad JU_1 = {}^t[1 \quad 1 \quad 1].$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}U_n &= M^{n-1}U_1\\ &= \left(\frac{1}{2^{n-1}}I_3 + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)J\right)U_1\\ &= \frac{1}{2^{n-1}}U_1 + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)JU_1\\ U_n &= \frac{1}{2^{n-1}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Il vient : $$\boxed{\mathbf{P}([X_n=1]) = \mathbf{P}([X_n=-1]) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right),}$$

et, $$\boxed{\mathbf{P}([X_n=0]) = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right).}$$

3. À la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}([X_n=1]) = \lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}([X_n=-1]) = \lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}([X_n=0]) = \boxed{\frac{1}{3}.}$$

La suite $(X_n)_n$ converge vers une loi uniforme sur $\{-1;0;1\}$.

4. Vérifier que $MU = U$. On a un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

Exercice 25 p. 23

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n > k$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

et

$$\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On constate que la suite de variables discrètes converge en loi vers une variable aléatoire presque constante égale à 0. De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_n) &= 0\cdot\mathbf{P}(X_n=0) + n\cdot\mathbf{P}(X_n=n)\\ &= 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.\end{aligned}$$

Cet exemple illustre que la converge en loi

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} x$$

n'implique pas nécessairement

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{E}(\mathrm{X}).$$

Exercice 26 p. 23

Exercice 29 p. 23

Un exemple de convergence en loi d'une suite de variables aléatoires à densité vers une variable certaine.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie la définition.

- f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- f_n est positive.
- Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_*^+$. On a

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{A}} f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\mathrm{A}} \frac{n\,\mathrm{d}t}{1+(nt)^2}\\ &= \left[\frac{\arctan(nt)}{\pi}\right]_0^{\mathrm{A}}\\ \int_0^{\mathrm{A}} f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\arctan(n\mathrm{A})-\arctan(0)}{\pi}.\end{aligned}$$

Comme,

$$\arctan(0)=0 \quad \text{et} \quad \arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2},$$

on obtient $$\int_0^{\mathrm{A}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Par parité de f_n, on a aussi

$$\int_{-\mathrm{B}}^{0} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\mathrm{B}\to-\infty]{} \frac{1}{2}.$$

En conclusion, $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

$$\boxed{f_n \text{ est une densité de probabilité.}}$$

2. $\boxed{\text{Non.}}$ L'inégalité de Markov ne s'applique pas puisque X_n n'a pas d'espérance. L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ ne converge pas absolument.}$$

Justifions ce point. On a

$$f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi t^2}.$$

Par conséquent, $$t f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi t}.$$

Les fonctions sont positives, *le critère d'équivalence* s'applique. Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente en $+\infty$.

Puis, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,\mathrm{d}t$ ne converge pas (absolument), l'espérance n'est pas définie.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x}\frac{n\,\mathrm{d}t}{\pi(1+n^2t^2)}\\ &= \left[\frac{\arctan(nt)}{\pi}\right]_{-\infty}^{x}\\ &= \frac{\arctan(nx) - \lim\limits_{t\to-\infty}\arctan(nt)}{\pi}.\end{aligned}$$

On obtient : $$\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) = \frac{\arctan(nx)}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

En particulier, pour $x \leqslant 0$,

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Pour $x > 0$,

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi/2}{\pi} + \frac{1}{2} = 1.$$

On retrouve la fonction d'une variable aléatoire presque surement constante à 0. Par définition, on a donc bien convergence en loi vers une variable aléatoire presque surement constante égal à 0.

Exercice 30 p. 24

1.(a) D'après les propriétés des variables de Bernoulli,

$$\mathbf{V}(\mathrm{X}_k) = p_k(1-p_k).$$

Étudions la fonction polynomiale f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = x(1-x) = x - x^2.$$

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = 1-2x.$$

Donc : $\forall x \in [0,1], \quad f'x) \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{1}{2}.$

En particulier, f possède un maximum en $\frac{1}{2}$. Conclusion

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{V}(\mathrm{X}_k) \leqslant \tfrac{1}{4}.}$$

Comme $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{V}(\mathrm{Y}_n) = \mathbf{V}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{X}_k\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}(\mathrm{X}_k).$$

Avec l'inégalité précédente, on obtient

$$\boxed{\mathbf{V}(\mathrm{Y}_n) \leqslant \frac{1}{4n}.}$$

1.(b) Par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(\mathrm{X}_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k = m_n.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$\mathbf{P}\big(|\mathrm{Y}_n - m_n| < \varepsilon\big) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{V}(\mathrm{Y}_n)}{\varepsilon^2}.$$

Puis, d'après la question 1 a)

$$1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}\leqslant \mathbf{P}\left(|Y_n-m_n|<\varepsilon\right)\leqslant 1.$$

