Nom :

Mathématiques approfondies
ECG 2

Partie IX

RÉVISIONS POUR L'ÉCRIT

Thèmes de révision

Analyse

Algèbre

Probabilités

Python

Analyse

Révisé ?

- **$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et sommes**

— Coefficient binomiaux (définition, formule explicite, formule du triangle de Pascal). ☐☐☐ $\surd$
— Formule du binôme de Newton $(a+b)^n = ...$, factorisation de $a^n - b^n = ...$ ☐☐☐ $\surd$
— Somme géométrique. ☐☐☐ $\surd$
— Définition d'un maximum (minimum), de la borne supérieure (inférieure). ☐☐☐ $\surd$
— Théorème de la borne supérieure. ☐☐☐ $\surd$

- **Application**

— Définitions de : Injectivité, surjectivité, bijectivité. ☐☐☐ $\surd$
— Composition d'applications injectives/surjectives/bijectives. ☐☐☐ $\surd$

- **Polynôme**

— Racine. Nombre de racines d'un polynôme de degré n. ☐☐☐ $\surd$
— Diviseur. Division euclidienne. ☐☐☐ $\surd$
— Définition d'une racine et caractérisations. Multiplicité d'une racine. ☐☐☐ $\surd$
— Factorisation dans le cas réel d'un polynôme. ☐☐☐ $\surd$

- **Calcul matriciel**

— Formule du produit matriciel. Transposée. Trace. ☐☐☐ $\surd$
— Matrices symétriques/antisymétriques. ☐☐☐ $\surd$
— Système linéaire, pivot de Gauss. ☐☐☐ $\surd$
— Déterminant d'une matrice de taille 2. ☐☐☐ $\surd$

- **Suites et séries**

— Théorème de limite monotone. ☐☐☐ $\surd$
— Suites adjacentes. ☐☐☐ $\surd$
— Comment obtenir l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique (exemple $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ? ☐☐☐ $\surd$
— Règles de calculs sur les limites. Croissances comparées. ☐☐☐ $\surd$
— Théorème d'encadrement. ☐☐☐ $\surd$
— Petit "o", équivalent. Exemples usuels. ☐☐☐ $\surd$
— Séries de référence : séries géométriques, série exponentielle, série de Riemann. ☐☐☐ $\surd$
— Critères de convergence pour les séries à termes positifs. ☐☐☐ $\surd$

- **Limite et continuité**

— Définition de la continuité en un point a, sur un intervalle I. ☐☐☐ $\surd$
— Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection. ☐☐☐ $\surd$
— Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ et f est continue en a, $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$. ☐☐☐ $\surd$
— Existence d'un maximum et minimum sur une fonction continue sur un segment. ☐☐☐ $\surd$

- **Dérivation d'une fonction d'une variable**

— Définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement. Interprétation avec la tangente. ☐☐☐ $\surd$
— Développement limité d'ordre 1 : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)$. ☐☐☐ $\surd$
— Formules de dérivation d'une composée, d'une réciproque ☐☐☐ $\surd$
— Théorème de Rolle. Égalité et inégalité des accroissements finis. ☐☐☐ $\surd$
— Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$. ☐☐☐ $\surd$
— Dérivées successives. Formule de Leibniz. ☐☐☐ $\surd$

- **Intégration sur un segment**

— Définition de l'intégrale avec l'aire. Croissance de l'intégrale lorsque les bornes sont dans le bon sens. ☐☐☐ $\surd$
— Approximation d'intégrales par les sommes de Riemann. ☐☐☐ $\surd$
— Connaître les primitives usuelles. ☐☐☐ $\surd$

— Changement de variable. ☐☐☐ √
— Intégration par parties. ☐☐☐ √
— Simplification d'une intégrale d'une fonction paire (ou impaire) sur un intervalle symétrique centrée en 0. ☐☐☐ √
— Si f est continue, positive et d'intégrale sur $[a;b]$ alors f est nulle sur $[a;b]$. ☐☐☐ √

- **Intégration sur un intervalle quelconque**

— Définitions et règles de calculs. ☐☐☐ √
— Critère de convergence (par majoration, négligeabilité et équivalent). ☐☐☐ √
— Intégrales de Riemann. ☐☐☐ √
— Intégrales issues des lois à densité (exemple, fonction Γ). ☐☐☐ √

- **Fonctions de plusieurs variables**

— Définition d'un ouvert/fermé. Exemples. Cas des ensembles $\{x \,\|\, \varphi(x) < r\}$.
— Boules ouvertes, fermées. Définition d'un ensemble borné. ☐☐☐ √
— Graphe et lignes de niveau d'une fonction de plusieurs variables. ☐☐☐ √
— Définition d'un extrema (local/global). ☐☐☐ √
— Définition de la continuité d'une fonction de plusieurs variables. ☐☐☐ √
— Somme, produit, quotient, composition et continuité. ☐☐☐ √
— Définition de la dérivée partielle d'ordre k en a. ☐☐☐ √
— Définition du gradient. Donner le gradient de $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2$. ☐☐☐ √
— Savoir prouver qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$. ☐☐☐ √
Exemple : $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
— Développement limité d'ordre 1. ☐☐☐ √
— Interprétation géométrique : plan tangent, le gradient donne la direction de plus grande pente, ☐☐☐ √
le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.
— Dérivées directionnelles $g_{a,u}$. ☐☐☐ √
— Point critique. Et lien avec les extrema lorsque f est définie sur un ouvert $\mathscr{O}$. ☐☐☐ √
— Existence d'un minimum et maximum d'une fonction continue sur un fermé bornée. ☐☐☐ √

- **Compléments sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$**

— Définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Définition de la matrice hessienne. ☐☐☐ √
— Théorème de Schwarz. ☐☐☐ √
— Forme quadratique associée à une hessienne. Développement limité à l'ordre 2. ☐☐☐ √
— Condition suffisante d'ordre 2 pour un minimum local en a. ☐☐☐ √
— Définition d'une partie convexe. ☐☐☐ √
— Condition de convexité ($\forall\, x$, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbb{R}^+$) pour qu'un point critique donne un extremum global. ☐☐☐ √

- **Optimisations sous contraintes linéaires**

— Définition d'une contrainte linéaire $\mathscr{C}$. ☐☐☐ √
— Définition d'un extremum local/global sous une contrainte linéaire $\mathscr{C}$. ☐☐☐ √
— Point critique sous la contrainte $\mathscr{C}$ en un point a. Lien avec l'extremum sous contrainte. ☐☐☐ √
—

Algèbre

- **Algèbre linéaire, 1ère année**

— Définition du noyau et de l'image. Lien avec l'injectivité et la surjectivité. ☐☐☐ √
— Définition et propriétés des projecteurs (noyau, image, $p \circ p$..) ☐☐☐ √
— Définition du rang, formule du rang. ☐☐☐ √
— Lien entre le rang et l'injectivité/surjectivité/bijectivité. Cas des endomorphismes. ☐☐☐ √
— Matrice d'une famille, de passage et d'une application linéaire. ☐☐☐ √
— Composition application et produit matriciel : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_F}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f)$. ☐☐☐ √
— Bijectivité et inversibilité : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,B_F}\left(f^{-1}\right) = ..$ ☐☐☐ √

— En dimension finie, isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Conséquence $\dim\mathscr{L}(E,F) = \dots$ ☐☐☐ √
— Polynôme d'endomorphisme et de matrice. ☐☐☐ √

- **Rappels et compléments sur l'algèbre linéaire**

— Définitions et caractérisations des supplémentaires. ☐☐☐ √
— Formule de Grassmann. ☐☐☐ √
— Somme directe de 2 puis n sous-espaces vectoriels. Lien avec les concaténations de base. ☐☐☐ √
— En dimension finie, une somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe ssi $\sum_{i=1}^{n} \dim(F_i) = \dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)$. ☐☐☐ √
— Formule de changement de bases. Définition des matrices de passage. ☐☐☐ √
— Matrices semblables. Invariance du rang par similitude. ☐☐☐ √
— Trace d'une matrice et propriété de la trace. ☐☐☐ √
— Définition d'un espace stable. ☐☐☐ √

- **Diagonalisation**

— Définitions d'un vecteur propre pour une matrice, un endomorphisme. ☐☐☐ √
— $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ ssi $A - \lambda I_n$ non inversible ssi $\ker(A - \lambda I_n)$ ssi $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$. ☐☐☐ √
— Définition d'un espace propre. Les espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont en somme directe. ☐☐☐ √
— Lien entre polynôme annulateur et spectre. ☐☐☐ √
— Cas particulier : spectre d'une matrice de taille 2. ☐☐☐ √
— Cas particulier : spectre d'une matrice triangulaire. ☐☐☐ √
— Définition d'une matrice, d'un endomorphisme diagonalisable. ☐☐☐ √
— Un endomorphisme est diagonalisable ssi $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = \dim(E)$. ☐☐☐ √
— Cas particulier d'un endomorphisme avec $\dim E$ valeurs propres. ☐☐☐ √
— Savoir calculer le spectre par un calcul du rang par pivot de Gauss. ☐☐☐ √
— Savoir calculer une base de vecteurs propres de $E_\lambda(A)$ par un pivot de Gauss. ☐☐☐ √
— Savoir diagonaliser la matrice Atilla $J = (1)_{i,j}$. ☐☐☐ √
— Spectre, vecteurs propres et diagonalisabilité des projecteurs. ☐☐☐ √

- **Algèbre bilinéaire**

— Définition d'un produit scalaire de la norme. ☐☐☐ √
— Savoir montrer que $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$, $(f,g) \in \mathscr{C}^0([a;b])^2 \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]^2 \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]_n^2 \mapsto \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$ sont des produits scalaires. ☐☐☐ √
— Propriétés de la norme, inégalité triangulaire. ☐☐☐ √
— Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. ☐☐☐ √
— Théorème de Pythagore. Preuve. ☐☐☐ √
— Vecteurs orthogonaux. Espace orthogonaux. Famille orthogonale. Lien avec la liberté. ☐☐☐ √
— Définition du sous-espace orthogonal à sous-espace vectoriel. ☐☐☐ √
— Espace euclidiens. Exemples. ☐☐☐ √
— Définition d'une base orthonormée. Expression des coordonnées d'un vecteur dans un b.o.n. ☐☐☐ √
— Expression du produit scalaire et de la norme sous la forme $\langle u, v\rangle = {}^tUV$ et $\|u\|^2 = {}^tUU$. ☐☐☐ √
— Définition d'une matrice orthogonale. ☐☐☐ √
— Lien entre le changement de bases orthonormées et matrices orthogonales. ☐☐☐ √
— Lien entre $\dim F^\perp$ et $\dim F$ où F est un sev. ☐☐☐ √

- **Endomorphismes symétriques**

— Définition d'une matrice symétrique, antisymétrique. Dimension des s.e.v associés. ☐☐☐ √
— Définition des endomorphismes symétriques. ☐☐☐ √
— En dimension finie. φ est symétrique ssi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad \left\langle \varphi\left(e_i\right), e_j\right\rangle = \left\langle e_i, \varphi\left(e_j\right)\right\rangle$. ☐☐☐ √
— En dimension finie. φ est symétrique ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ dans une b.o.n est symétrique. ☐☐☐ √
— Si φ est symétrique, les sous-espaces propres sont orthogonaux. Preuve. ☐☐☐ √
— Théorème spectral (version endomorphisme et matriciel). ☐☐☐ √

— Forme quadratique associée à une matrice symétrique. □□□ √
— Encadrement de Rayleigh et signe d'une forme quadratique en fonction du spectre. □□□ √

- **Projecteurs orthogonaux**

— Définition d'un projecteur orthogonal. □□□ √
— Le projecteur est orthogonal ssi le projecteur est symétrique. traduction matricielle. □□□ √
— Expression du projeté. Cas d'un projeté sur une droite ou sur un hyperplan. □□□ √
— Distance à un sev. Théorème de minimisation par le projecteur orthogonal. □□□ √

Probabilités

- **Généralités sur les probabilités**

— Définition d'une probabilité (comme une application de ...) □□□ √
— Formule du crible $\mathbf{P}(A \cup B) = \dots$ □□□ √
— Définition de l'indépendance entre événements. □□□ √
— Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées. □□□ √
— Définition d'un système complet d'événements. □□□ √
— Formule des probabilités totales. □□□ √
— Formule de Bayes. □□□ √
— Théorème de la limite monotone. □□□ √

- **Variables aléatoires**

— Définition d'une variable aléatoire et de la fonction de répartition. □□□ √
— Propriété de la fonction de répartition. Caractérisation de la loi. □□□ √
— Définition d'une variable aléatoire discrète. Indépendance. □□□ √

- **Lois usuelles**

— Les discrètes finies. Bernoulli, binomiale, uniforme discrète. □□□ √
— Les discrètes infinies dénombrables. Géométrique, Poisson. □□□ √
— Les continues. Uniforme continue, exponentielle, normale, gamma. □□□ √

- **Espérance et variance**

— Définition des moments et de la variance. □□□ √
— Croissance de l'espérance et linéarité. □□□ √
— Espérance et variance des lois usuelles. □□□ √
— Existence par le théorème de domination. □□□ √
— Montrer que si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre $s \leqslant r$. □□□ √
— Formule de transfert (version discrète et continue). □□□ √
— Formule de Koenig-Huygens. □□□ √

- **Espérance conditionnelle**

— Définition. □□□ √
— Formule de l'espérance totale. □□□ √

- **Variable à densité**

— Définition d'une variable à densité avec la fonction de répartition. □□□ √
— Caractérisation d'une densité. Lien entre densité et fonction de répartition. □□□ √
— Méthode d'inversion et simulation. Exemple si $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[)$, $-\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. □□□ √
— Règles de transformation affine. Si X de densité f_X, donner une densité de $aX+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. □□□ √

- **Vecteurs aléatoires**

— Loi d'un couple de variables discrètes. Lois marginales de variables discrètes. □□□ √
— Généralisation : Loi d'un vecteur aléatoire avec la fonction de répartition, loi marginale. □□□ √
— Théorème de l'égalité en loi. Si g continue, $(X_i)_i$, $(Y_i)_i$ même loi alors $g(X_i)_i$, $g(Y_i)_i$ ont même loi. □□□ √

— Définition de l'indépendance de n v.a, d'une suite de v.a avec la fonction de répartition. ☐☐☐ √
— Traduction de l'indépendance dans le cas discret. ☐☐☐ √
— Lemme des coalitions. ☐☐☐ √
— Formule de transfert pour un couple de variables aléatoires discrètes. ☐☐☐ √
— Loi d'une somme de lois binomiales indépendantes. ☐☐☐ √
— Loi d'une somme de lois de Poisson indépendantes. ☐☐☐ √
— Espérance d'un produit dans le cas d'indépendance. ☐☐☐ √
— Variance d'une somme de variables indépendantes. ☐☐☐ √
— Définition de la covariance. Formule de Huygens. ☐☐☐ √
— Propriété de la covariance. Forme bilinéaire, symétrique positive (mais non définie). ☐☐☐ √
— Si 2 variables sont indépendantes alors la covariance est nulle. Preuve. ☐☐☐ √
— $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + 2\text{cov}(X,Y) + \mathbf{V}(Y)$. Généralisation à n v.a. ☐☐☐ √
— Inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas de la covariance. ☐☐☐ √
— Coefficient de corrélation. Définition et propriété. ☐☐☐ √

- **Compléments sur les variables à densité**

— Loi d'un maximum et minimum de variables indépendantes (calcul des densités et fonctions de répartition). ☐☐☐ √
— Théorème de sommation pour des v.a. à densité indépendantes (avec le produit de convolution). ☐☐☐ √
— Sommes de loi gamma indépendantes. ☐☐☐ √
— Sommes de loi normale indépendantes. ☐☐☐ √

- **Convergences et approximations**

— Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev. ☐☐☐ √
— Définition de la convergence en probabilité. ☐☐☐ √
— Convergence en probabilité d'une somme. ☐☐☐ √
— Convergence en probabilité et composition par une fonction continue. ☐☐☐ √
— Loi faible des grands nombres. Preuve. ☐☐☐ √
— Définition de la convergence en loi. ☐☐☐ √
— Cas de la convergence en loi pour des variables aléatoires discrètes. ☐☐☐ √
— Convergence en loi et composition par une fonction continue. ☐☐☐ √
— Convergence en loi de lois binomiales vers une loi de Poisson. ☐☐☐ √
— Énoncé du théorème limite central. ☐☐☐ √
— Cas particulier des lois binomiales (théorème de Moivre-Laplace). ☐☐☐ √
— Cas particulier des lois de Poisson. ☐☐☐ √

- **Estimations**

— Définitions d'un échantillon et d'un estimateur. ☐☐☐ √
— Définition du biais d'un estimateur. ☐☐☐ √
— Définition d'un estimateur convergent. ☐☐☐ √
— Exemple de d'estimateur de la moyenne empirique $\overline{X_n}$ (convergent, loi faible, sans biais). ☐☐☐ √
— Composition par une fonction continue d'un estimateur convergent. ☐☐☐ √
— Condition suffisante de convergence d'un estimateur (asymptotiquement sans biais et $\mathbf{V}(T_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$). ☐☐☐ √
— Définition d'un intervalle de confiance. ☐☐☐ √
— Construction d'un intervalle de confiance par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. ☐☐☐ √
— Intervalle de confiance asymptotique. Exemple avec le TCL. ☐☐☐ √

- **Statistiques**

— Définition d'une moyenne, variance et covariance empiriques. ☐☐☐ √

Thème : Révisions de première année
Analyse

Exercice 1. ✧ Donner les développements limités à l'ordre 2 et $n \in \mathbb{N}$ de :

$$(1+x)^{\alpha} = \quad , \frac{1}{1-x} = \quad , e^x = \quad , \ln(1+x) = \quad , \cos(x) = \quad , \sin(x) = \quad .$$

Exercice 2. ✦ ✎ **Constante γ d'Euler**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad u_n = \mathrm{H}_n - \ln n.$$

- *Preuve par les développements limités*

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $v_n = u_n - u_{n-1}$.
   Déterminer un équivalent de v_n. En déduire la nature de la série de terme général v_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. En déduire l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathrm{H}_n = \gamma + \ln(n) + o(1)$.

- *Preuve 2 par les suites adjacentes*
  On introduit en plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad v_n = \mathrm{H}_n - \ln n$.

4. Justifier que pour tout $t \in]0;1]$,
$$\ln(1+t) \leqslant t \quad \text{et} \quad t + \ln(1-t) \leqslant 0.$$
   En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
5. Retrouver le résultat de la question 3.
6. Justifier que $|v_n - \gamma| \leqslant 1/n$. En déduire un programme python qui renvoie une approximation de γ à 10^{-5}-près.

≫ Pour aller plus loin, EMLyon 2002 pour une expression intégrale de γ ou Ecricome 2016, ex1. ✦

Exercice 3. ✦ **Égalité des accroissements finis**
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $a < b$ et ne s'annulant pas sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que
$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right).$$

Exercice 4. ✦ **Nature d'une série de maximums** *D'après EMLyon 2011, partie IV*
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application
$$g_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n admet un maximum, noté M_n, et calculer M_n. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mu_n = \sqrt{n}\mathrm{M}_n \quad \text{et} \quad a_n = \ln\mu_{n+1} - \ln\mu_n.$$
2. Former le développement limité de a_n, à l'ordre 2 lorsque l'entier n tend vers l'infini.
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.
4. Établir que la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ converge et que sa limite est strictement positive.
5. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{M}_n$?