Avec le théorème d'encadrement, on conclut sur l'existence et la valeur de la limite

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\big(|Y_n-m_n|<\varepsilon\big)=1.}$$

2.(b) L'inégalité triangulaire donne

$$|Y_n-m|\leqslant|Y_n-m_n|+|m_n-m|\leqslant|Y_n-m_n|+\varepsilon/2.$$

On trouve

$$\left[|Y_n-m_n|<\frac{\varepsilon}{2}\right]\subset\left[|Y_n-m|<\varepsilon\right].$$

D'après les propriétés des probabilités

$$\boxed{\mathbf{P}\big(|Y_n-m_n|<\tfrac{\varepsilon}{2}\big)\leqslant\mathbf{P}\big(|Y_n-m|<\varepsilon\big).}$$

2.(b) Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_*^+$. Par définition de la limite, il existe n_0 tel que, pour tout entier $n\geqslant n_0$,

$$|m_n-m|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n\geqslant n_0$, un entier.

$$\mathbf{P}\Big(|Y_n-m_n|<\frac{\varepsilon}{2}\Big)\leqslant\mathbf{P}\big(|Y_n-m|<\varepsilon\big)\quad 2.a)$$

$$\mathbf{P}\Big(|Y_n-m_n|<\frac{\varepsilon}{2}\Big)\geqslant 1-\frac{1}{n\varepsilon^2}\quad 1.b)$$

Donc

$$1-\frac{1}{n\varepsilon^2}\leqslant\mathbf{P}\left(|Y_n-m|<\varepsilon\right)\leqslant 1$$

Avec le théorème d'encadrement, on en conclut que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(|Y_n-m|<\varepsilon\right)=1.}$$

Exercice 31 p. 24

1. Comme $X_n\hookrightarrow\mathscr{U}([\![1;n]\!])$, on a

$$\mathbf{E}(X_n)=\frac{n+1}{2}.$$

D'où,

$$\mathbf{E}(Y_n)=\mathbf{E}\Big(\frac{X_n}{n}\Big)=\mathbf{E}\Big(\frac{X_n}{n}\Big)=\frac{n+1}{2n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}.$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé.
Précisons que pour tout entier n non nul, Y_n est presque sûrement à valeurs dans $[0;1]$ puisque X_n est presque sûrement à valeurs dans $[0;n]$.
Distinguons plusieurs cas.

- Si $x<0$.

$$F_{Y_n}(x)=\mathbf{P}\big([Y_n\leqslant x]\big)=0\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

- Si $x\geqslant 1$.

$$F_{Y_n}(x)=\mathbf{P}\big([Y_n\leqslant x]\big)=1\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1.$$

- Si $x\in[0;1[$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}F_{Y_n}(x)&=\mathbf{P}\big([Y_n\leqslant x]\big)\\&=\mathbf{P}\big([X_n\leqslant nx]\big)=F_n(nx).\end{aligned}$$

Où F_n est la fonction de répartition de X_n.
À l'aide du rappel de l'énoncé,

$$F_{Y_n}(x)=F_n(nx)=\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}.$$

Étudions la limite par encadrement. À l'aide de la définition de la partie entière,

$$nx-1<\lfloor nx\rfloor\leqslant nx.$$

D'où $$x-\frac{1}{n}\leqslant\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\leqslant x.$$

Puis $$F_{Y_n}(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}x.$$

En résumé, pour tout réel x,

$$F_{Y_n}(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}F(x),$$

où la fonction F est définie par :

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0,\\ x & \text{si } x\in[0;1],\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On reconnaît l'expression de la fonction de répartition d'une loi uniforme continue sur $[0;1]$.

$$\boxed{Y_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}}Y\ \text{où}\ Y\hookrightarrow\mathscr{U}([0;1]).}$$

Exercice 33 p. 24

Exercice 35 p. 25

1. On considère une suite infinie de lancers d'aiguille (en pratique, on lance un grand nombre de fois). Pour chaque $k\in\mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui renvoie 1 si au $k^{\text{ème}}$ lancer, l'aiguille est à cheval sur deux planches (on appellera ça un succès), et 0 sinon. On est donc face à une suite infinie d'épreuves de Bernoulli, mutuellement indépendantes, de même paramètre $2/\pi$. En notant, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}X_k$, S_n compte le nombre de succès après n lancers, et S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $2/\pi$. D'après la loi faible des grands nombres, la suite $\left(\frac{1}{n}S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $2/\pi$. Concrètement, on lance un grand nombre de fois l'aiguille, on regarde la fréquence des succès (i.e. le nombre de succès divisé par le nombre de lancers), et quand le nombre de lancers est assez grand, il y a une bonne probabilité pour que la fréquence obtenue soit assez proche de $2/\pi$.
Concrètement, on lance un grand nombre de fois l'aiguille, on regarde la fréquence des succès (i.e. le nombre de succès divisé par le nombre de lancers), et quand le nombre de lancers est assez grand, il y a une bonne probabilité pour que la fréquence obtenue soit assez proche de $2/\pi$. Le problème est dans l'expression « n assez grand ». En pratique, n doit vraiment être très grand ! C'est ce qu'on va voir dans la

question 2.