Exercice 5. ✦✦ **Développements limité et CCSA** *adapté de Ecricome 2007*

1. Donner le DL est au voisinage de 0 à l'ordre 2 de $\ln(2 - e^x)$.
2. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(2 - e^{1/k}\right)$?

3. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$\mathrm{V}_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(2 - \mathrm{e}^{1/k}\right) \quad \text{et} \quad u_n = \exp \mathrm{V}_n.$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{V}_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. **a)** Montrer que :

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n} \left[\ln\left(2 - \mathrm{e}^{1/k}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$$

b) Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln\left(2 - \mathrm{e}^{1/k}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

c) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

5. ✎ **Critère spécial des séries alternées**

On pose $$\mathrm{S}_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k.$$

a) Montrer que les suites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont deux suites adjacentes.

b) En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Exercice 6. ✦✦ ✎ Exemple de suite implicite — *D'après EDHEC 2018, épreuve annulée*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = 1 - x - x^n.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x possède une seule solution, notée u_n.

2. **a)** Vérifier que u_n appartient à $]0;1[$.

b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

c) Conclure que la suite $(u_n)_n$ converge et que sa limite appartient à $[0;1]$.

d) Montrer par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.

b) Établir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln v_n}{nv_n}\right)}{-\ln v_n} = 0 \quad \text{puis} \quad \ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n.$$

c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

4. Donner la nature des séries de termes généraux v_n et ${v_n}^2$.

Exercice 7. ✦✦ Lemme de Cesaro et recherche d'équivalent

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle croissante qui converge vers un réel ℓ. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

1. On veut montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ.

a) Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n(n+1)} \left(na_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leqslant \ell$.

c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité : $b_{2n} \geqslant \dfrac{b_n + a_n}{2}$.

d) Déduire des deux questions précédentes que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

2. Montrer que le résultat précédent reste valide si l'on suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

On admet que le résultat trouvé dans les questions 1 et 2 reste valide si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas monotone. On considère désormais la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{{u_n}^2}.$$

3. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
   b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4. Soit β un réel non nul.
   a) Établir l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad {u_{n+1}}^{\beta} - {u_n}^{\beta} = \left(\left(1 + \frac{1}{u_n^3}\right)^{\beta} - 1\right) \times {u_n}^{\beta}$$

   b) À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, déterminer un équivalent de $\left(\left(1 + \frac{1}{{u_n}^3}\right)^{\beta} - 1\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) Montrer que la suite $\left({u_{n+1}}^{\beta} - {u_n}^{\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie non nulle si et seulement si $\beta = 3$.
5. En posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = {u_{n+1}}^3 - {u_n}^3$, donner un équivalent de u_n en $+\infty$.

Exercice 8. ✦ ✎ Sommes de Riemann

Rappeler le principe des sommes de Riemann et le théorème. En déduire l'équivalent pour $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Exercice 9. ✦✦ ✎ Fonction W de Lambert — *D'après ESCP 2022, n13*

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
2. a) Montrer que la restriction de f à $[-1, +\infty[$ réalise une bijection sur un intervalle J qu'on déterminera. On note W la réciproque de cette bijection.
   b) Déterminer W(0) et W′(0).
   c) Déterminer un équivalent de W(x) lorsque x tend vers 0 et un équivalent de W(x) lorsque x tend vers $+\infty$.
   d) Tracer les courbes représentatives de f et W.
3. Montrer rapidement que la restriction de f à $]-\infty, -1[$ réalise une bijection sur un intervalle J′ qu'on déterminera. On note V la réciproque de cette bijection.
4. Soit m, un réel.
   a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x\mathrm{e}^x = m$.
   Exprimer, lorsqu'elles existent, ces solutions à l'aide des fonctions W et V.
   b) Soient a, b deux réels non nuls. Soit l'équation $\mathrm{e}^{ax} + bx = 0$. Déterminer le nombre de solutions de cette équation en fonction de a et b. Exprimer, lorsqu'elles existent, ces solutions à l'aide des fonctions W et V.
5. Soit $x \in]-1/\mathrm{e}; 0[$. On définit la suite w par

$$w_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = x\mathrm{e}^{-w_n}.$$

   a) Si la suite w est convergente, exprimer la limite à l'aide de la fonction V.
   b) Donner un programme Python qui prend en argument n et renvoie w_n.

Exercice 10. ✦✦✦ Suites adjacentes — *D'après HEC 2000*

Dans ce qui suit on suppose que K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit M un majorant de K et a un élément de K. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = \mathrm{M} \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{cases} \left(\frac{u_n+v_n}{2}, v_n\right) & \text{si } \frac{u_n+v_n}{2} \text{ ne majore pas K} \\ \left(u_n, \frac{u_n+v_n}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $K = [0,1[\cup[3,4[$, $a = 0$ et que $M = 10$. Déterminer (u_n, v_n) pour tout entier n appartenant à $\{1,2,3,4\}$.
2. On revient désormais au cas général.
   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$.
   b) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un réel b.
   c) Montrer que pour tout entier positif n, v_n est un majorant de K, puis que b majore K.
   d) Montrer qu'il existe une suite d'éléments de K qui converge vers b.
   e) On suppose que b' est un majorant de K.
      → Montrer que $b' \geqslant b$.
      → En déduire que b ne dépend pas des choix initiaux de a et M pourvu que a appartienne à K et que M majore K.

Exercice 11. ✦✦ **Recherche d'extremum par dichotomie**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que f est strictement convexe, c'est-à-dire : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$, pour tout $\lambda \in]0,1[$,

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

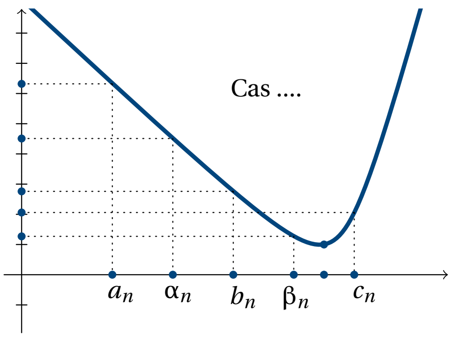
On suppose que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, atteint en un point α.

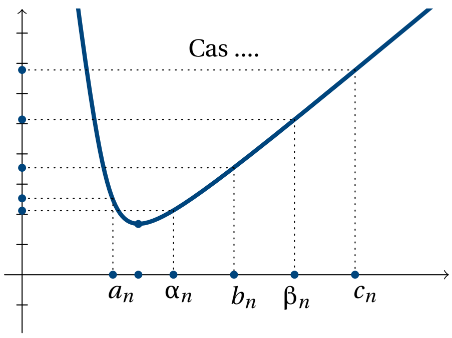
1. Justifier que le minimum de f n'est atteint qu'en α.
2. On définit trois suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) par récurrence :
   → On choisit des réels a_0, c_0 tels que $a_0 < c_0$ et tels qu'en posant $b_0 = \dfrac{a_0 + c_0}{2}$, on ait $f(b_0) \leqslant f(a_0)$, $f(b_0) \leqslant f(c_0)$.
   → Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsqu'on a construit a_n, b_n, c_n, on pose

   $$\alpha_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \beta_n = \frac{b_n + c_n}{2}$$

   et on considère trois cas :
   - Cas 1 : si $f(\alpha_n) < f(b_n)$, on pose $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \alpha_n$ et $c_{n+1} = b_n$;
   - Cas 2 : si $f(\alpha_n) \geqslant f(b_n)$ et $f(\beta_n) < f(b_n)$, on pose $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = \beta_n$ et $c_{n+1} = c_n$;
   - Cas 3 : sinon, on pose $a_{n+1} = \alpha_n$, $b_{n+1} = b_n$ et $c_{n+1} = \beta_n$.

   Dans chacun des graphes suivants, préciser dans quel cas l'on se situe.





3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < c_n$, $b_n = \dfrac{a_n + c_n}{2}$ et $f(b_n) \leqslant f(a_n)$ et $f(b_n) \leqslant f(c_n)$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant \alpha \leqslant c_n$.
5. Justifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, et qu'elles convergent vers α.
6. Écrivons un programme Python afin d'étudier $f : x \mapsto e^{2x} + e^{-x} + 2x$.
   On vérifie que f est continue, strictement convexe, et admet un unique minimum atteint en α.
   a) Écrire un programme Python suivant qui définit la fonction f.
   b) En déduire une seconde fonction qui prend en arguments a_0, c_0 et un nombre $\varepsilon > 0$, et qui renvoie une approximation de α à ε près.

Thème : Révisions de première année
Algèbre

Exercice 12. ✦ ✎ **Sommes de projecteurs**

1. Soient $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E. On définit la trace de φ par

$$\mathrm{Tr}(\varphi) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\right).$$

Justifier que la trace de φ ne dépend pas du choix de la base.

2. **a)** Soit p un projecteur de E, démontrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

b) En déduire que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.

c) Soit s un endomorphisme de E. Montrer que si s est une somme finie de projecteurs p_i, avec $i \in [\![1, m]\!]$, alors

$$\mathrm{Tr}(s) \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(s) \geqslant \mathrm{rg}(s).$$

≫ *Pour aller plus loin, voir exercice 3, EDHEC 2020*

Exercice 13. ✦ **Endomorphisme sur un espace fonctionnel**
Dans la suite, on définit les fonctions sinus et cosinus hyperbolique par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Soient $\mathrm{E} = \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$ et d l'endomorphisme de E : $\mathrm{d}(f) = f'$ (dérivation).

1. Donner la dimension de F. Démontrer que F est stable par d. On note φ l'endomorphisme de F induit par d.

2. Écrire la matrice M de φ dans une base bien choisie de F. Calculer M^{n} pour tout naturel n.

3. Démontrer que φ est un endomorphisme bijectif de F et calculer M^{-1}.

Exercice 14. ✦✦ ✎ **Noyaux itérés et décomposition de Fitting**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^{*}$. Démontrer que $\ker\left(f^{k}\right) \subset \ker\left(f^{k+1}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right) \subset \mathrm{Im}\left(f^{k}\right)$.

2. **a)** Démontrer que si $\ker\left(f^{k}\right) = \ker\left(f^{k+1}\right)$, alors $\ker\left(f^{k+1}\right) = \ker\left(f^{k+2}\right)$.

b) Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :
- si $k < p$, alors $\ker\left(f^{k}\right) \neq \ker\left(f^{k+1}\right)$;
- si $k \geqslant p$, alors $\ker\left(f^{k}\right) = \ker\left(f^{k+1}\right)$.

c) Démontrer que $p \leqslant n$.

3. Démontrer que si $k < p$, alors $\mathrm{Im}\left(f^{k}\right) \neq \mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right)$ et si $k \geqslant p$, alors $\mathrm{Im}\left(f^{k}\right) = \mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right)$.

4. En déduire que

$$\ker\left(f^{p}\right) \oplus \mathrm{Im}\left(f^{p}\right) = \mathrm{E}.$$

5. ✦✦✦ *facultatif*
Démontrer qu'il existe deux sous-espaces F et G de E tels que F et G sont supplémentaires, la restriction de f à F, notée $f_{|\mathrm{F}}$, est nilpotent et la restriction de f à G, notée $f_{|\mathrm{G}}$, induit un isomorphisme de G.

6. Soit $d_k = \dim\left(\mathrm{Im}\left(f^{k}\right)\right)$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
On pourra introduire l'application

$$g_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}\, f^{k} & \longrightarrow & \mathrm{Im}\, f^{k} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

et établir : $$d_{k+1} - d_k = \dim \ker f \cap \mathrm{Im}\, f^{k}.$$

Thème : Révisions Probabilités

Exercice 15. ✦✦✦ On dispose d'une pièce de monnaie équilibrée. Les faces sont numérotées 0 et 1. On lance indéfiniment la pièce de monnaie et on note X_i le résultat du i-ème lancer. On se fixe une séquence $s = (s_1, s_2, \cdots, s_k) \in \{0,1\}^k$ de longueur k. On veut montrer que cette séquence apparaît dans la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une infinité de fois avec une probabilité de 1.

On définit les événements :

- A : « La suite s apparaît une infinité de fois » ;
- pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i : « La suite s apparaît au moins une fois à partir du $(k \times i + 1)$-ième lancer ;
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, $B_j = \bigcap\limits_{m=1}^{k} [X_{kj+m} = s_m]$.

1. Justifier que $A = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$.

Indication. On pourra raisonner par double inclusion sur les complémentaires.

2. En déduire $\mathbf{P}(A) = \lim\limits_{i\to+\infty} \mathbf{P}(A_i)$.

3. Montrer que $\bigcup\limits_{j=i}^{+\infty} B_j \subset A_i$.

4. Soit $i \in \mathbb{N}$, on pose $C_i = \bigcup\limits_{j=i}^{+\infty} B_j$. On veut montrer que $\mathbf{P}(C_i) = 1$.

- **a)** Montrer que les événements $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants.
- **b)** Déterminer, pour $n \geqslant i$, $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{j=i}^{n} \overline{B_j}\right)$.
- **c)** En déduire que $\mathbf{P}(C_i) = 1$

5. Montrer que la séquence s apparaît dans la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une infinité de fois avec une probabilité de 1.

Exercice 16. ✦✦✦ **Exemple de convergence presque-sûr** *Oral ESCP 2022, sujet 37*

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\lambda_n = \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n^2}$.

1. **a)** Déterminer un équivalent de $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En déduire que la série de terme général λ_n converge.

2. Dans la suite de l'exercice, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur cet espace, indépendantes et telles que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre λ_n.

- **a)** Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(X_n \neq 0)$ converge.
- **b)** Soit $(E_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(E_i).$$
- **c)** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\geqslant N} [X_n \neq 0]\right) = 0$.
- **d)** En déduire que $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{N\geqslant 1}\left(\bigcap\limits_{n\geqslant N} [X_n = 0]\right)\right) = 1$.
- **e)** On note $B = \left\{\omega \in \Omega \mid \sum\limits_{n\geqslant 1} X_n(\omega) \text{ converge}\right\}$.
  Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} X_n$ converge presque sûrement, c'est-à-dire que $\mathbf{P}(B) = 1$.

On suppose désormais que $B = \Omega$. Ainsi la fonction $S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} X_k$ est définie sur Ω. On admet que c'est une variable aléatoire.

3. Déterminer la limite en loi de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ avec $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

4. Déterminer la limite en probabilité de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

Thème : Séries à paramètre

Exercice 17. ✦✦ *d'après EMLyon 2005*

PARTIE I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

On admet dans la suite que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, \pi]$:

$$\sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

On calcule classiquement cette somme par les nombres complexes (hors-programme). On peut aussi faire une récurrence (voir dernière partie).

2. Soit $u : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$.
Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $\displaystyle\int_0^{\pi} u(t) \sin(\lambda t)\, \mathrm{d}t \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Soit l'application $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \frac{t}{2}}$ si $t \in]0, \pi]$ et $f(0) = -1$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$

4. **a)** Montrer : $m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2}\, \mathrm{d}t$.

b) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

✎ PARTIE II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1. **a)** Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n+x)^2 (n+y)}$ convergent.

b) Montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ converge.

On note S l'application définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

2. Calculer $\mathrm{S}(0)$ et $\mathrm{S}(1)$.

3. **a)** Établir : $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, \quad \mathrm{S}(y) - \mathrm{S}(x) = (y - x) \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

b) En déduire : $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, \quad |\mathrm{S}(y) - \mathrm{S}(x)| \leqslant \dfrac{\pi^2}{6} |y - x|$.

c) Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0, +\infty[$.

4. **a)** Montrer, pour tout couple (x, y) de $[0, +\infty[^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{\mathrm{S}(y) - \mathrm{S}(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leqslant |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

b) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

c) Préciser les valeurs de $\mathrm{S}'(0)$ et $\mathrm{S}'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \mathrm{S}''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}.$$

Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé. On note ω la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\forall t \in [1,+\infty[, \quad \omega(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \omega(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \omega(n)$, et en déduire : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

c) Conclure que $\mathrm{S}(x)$ équivaut à $\ln x$ en $+\infty$.

7. **a)** Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

b) Tracer l'allure de la courbe représentative de S.

PARTIE III : facultatif, preuve du résultat admis

1. **a)** Justifier que pour tous réels a et b,

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin(\theta) \sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta) = \sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\mathrm{C}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)^2.$$

L'énoncé suivant donne une généralisation à la partie II.

Exercice 18. ✦✦ **Interversion somme/dérivation**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I telle que f_n'' soit bornée sur I, et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{M}_n = \sup_{x \in \mathrm{I}} \left| f_n''(x) \right|.$$

On suppose que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, les séries $\sum f_n(x)$, $\sum f_n'(x)$ et $\sum \mathrm{M}_n$, convergent, et on note, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{M}_n.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, tous réels x, h tels que $x \in \mathrm{I}$, $x+h \in \mathrm{I}$, on a

$$\left| f_k(x+h) - f_k(x) - h f_k'(x) \right| \leqslant \mathrm{M}_k \frac{h^2}{2}.$$

2. En déduire que pour tous réels x, h tels que $x \in \mathrm{I}$, $x+h \in \mathrm{I}$, on a

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \right| \leqslant \mathrm{M}\frac{|h|}{2}.$$

3. Conclure en montrant que f est dérivable et pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

Thème : Produits de Cauchy

Exercice 19. ✦ ✎ **Extrait : problème EDHEC 2020**

2) Dans cette question, x désigne un réel élément de $[0;1[$.

- **a)** Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0;x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

- **b)** En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

- **c)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

- **d)** Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).$$

3) On considère deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de sommes respectives $\mathrm{A} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\mathrm{B} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

- **a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{2n} c_k$.

- **b)** En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

- **c)** Soit x un réel élément de $[0;1[$.
  On suppose dans cette question que l'on a : $a_k = \frac{x^k}{k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) et $b_k = x^k$ ($k \in \mathbb{N}$).
  i) Justifier rapidement que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et à termes positifs.
  ii) écrire une fonction python qui prend en argument n et calcule la valeur de c_n.
  iii) Donner l'expression de c_n sous forme de somme.

  On désigne toujours par x un réel de $[0;1[$.

4) a) Utiliser la première question du préliminaire pour établir que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

.

To be continued...

Exercice 20. ✦✦✦ **Estimation en variation totale**

Dans la suite, on admet ce résultat sur les produits de Cauchy :

- Pour deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
- Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors la séries $\sum c_n$ est aussi absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right).$$

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. De plus, pour X, Y deux variables aléatoires, on pose

$$d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\mathbf{P}([\mathrm{X}=n]) - \mathbf{P}([\mathrm{Y}=n])\right|.$$

1. Soient $p \in [0,1]$, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(p)$.
Établir l'égalité $d(X,Y) = p\,(1 - e^{-p})$ et en déduire la majoration $d(X,Y) \leqslant p^2$.

2. **a)** Soient X, Y, Z, T quatre variables aléatoires. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$|\mathbf{P}(X+Y=k) - \mathbf{P}(Z+T=k)| \leqslant \sum_{i+j=k} \mathbf{P}(Y=j)\left|\mathbf{P}(X=i) - \mathbf{P}(Z=i)\right| + \sum_{i+j=k} \mathbf{P}(Z=i)\left|\mathbf{P}(Y=j) - \mathbf{P}(T=j)\right|.$$

   b) En déduire que $d(X+Y, Z+T) \leqslant d(X,Z) + d(Y,T)$.

3. **a)** Soient $U \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $S \hookrightarrow \mathscr{P}(np)$. Prouver l'inégalité $d\,(U,S) \leqslant np^2$.

   b) Retrouver le théorème de convergence en loi des loi de Poisson.

4. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_*^+$. En utilisant les résultats précédents, montrer que

$$d\,(X,Y) \leqslant |\lambda - \mu| \quad \text{si} \quad X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda), \quad Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu).$$

Indication. On pourra remarquer que si S, T *et* U *sont trois variables aléatoires,* $d(S,T) \leqslant d(S,U) + d(U,T)$.

Thème : Intégrales à paramètre

≫ ✦ Reprendre le problème 20 du chapitre 17.

Exercice 21. ✦✦ Un exemple d'intégrale de Frullani
Soit $(a,b) \in]0;+\infty[^2$.

1. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$ converge.
2. a) Établir, en utilisant des changements de variable, pour tout $(\varepsilon, X) \in]0;+\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$:

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}}{x}\,dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \quad \text{et} \quad \int_\varepsilon^X \frac{e^{-bx}}{x}\,dx = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy.$$

   b) En déduire, pour tout $(\varepsilon, X) \in]0;+\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$:

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$$

3. a) Montrer que l'application

$$h : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y) = \begin{cases} \frac{1-e^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

   est continue sur $[0;+\infty[$.

   b) En déduire : $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \ln\frac{b}{a}$.

   c) Établir : $\forall X \in]0;+\infty[,\quad \displaystyle\int_0^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$.

   d) En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$.
4. *Facultatif.* Adapter le raisonnement pour établir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(bx)-\arctan(ax)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

≫ ✦✦ On pourra aussi regarder EML 2004, voie S pour d'autres intégrales à paramètres.

Exercice 22. ✦✦✦ ✎ Transformée de Laplace *d'après HEC 2002*
Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbf{P})$ et à valeurs réelles.

Partie I : Définition de l'application L

On note E l'ensemble des fonctions f réelles définies, continues sur $[0,+\infty[$ et telles que, pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$ converge absolument.

1. a) Vérifier que E est un espace vectoriel réel.

   b) Vérifier que E contient les fonctions continues et bornées sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout élément f de E on note $L(f)$ la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt.$$

   a) Vérifier que L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

   b) Pour tout réel λ positif ou nul, on note ε_λ la fonction réelle définie par $\varepsilon_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$ pour tout réel t positif ou nul. Vérifier que, pour tout réel λ positif ou nul, la fonction ε_λ est dans E et, pour tout réel x strictement positif, calculer $L(\varepsilon_\lambda)(x)$.

c) Montrer que, pour tout réel λ positif ou nul et toute fonction f de E, la fonction $\varepsilon_\lambda f$ est aussi dans E et vérifie, pour tout réel x strictement positif, l'égalité : $\mathrm{L}\left(\varepsilon_\lambda f\right)(x) = \mathrm{L}(f)(x+\lambda)$.

3. On considère une fonction H élément de E, de classe $\mathscr{C}^1$, croissante et bornée sur $[0,+\infty[$. Montrer que la fonction H' est aussi dans E et, pour tout réel x strictement positif, justifier l'égalité :

$$\mathrm{L}\left(\mathrm{H}'\right)(x) = -\mathrm{H}(0) + x\mathrm{L}(\mathrm{H})(x)$$

4. Soit une fonction f élément de E. Pour tout entier naturel n, montrer que la fonction qui à tout réel t positif ou nul associe $t^n f(t)$ est aussi élément de E.

Partie II : Dérivabilité de la fonction $\mathrm{L}(f)$

Dans toute cette partie, on considère un réel x strictement positif et une fonction f élément de E.

1. Soit h un réel non nul vérifiant l'inégalité $|h| < \frac{x}{2}$.

a) Pour tout réel t strictement positif, justifier l'inégalité :

$$\left|\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt} + ht\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \frac{h^2t^2}{2}\mathrm{e}^{-xt/2}.$$

b) Pour tout réel T strictement positif, justifier l'inégalité :

$$\left|\int_0^{\mathrm{T}} \left(\frac{\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt}}{h} f(t) + t\mathrm{e}^{-xt} f(t)\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 \left|f(t)\right| \mathrm{e}^{-xt/2}\,\mathrm{d}t.$$

c) En déduire que $\mathrm{L}(f)$ est dérivable en x et que son nombre dérivé en x vaut :

$$\left(\mathrm{L}(f)\right)'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

d) Montrer que la fonction $\mathrm{L}(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout entier naturel k, donner à l'aide d'une intégrale la valeur de la dérivée k-ième de $\mathrm{L}(f)$ en x.
On note $\mathrm{L}(f)^{(k)}$, *la dérivée k-ième de* $\mathrm{L}(f)$.

Remarque. Si on définit la fonction de deux variables $g : (x,t) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-xt}$, alors on vient de justifier l'interversion

$$\partial_1 \int_0^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \partial_1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$$

avec un abus de notation dans le premier membre. Cette relation n'est pas toujours vraie.. il convient donc d'être prudent.

Partie III : Injectivité de l'application $\mathrm{L} : f \mapsto \mathrm{L}(f)$

Dans toute cette partie, on considère un réel x strictement positif et une fonction f continue et bornée sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Ainsi f est élément de E.

1. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre égal à $\frac{1}{x}$. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

a) Donner une densité de la variable aléatoire S_n.

b) Donner une densité, qu'on notera φ_n, de la variable aléatoire $\frac{\mathrm{S}_n}{n}$.

2. **a)** Soit α un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right| > \alpha\right]\right) = 0$$

b) En utilisant la continuité de la fonction f en x, pour tout réel ε strictement positif, justifier l'existence d'un réel α strictement positif tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\left[\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right] \subset \left[\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right| > \alpha\right]$$

c) Soit ε un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|>\varepsilon\right]\right)=0$$

3. On note M un majorant de $|f|$ sur $[0,+\infty[$.

a) Soit ε un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n, on note A_n l'événement :

$$A_n=\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon\right]$$

et $\mathbf{1}_{A_n}$ son indicatrice[1]. Justifier l'inégalité suivante entre variables aléatoires :

$$\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon\mathbf{1}_{A_n}+2M\left(1-\mathbf{1}_{A_n}\right).$$

b) Que vaut $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_n})$? En déduire l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)=f(x)$$

4. **a)** Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n-1)!x^n}\int_0^{+\infty}t^{n-1}f(t)\mathrm{e}^{-nt/x}\,\mathrm{d}t$$

puis l'égalité

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n}\left(L(f)\right)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right).$$

b) Montrer que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0,+\infty[$ vérifient $L(f)=L(g)$ alors f et g sont égales.

c) Montrer, plus précisément, que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0,+\infty[$ vérifient $L(f)(x)=L(g)(x)$ seulement pour tout x dans $]a,+\infty[$ (où a est positif ou nul) alors f et g sont encore égales.

≫ *Voir aussi ESSEC 2010 pour une autre utilisation de la transformée de Laplace. La transformée de Laplace a de nombreux avantages, elle est notamment utilisée en sciences industrielles pour la résolution des équations différentielles linéaires.*

1. Pour rappel, pour tout $\omega\in\Omega$, $\mathbf{1}_{A_n}(\omega)=1$ si $\omega\in A_n$ et 0 sinon.

Thème : Comparaison série/intégrale

Exercice 23. ✦ ✎

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\ln(n+1) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n)+1$.
2. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 24. ✦ ✎ **Équivalent des sommes partielles d'une série divergente**
L'objectif est de prouver la divergence de la série $\sum_{k\geqslant 3} \frac{1}{k\ln k}$ et de déterminer un équivalent des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t\ln t}$.
2. **a)** Montrer que pour tout $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{k\ln k}$.

   b) En déduire, pour tout $k \geqslant 3$,
$$\int_3^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \int_3^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant S_n \leqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$
3. Calculer, pour tous a, b réels strictement supérieurs à 1 : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
4. **a)** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln k}$ diverge.

   b) Utiliser la question 2.(b) pour trouver un équivalent de S_n.

Exercice 25. ✦✦✦ *Oral ESCP 2001, n°9*

1. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

   a) Montrer que f est positive et tend vers 0 en $+\infty$.

   b) Montrer que, pour tout réel $h > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$:
$$h\sum_{n=1}^{N} f(nh) \leqslant \int_0^{Nh} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant h\sum_{n=0}^{N-1} f(nh).$$

   c) En déduire que, pour tout réel $h > 0$, la série de terme général $f(nh)$ converge et que :
$$-hf(0) + h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh).$$

   d) Montrer que, quand h tend vers 0 par valeurs supérieures :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. **a)** Montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} t^{n^2}$ converge pour tout réel $t \in]-1,1[$.

   b) Montrer que, quand t tend vers 1 par valeurs inférieures,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-t}}.$$

Thème : Inégalités et optimisation

Exercice 26. ✧ ✎ Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ n réels. Justifier que $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)$.

Exercice 27. ✎ **Inégalité arithmético-géométrique**
Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ n réels strictement positifs. On pose :

$$\mathrm{M}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \mathrm{G}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/a_i}.$$

On propose de montrer de plusieurs manières que :

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant \mathrm{M}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \qquad \text{(IAG)}$$

1. ✧ *Par convexité.*
Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}_*^+$. On pose $m = \mathrm{M}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

a) Justifier que pour tout x strictement positif, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{m} - 1\right) = 0$.

c) En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{a_i}{m}\right) \leqslant 0$, puis conclure en montrant (IAG).

d) En utilisant $\mathrm{M}(1/a_1, 1/a_2, \cdots, 1/a_n)$, justifier que $\mathrm{H}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant \mathrm{G}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

2. ✦ *Par l'inégalité de Jensen.*
On rappelle que si une fonction f est concave sur un intervalle I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\forall\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathrm{I}^n, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

3. ✦✦ *Via de l'optimisation sous contrainte*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathscr{K} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n \mid \mathrm{M}(x_1, \ldots, x_n) = 1\right\}$.

a) Déterminer les points critiques de G sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ sous la contrainte $\mathrm{M}(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

b) Montrer que G possède un maximum sur $\mathscr{K}$ et que celui-ci est atteint sur $\mathscr{K} \cap \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$.

c) En déduire (IAG).

d) Adapter la démarche pour établir que $\mathrm{H}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant \mathrm{G}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

Exercice 28. ✦✦✦ **Inégalité de Carleman** *d'après EDHEC 2012*
On admet le lemme de Cesaro : si une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ, alors on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$.
Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge.
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \mathrm{T}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{S}_k \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i x_i.$$

1. **a)** Montrer que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)x_i$.