2. En utilisant le théorème limite central, montrer, par un raisonnement similaire à celui des exercices précédents, que pour une certaine variable Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a, pour n assez grand, et en posant $\varepsilon = 0,01$:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\,\mathrm{S}_n - \frac{2}{\pi}\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx \mathbf{P}\left(|\mathrm{Z}| \leqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)}}\right),$$

puis que

$$\mathbf{P}\left(|\mathrm{Z}| \leqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)}}\right) - 1.$$

Enfin on veut que ce nombre soit égal à 0,95 . Donc que : $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{2}{\pi}(1-\frac{2}{\pi})}} = \Phi^{-1}(0{,}975) \approx 1{,}960$. Comme $\varepsilon = 10^{-2}$, il vient $n \approx 8887$.

Commentaire. La convergence des fréquences empiriques est assez lente. On ne peut raisonnablement pas espérer calculer des décimales de π *de cette manière.*

Exercice 37

p. 26

1. La loi exponentielle de paramètre 1 est aussi la loi gamma $\gamma(1)$. Par somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes, on sait que S_n suit la loi gamma $\gamma(n)$. Par suite

$$\mathbf{E}(\mathrm{S}_n) = \mathbf{V}(\mathrm{S}_n) = n.$$

2. $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, qui suivent toutes la même loi exponentielle de paramètre 1. Posons

$$\mathrm{S}_n{}^* = \frac{\mathrm{S}_n - \mathbf{E}(\mathrm{S}_n)}{\sqrt{\mathbf{V}(\mathrm{S}_n)}} = \frac{\mathrm{S}_n - n}{\sqrt{n}}$$

de sorte que, d'après le théorème de la limite centrée, pour tout réel x

$$\mathbf{P}\left(\mathrm{S}_n{}^* \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x),$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. En particulier, il vient

$$\mathbf{P}(\mathrm{S}_n \leqslant n) = \mathbf{P}\left(\mathrm{S}_n{}^* \leqslant 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

3. En revenant à l'expression d'une densité de la loi $\gamma(n)$, on a aussi

$$\mathbf{P}(\mathrm{S}_n \leqslant n) = \int_0^n \frac{t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}}{\Gamma(n)}\,\mathrm{d}t = \int_0^n \frac{t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi

$$\int_0^n \frac{t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

4.(a) On effectue le changement de variable affine $z = \frac{t}{n}$. Il vient

$$\int_0^n \frac{t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 n^n z^{n-1}\frac{\mathrm{e}^{-nz}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}z.$$

D'après la question précédente

$$\int_0^1 n^n z^{n-1}\frac{\mathrm{e}^{-nz}}{(n-1)!}\,\mathrm{d} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\int_0^1 z^{n-1}\mathrm{e}^{-nz}\,\mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^n}(n-1)!$$

Puis

$$\int_0^1 z^{n-1}\mathrm{e}^{-nz}\,\mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2n^{n+1}}.$$

4.(b)

$$\int_0^1 z^{n-1}\mathrm{e}^{-nz}\,\mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2n^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{2n^{n+1}}$$

D'où

$$\int_0^1 z^{n-1}\mathrm{e}^{-nz}\,\mathrm{d}z \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 38

p. 26

1. Comme X_n suit une loi binomiale

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\mathrm{X}_n \leqslant \frac{n}{4}\right) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/4\rfloor} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = k)\\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/4\rfloor}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\mathrm{X}_n \leqslant \frac{n}{4}\right) &= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/4\rfloor}\binom{n}{k}3^{n-k}\\ &= \frac{1}{4^n}u_n.\end{aligned}$$

2. La variable X_n est aussi une somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant un loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$. Posons

$$\mathrm{X}_n{}^* = \frac{\mathrm{X}_n - n/4}{\sigma\sqrt{n}}$$

de sorte que $\mathrm{X}_n{}^*$ soit centrée réduite. D'après le théorème central limite, pour tout réel x

$$\mathbf{P}\left(\mathrm{X}_n{}^* \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x),$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. En particulier pour $x = 0$, il vient

$$\mathbf{P}\left(\mathrm{X}_n \leqslant \frac{n}{4}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

En reprenant l'expression de u_n de la question précédente, on conclut par

$$u_n = 4^n\mathbf{P}\left(\mathrm{X}_n \leqslant \frac{n}{4}\right) \sim \frac{4^n}{2} = 2^{2n-1}.$$