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = \mathrm{T}_n$.

b) En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$.

2. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$. On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \mathrm{e} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$.

a) On rappelle que si une fonction f est concave sur un intervalle I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathrm{I}^n, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n} k x_k\right)^{1/n}$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n \leqslant \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n.$$

c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

e) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.
Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout k élément de $[\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

b) Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}, \quad -1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}.$$

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$, puis établir que :

$$\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{n}.$$

4. On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leurs sommes partielles d'ordre m sont équivalentes lorsque m est au voisinage de $+\infty$. Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ particulière que l'on note $(x_n(\mathrm{N}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$x_n(\mathrm{N}) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in [\![1, \mathrm{N}]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose, comme à la deuxième question : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n(\mathrm{N}) = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k(\mathrm{N})\right)^{1/n}$.

a) Écrire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n(\mathrm{N})$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n(\mathrm{N})$ sous forme de sommes finies.

b) En déduire que $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n(\mathrm{N})}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n(\mathrm{N})} = \mathrm{e}$.

5. Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Thème : Séries entières

Exercice 29. ✦✦ ✎ **Unicité de développement en série entière**

Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$, deux séries absolument convergentes

1. Justifier que pour tout $x \in [-1,1]$, les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont absolument convergentes.
2. On pose
$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$
Vérifier que pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k x^k + o_0(x^{\mathrm{N}})$.
3. En déduire que si $f = g$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.

Exercice 30. ✦✦ **Exemple avec la suite de Fibonacci**

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série à termes strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_n$ converge vers un réel ℓ tel que $\ell < 1$.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.
On considère la suite (f_n) définie par : $f_0 = 1, f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.
2. Montrer que la suite (f_n) est à valeurs strictement positives.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$.
   a) Expliciter une fonction rationnelle φ telle que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
   b) Déterminer le sens de variation de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. **a)** Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes. Déterminer leurs limites respectives.
   b) En déduire que (u_n) converge vers $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
5. Pour tout réel x, pour lequel la série de terme général $f_n x^n$ converge, on pose $\mathrm{A}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. On pose $\mathrm{R} = \frac{1}{\Phi}$.
   a) Montrer que pour tout x de $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$, la série définissant $\mathrm{A}(x)$ est absolument convergente.
   b) On pose, pour tout x de $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$:
$$\mathrm{A}_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2}, \quad \mathrm{A}_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^{n+2} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} x^{n+2}.$$
   Exprimer $\mathrm{A}_0(x), \mathrm{A}_1(x)$ et $\mathrm{A}_2(x)$ en fonction de $\mathrm{A}(x)$ pour tout x de $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$.
   c) En déduire $\mathrm{A}(x)$ en fonction de x pour tout x de $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$.

Thème : Matrices classiques

Exercice 31. ✦✦ ✎ **Matrice de rang 1**
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$.

1. Montrer que $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes non nulles U, V telles que $\mathrm{M} = \mathrm{U}\,{}^t\mathrm{V}$.
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{U}\,{}^t\mathrm{V}$ et on note $a = \mathrm{Tr}(\mathrm{A})$.
   a) Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
   b) Montrer : ${}^t\mathrm{V}\mathrm{U} = (a)$, puis : $\mathrm{A}^2 = a\mathrm{A}$.
   c) Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   d) On suppose $a \neq 0$. Calculer AU. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.
   e) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 32. ✦ **Matrice de Vandermonde - Lien avec les polynômes de Lagrange**
Soit $a = (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$. On pose

$$\mathrm{V}_a = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & {a_0}^2 & \dots & {a_0}^n \\ 1 & a_1 & {a_1}^2 & \dots & {a_1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \dots & {a_n}^n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Notons $\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n$, les $n+1$ colonnes de A. À quelle condition sur les réels a_0, a_1, …, a_n les colonnes de A forment une famille libre ? En déduire une condition pour l'inversibilité de A.
   On suppose cette condition vérifiée dans la suite.
   Notons $\mathscr{B} = (1, x, \dots, x^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et $(e_0, \dots, e_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Montrer que l'application suivante est un isomorphisme
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathrm{P} & \mapsto & \big(\mathrm{P}(a_0), \dots, \mathrm{P}(a_n)\big). \end{array} \right.$$
3. Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on définit le polynôme $\mathrm{L}_i = \varphi^{-1}(e_i)$. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et que
$$\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x], \qquad \mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(a_i)\,\mathrm{L}_i.$$
4. Préciser ${\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}}^{-1}$ où $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ désigne la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.

Exercice 33. ✦✦ ✎ **Matrice Compagnon**
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note id l'application identité de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On considère un n-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ et le polynôme :

$$\mathrm{P}(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

La matrice compagnon C du polynôme P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

1. Soit f, l'endomorphisme canoniquement associé à C.

a) Exprimer, pour tout $i \in [[1, n-1]]$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1}.

b) En déduire : $\forall j \in [[1, n-1]]$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \ldots + a_{n-1} e_n)$.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_1 f + a_0 \,\mathrm{id}$.

a) Vérifier : $g(e_1) = (0, \ldots, 0)$.

b) Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.

c) En déduire : $\forall i \in [[1, n]]$, $g(e_i) = (0, \ldots, 0)$.

d) Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f. Que dire des valeurs propres de C ?

e) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.

Matrice symétrique, matrice de Gram

Exercice 34. ✦ ✎ **Encadrement de Rayleigh**

Soient $n \in \mathbb{N}^*, S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On note α la plus petite valeur propre de S, et β la plus grande valeur propre de S. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique et de la norme associée $\|\cdot\|$.

Montrer : $\quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad a\|X\|^2 \leqslant {}^tXSX \leqslant \beta\|X\|^2$.

Exercice 35. ✦✦✦ ✎ Soit N un entier tel que $N \geqslant 2$. *D'après oraux 1.18 escp 2021*

1. Soient $a_1, \cdots, a_N \in \mathbb{R}$ tels que $(a_1, \cdots, a_N) \neq (0, \cdots, 0)$. On note $M = \left(m_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ la matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2, \quad m_{i,j} = a_i a_j.$$

a) Déterminer une matrice colonne A telle que $M = A^tA$.

b) Exprimer la trace de M en fonction de A et déterminer un polynôme annulateur de M de degré 2.

c) Déterminer le spectre de M. Montrer que nécessairement $\mathrm{tr}(M) > 0$.

2. Soit $(E, \langle\rangle)$, un espace euclidien de dimension N. Soit un entier $n \in [\![1, N]\!]$ et $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ une famille de n vecteurs non tous nuls de E. On note $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$ et $G = \left(g_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad g_{i,j} = \left\langle u_i, u_j \right\rangle$$

a) Montrer que si $\mathcal{F}$ est une famille liée alors G n'est pas inversible.

On suppose dans la suite du problème que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de F. On note $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la colonne d'indice j est constituée des coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que

$$G = {}^tPP$$

puis que le rang de G est égal à celui de la famille $\mathcal{F}$.

c) Montrer que toute valeur propre λ de G vérifie : $\quad 0 < \lambda \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$.

d) Soit $x \in E$ et $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Montrer que

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \quad \text{où} \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_n \ \text{ sont } n \text{ réels donnés par :} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} \langle u_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x\rangle \end{bmatrix}.$$

Exercice 36. ✦✦ **Matrice de Hilbert et python**

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on désigne par H_n la matrice de Hilbert d'ordre n définie par :

$$H_n = \left[\left(\frac{1}{j+k-1}\right)\right]_{1 \leqslant j,k \leqslant n} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Soit h_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H_n. On pose de plus la fonction $q_n : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$q_n(x) = \langle h_n(x), x\rangle$$

où $\langle,\rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

- Étude de q

1. Soit $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Vérifier que $q_n(x)=\displaystyle\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n}\frac{x_kx_j}{j+k-1}$.

2. Montrer que $q_n(x)=\displaystyle\int_0^1\left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}\right)^2\mathrm{d}t$.

3. Justifier que $q_n(x)\geqslant 0$ et que l'égalité $q_n(x)=0$ équivaut à $x=0$.

- Application à la réduction de H_n

4. Justifier que H_n est diagonalisable.

5. Pour tout entier $n\geqslant 2$, on note :

$$\mu_n=\min\left(\mathrm{Sp}\left(\mathrm{H}_n\right)\right)\quad\text{et}\quad\rho_n=\max\left(\mathrm{Sp}\left(\mathrm{H}_n\right)\right).$$

Expliciter μ_2 et ρ_2. Montrer que pour tout $n\geqslant 2$, on a $0<\mu_n<\rho_n$.

- Python - conjecture 1

6. Vérifier que H_n est une matrice inversible.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on note $h_{i,j}^{(-1,n)}$ le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n^{-1} et on désigne par s_n la somme des coefficients de la matrice H_n^{-1}, c'est-à-dire :

$$s_n=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}h_{i,j}^{(-1,n)}$$

7. Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie la matrice H_n, puis la matrice inverse ${\mathrm{H}_n}^{-1}$.

8. Comment obtenir la somme des coefficients d'une matrice A à l'aide de Python ?
En déduire un programme qui prend en argument n et renvoie s_n. Tester le programme, que peut-on conjecturer sur s_n ?

- Python - conjecture 2

9. Pour obtenir le spectre d'une matrice **A**, on importe la bibliothèque **numpy.linalg as al** et on exécute la commande **al.eigvals(A)**.
Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie ρ_n et ρ_n/μ_n. Conjecturer le comportement limite des suites $(\rho_k)_k$ et $(\rho_k/\mu_k)_k$.

10. Comment afficher les n premiers termes de la suite $(\rho_k)_k$?

Thème : Formes linéaires

Exercice 37. ✦✦ **Formes linéaires et formule de Simpson**

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, posons : $\varphi_1(P) = P(1), \quad \varphi_2(P) = P(0), \quad \varphi_3(P) = P(-1) \quad$ et $\quad \psi(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,dt.$

1. Justifier que φ_1 et ψ sont des formes linéaires de $\mathbb{R}_2[x]$. *On admet que φ_2 et φ_3 sont elles-aussi des formes linéaires.*
2. Justifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$.
3. **a)** Justifier l'existence de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$,

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \lambda_1 P(1) + \lambda_2 P(0) + \lambda_3 P(-1).$$

   b) Préciser les valeurs de λ_1, λ_2 et λ_3.
4. À l'aide d'une bijection affine, en déduire la **formule de Simpson** : pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[x]$

$$\int_a^b P(t)\,dt = \frac{b-a}{6}\left(P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b)\right).$$

Exercice 38. ✦✦ **Extraits EMLYON 2023**

Dans tout le problème, n est un entier supérienr ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n.

Notations et définition

- On note 0_E le vecteur nul de E.
- Lorsque F est un espace vectoriel on note $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.
- Une forme linéaire sur E est une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$.
- On note, dans ce problème, $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.
- Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de l'espace vectoriel E.

Lorsque F est un espace vectoriel de dimension finie, on admettra que la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$ est :

$$\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

On admettra aussi qu'une intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E. Enfin, on rappelle le théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut se compléter en une base de E.

Préliminaire

1. Justifier que les espaces vectoriels E et E^* ont la même dimension.
2. Soit φ un élément de E^*.
   a) Quelles sont les dimensions possibles pour l'image $\operatorname{Im}\varphi$ de φ ?
   b) En déduire que φ est soit nulle, soit surjective.
   c) On suppose que φ n'est pas l'application nulle. Démontrer que $\ker\varphi$ est un hyperplan de E.

...

Partie II - Hyperplans et formes linéaires

6. On a vu à la question 2c que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. Le but de cette question est de démontrer que tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Soit H un hyperplan de E.
   a) Soit $(\epsilon_1 \ldots, \epsilon_{n-1})$ une base de H. Justifier de l'existence d'un vecteur ϵ_n dans E tel que $\beta = (\epsilon_1, \ldots, e_n)$ soit une base de l'espace vectoriel E.

b) Soit φ l'élément de $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ défini par :

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{1,\dots,n-1\} \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}.$$

Justifier que cette définition est correcte et démontrer que $\ker\varphi = H$. Dans la suite de cette partie, on considère un entier $p \geqslant 2$ et une famille $(f_1,\dots,f_p)$ de formes linéaires sur E, ainsi que l'application :

$$f = \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x),\dots,f_p(x)) \end{array} \right).$$

On tiendra pour acquis que l'application f est linéaire.

7. Démontrer que : $\ker f = \bigcap_{i=1}^p \ker f_i$.

8. On suppose dans cette question que l'application f est surjective.

a) On note $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Justifier que ε_1 admet un antécédent x par f.

b) Démontrer que la famille $(f_1,\dots,f_p)$ est libre dans E^*.

9. On suppose dans cette question que l'application f n'est pas surjective.

a) Que peut-on dire de la dimension m de $\operatorname{Im} f$?

b) En complétant une base $(e_1,\dots,e_m)$ de $\operatorname{Im} f$ en une base de $\mathbb{R}^p$, démontrer que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$.

c) En déduire que la famille $(f_1 \dots, f_p)$ est liée dans E^* (on pourra utiliser la question 6).

10. On suppose dans cette question que la famille $(f_1,\dots,f_p)$ est libre dans l'espace vectoriel E^*.

a) Justifier que f est surjective.

b) Démontrer que : $\dim\left(\bigcap_{i=1}^p \ker f_i\right) = n - p$.

Exercice 39. ✦✦✦ ✎ **Dual d'un espace euclidien**

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, un espace euclidien. On note E^*, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Pour tout $u \in E$, on définit les applications Φ_u par :

$$\Phi_u : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle u, x\rangle. \end{cases}$$

1. Vérifier que pour tout $u \in E$, $\Phi_u \in E^*$.
On pose alors l'application $\Phi : E \to E^*$ définie par $\Phi(u) = \Phi_u$.

2. a) Vérifier que Φ est une application linéaire de E dans E^*.

b) Montrer que Φ est injective.

c) En déduire que pour tout $f \in E^*$, il existe $u \in E$ tel que $f = \Phi_u$.

- *Application*

3. Justifier que si f est une forme linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ alors il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad f(M) = \operatorname{Tr}(AM).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[x], \qquad \int_0^1 P_n(t)Q(t)\,dt = Q(0).$$

5. a) Justifier qu'il n'existe pas de polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ tel que : $\forall Q \in \mathbb{R}[x], \quad \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt = Q(0)$.
On pourra utiliser le polynôme défini par $Q(x) = xP(x)$.

b) Est-ce en contradiction avec la question 3 ?

Thème : Diagonalisation

Exercice 40. ✦✦ ✎ Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on définit $\Phi(P) = Q$, où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = P(x+2) - P(x+1).$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.
3. Simplifier Φ^{n+1} et $\Phi^n(x^n)$. En déduire une base dans laquelle la matrice de Φ est triangulaire inférieure avec la deuxième diagonale composée uniquement de 1.
4. Montrer que $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[x]} - \Phi)$ est un automorphisme et donner son application réciproque.

Exercice 41. ✦✦ **Exemple en dimension infinie**
On note E l'espace vectoriel réel des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ définies sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'application φ de E dans E par :

$$\varphi(f) = g \quad \text{où} \quad \forall x \in]0;+\infty[, \quad g(x) = x f'(x).$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Est-il injectif ? Préciser le noyau de φ. Est-il surjectif ?
3. Déterminer le spectre de φ.
   On pourra étudier $h : x \mapsto x^{-\lambda} f(x)$ où f est une fonction propre associée à la valeur propre λ.

Exercice 42. ✦✦ *d'après Oraux ESCP 2001, n17*
Soient A et B les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser dans une base orthonormée.
2. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales.
3. Soit F l'application définie sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par, pour tout $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$F : X \mapsto AX - XB.$$

   a) Montrer que l'application F est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   b) Soit U un vecteur colonne propre de A et V un vecteur colonne propre de B. Calculer $F\left(U\,{}^tV\right)$.
   c) F est-elle un automorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
   d) F est-elle diagonalisable ?

Exercice 43. ✦✦ ✎ **Partie I : Étude du polynôme minimal**

- *Préliminaires - propriété du polynôme minimal*
  Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. En considérant la famille $(I_n, M, M^2, \ldots, M^p)$ pour un entier p bien choisi, justifier l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(M) = 0_n$.

   On appelle polynôme minimal de M un polynôme π de $\mathbb{R}[x]$ de coefficient dominant 1, tel que $\pi(M) = 0$ et pour tout P, $P \in \mathbb{R}[x]$, non nul, vérifiant $P(M) = 0_n$, on a π divise P. Grâce à la question précédente, on montre qu'un tel polynôme existe. De plus, on montre que le degré de π est le minimum des degrés des polynômes annulateurs de M non nuls.
2. Justifier l'unicité du polynôme minimal de M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Dans la suite, on le note π_M.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si λ est une racine de π_M, alors λ est une valeur propre de M.
   On pourra commencer par écrire $\pi_M(x) = (x-\lambda)Q(x)$ et raisonner par l'absurde.

- *Exemple de polynôme minimal - informatique*

4. On considère la matrice
$$M = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

À l'aide du code Python suivant, donner le polynôme minimal pour M. Justifier.

Editeur

```python
import numpy as np

M=np.array
    ([[7,10,0],[-3,-4,0],[0,0,2]])

print(np.dot(M,M)-3*M)
```

Console

```
[[-2  0  0]
 [ 0 -2  0]
 [ 0  0 -2]]
```

- *Polynôme minimal d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n valeurs propres*

On se place pour la prochaine question dans le cas où M admet exactement n valeurs propres distinctes.

5. **a)** À l'aide de la formule de changement de base, montrer que M est semblable à une matrice diagonale D.

b) En déduire que
$$\pi_M = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (x-\lambda).$$

Partie II : application à une variante du crochet de Lie

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad f(M) = AM - MB.$$
On suppose de plus que A a exactement n valeurs propres distinctes.

- *On suppose dans cette question et la suivante que* A *et* B *ont une valeur propre commune notée* λ.

6. Justifier l'existence de Y et Z, deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que
$$AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad {}^tBZ = \lambda Z.$$

7. **a)** Prouver que Y^tZ est un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Simplifier $f\left(Y^tZ\right)$. En déduire que f n'est pas un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- *On suppose dans les trois prochaines questions que f n'est pas un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

8. **a)** Justifier qu'il existe $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que : $f(M_0) = 0_n$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, prouver que : $A^kM_0 = M_0B^k$. En déduire que pour tout polynôme P, on a :
$$P(A)M_0 = M_0P(B).$$

9. Soit π_A le polynôme minimal de A. Que peut-on dire de $\pi_A(A)$? En déduire que $\pi_A(B)$ n'est pas inversible.

10. Dans cette question, on veut montrer que A et B ont une valeur propre commune. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant donc que A et B n'ont aucune valeur propre en commun. D'après la question 33, le polynôme π_A peut se factoriser sous la forme
$$\pi_A(x) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (x-\lambda).$$

a) Que dire de l'inversibilité des matrices $(B-\lambda I_n)$?

b) Conclure.

11. Démontrer que f est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre en commun.

12. **a)** Montrer que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $(f - \mu\, \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})(M) = (A-\mu I)M - MB$.

b) En déduire que μ est une valeur propre de f si et seulement si, il existe α valeur propre de A et β valeur propre de B telles que :
$$\mu = \alpha - \beta.$$

Thème : Polynômes orthogonaux

≫ ✦✦ *Voir les polynômes de Tchebychev de seconde espèce, EML 2005*

Exercice 44. ✦✦ ✎ **Un exemple**
On pose $A(x) = x^2 - 1$, $B(x) = 2x$.

1. *Préliminaires* On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ définie par :

$$\Phi(P) = AP'' + BP'.$$

a) Montrer que, pour tout entier n, la restriction, notée Φ_n de Φ à $\mathbb{R}_n[x]$, définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Montrer brièvement que :

$$(P, Q) \mapsto \langle P(x), Q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$. Vérifier que $\langle xP(x), Q(x)\rangle = \langle P(x), xQ(x)\rangle$.

2. a) Justifier que l'endomorphisme Φ_n est symétrique.

b) Écrire la matrice de $\Phi_n : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ dans la base canonique $(1, x, \cdots, x^n)$ et en déduire les valeurs propres de Φ_n.

c) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(P_0, \cdots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de Φ_n unitaires tels que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

d) Est-ce que cette base est unique ?

e) Montrer que si $i \neq k$ alors $\langle P_i, P_k\rangle = 0$. En déduire que P_n est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

f) Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3, puis déterminer leurs racines.

≫ ✦✦✦ *Reprendre le DS 4 de cette année sur les polynômes de Laguerre et de Hermite.*

Thème : Projection et minimisation par projection orthogonale

Exercice 45. ✦

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que f est un projecteur orthogonal dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 46. ✦

Soit f un endomorphisme d'une espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que f est un projecteur si et seulement si f est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0;1\}$.

Exercice 47. ✦✦ *d'après EDHEC 1999*

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions réelles $f_0, f_1, \dots, f_n$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_0(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_k(x) = x^k \mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle E_n l'espace vectoriel engendré par la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$. On note d l'application qui à toute fonction de E_n associe sa fonction dérivée.

Partie 1

1. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une base de E_n.
2. a) Calculer $d(f_0)$, puis montrer que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $d(f_k) = k f_{k-1} - f_k$.
   b) Montrer que d est un endomorphisme de E_n.
3. a) Vérifier que d est un automorphisme de E_n (c'est-à-dire un endomorphisme bijectif).
   b) Justifier que :
   $$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad d\left(\frac{1}{k!} f_k\right) = \frac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \frac{1}{k!} f_k.$$
   c) En déduire, pour tout j de $[\![0,n]\!]$, l'expression de $d^{-1}(f_j)$ dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$.
4. Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout entier naturel j, l'intégrale
   $$\mathrm{I}_j = \int_0^{+\infty} x^j \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$
   converge, puis donner sa valeur en fonction de j.
5. Montrer que l'application qui à tout couple (f,g) de E_n associe :
   $$\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x) g(x) \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$$
   est un produit scalaire sur E_n.
   Pour tout f de E_n, on note désormais $\|f\|$ la norme de f.

Partie 2

1. On pose $\mathrm{E}_{n-1} = \mathrm{vect}(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$.
   a) Rappeler le théorème qui assure l'existence d'un unique élément h de E_{n-1} vérifiant :
   $$\|f_n - h\| = \inf_{g \in \mathrm{E}_{n-1}} \|f_n - g\|.$$
   On pose désormais $h = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j f_j$.

b) Pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, rappeler pourquoi $f_n - h \perp f_k$.

c) En déduire que pour tout k élément de $[\![0, n-1]\!]$: $\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j(j+k)! + (k+n)! = 0$.

2. On considère la fonction P définie pour tout x réel par :

$$\mathrm{P}(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x+1)\dots(x+j) + (x+1)(x+2)\dots(x+n).$$

a) Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathrm{P}(k) = 0$.

b) En déduire explicitement P, puis vérifier que $\mathrm{P}(n) = n!$.

3. **a)** Montrer que $\|f_n - h\|^2 = \langle f_n - h, f_n\rangle$.

b) En déduire la valeur de $m = \inf\limits_{(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k\right)^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 48. ✦✦✦ **Loi du khi deux et algèbre** *D'après l'oral de l'ESCP*

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

a) Reconnaître la loi de $\mathrm{X}^2/2$, en déduire la loi de $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{X}_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée réduite et $\mathrm{Y}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} {\mathrm{X}_i}^2$. Déterminer la loi de Y_n ainsi que son espérance et sa variance sous réserve d'existence.
On dit que Y_n suit une loi du khi deux à n degrés de liberté.

2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que f est un projecteur orthogonal dont on précisera les éléments caractéristiques.

3. Un point M, extrémité d'un vecteur V, se déplace de façon aléatoire dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.
Les coordonnées $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$ de M sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi normale centrée réduite.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $\|\mathrm{V}\|^2$?

b) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. On note D la variable aléatoire égale au minimum de la distance de M au plan $\mathscr{P}$. C'est-à-dire,

$$\mathrm{D} = \min_{\mathrm{V}'\in\mathscr{P}} \|\mathrm{V} - \mathrm{V}'\|.$$

Vérifier qu'une densité de D est donnée par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_{\mathrm{D}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-t^2/2)\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

c) Quelle est, en moyenne, la distance de ce point au plan ?

Exercice 49. ✦✦✦ **Exemples avec les fonctions hyperboliques**

- *Partie A - préliminaires*

1. Pour tout réel x, on pose :

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

a) Exprimer $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$ à l'aide de e^x et e^{-x}.

b) Justifier que les fonctions ch et sh sont bien définies, dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$, $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

c) Tracer les graphes de ces deux fonctions.

2. Soit f une fonction deux fois dérivables vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$ et $f'' = f$.

a) Soit $r \in \mathbb{R}_*^+$. Justifier qu'il existe un réel M_r tel que

$$\forall x \in [-r; r], \qquad |f(x)| \leqslant M_r, \quad |f'(x)| \leqslant M_r, \quad |f''(x)| \leqslant M_r.$$

b) À l'aide d'une formule de Taylor, justifier que f est la fonction nulle.

• *Partie B - Applications*

Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit φ l'application de E^2 définie par

$$\varphi : (g,h) \mapsto \int_0^1 \left(g(t)h(t) + g'(t)h'(t)\right) \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. Soit $W = \left\{f \in E \mid f'' \text{ existe et } f'' = f\right\}$. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de E. En admettant que W est de dimension 2, donner en une base.

3. Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$.
Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux dans E.

4. Déterminer la projection orthogonale de $f \in E$ sur W.

5. Soit $f \in E$. Déterminer

$$\inf_{g \in V} \left(\int_0^1 \left((f(t) - g(t))^2 + \left(f'(t) - g'(t)\right)^2 \right) \mathrm{d}t \right).$$

6. Pour $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, on définit

$$E_{\alpha,\beta} = \{h \in E \mid h(0) = \alpha \text{ et } h(1) = \beta\}.$$

a) Déterminer $g_0 \in W$ telle que $g_0(0) = \alpha$ et $g_0(1) = \beta$.

b) Vérifier que $h \in E_{\alpha,\beta}$ si et seulement si il existe $g \in V$ telle que $h = g + g_0$.

c) À l'aide de la question 5, en déduire que

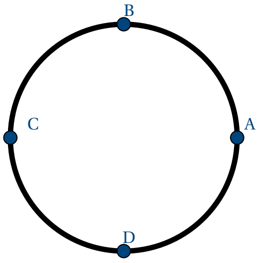
$$\inf_{h \in E_{\alpha,\beta}} \left(\int_0^1 \left(h^2(t) + h'^2(t)\right) \mathrm{d}t \right) = \frac{\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \mathrm{ch}(1) - 2\alpha\beta}{\mathrm{sh}(1)}.$$

Thème : Chaînes de Markov

Exercice 50. ✦

Un pion se déplace sur les 4 points $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$ et $D = (0,-1)$ du cercle trigonométrique selon la règle suivante. Au top d'horloge n, le pion

- reste sur le point où il se trouve avec un probabilité $1/2$;
- se déplace sur l'un des deux points voisins avec une probabilité $1/4$ pour chacun d'eux.



Au top 0, le pion est en A. On introduit les événements :

- A_n : « le pion est sur A au top n » ;
- B_n : « le pion est sur B au top n » ;
- C_n : « le pion est sur C au top n » ;
- D_n : « le pion est sur D au top n » ;

On note $a_n = \mathbf{P}(A_n)$, $b_n = \mathbf{P}(B_n)$, $c_n = \mathbf{P}(C_n)$, $d_n = \mathbf{P}(D_n)$ et $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$.

1. Trouver une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Déterminer J telle que $A = \frac{1}{2}(I_4 + \frac{1}{2}J)$.
   On pose $K = \frac{1}{2}J^2$. Calculer KJ.
3. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left(I_4 + \frac{1}{2}J\right)^n = I_4 + u_n J + v_n K.$$
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n$. Quel type usuel de suite reconnaît-on ?
   Calculer w_n. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n et v_n.
5. Conclure en exprimant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n, b_n, c_n et d_n.

Exercice 51. ✦✦✦

- **Préliminaire**

1. Vérifier que $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$ admet $5/6$, 0 et $1/2$ comme valeur propre.

2. Justifier qu'il existe trois réels α, β et γ et une matrice P inversible tels que
$$M = P\,\mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)P^{-1}.$$

- Dans une élection à venir, deux candidats A et B se présentent.

Un groupe d'électeurs est composé de m individus, avec $m \geqslant 2$.
Initialement, au jour appelé « jour 0 », le nombre d'individus préférant le candidat A vaut a (il y en a donc $m - a$ préférant le candidat B). Ensuite, chaque jour, un des individus au hasard dans le groupe en rencontre un autre, au hasard également, et il lui parle des élections. Si leurs intentions de vote diffèrent, il le convainc de voter comme lui.
Pour tout entier naturel n, on note X_n le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat A le soir du n-ième jour. Ainsi, X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, m]\!]$. On remarque que X_0 est une variable aléatoire certaine : $\mathbf{P}(X_0 = a) = 1$.

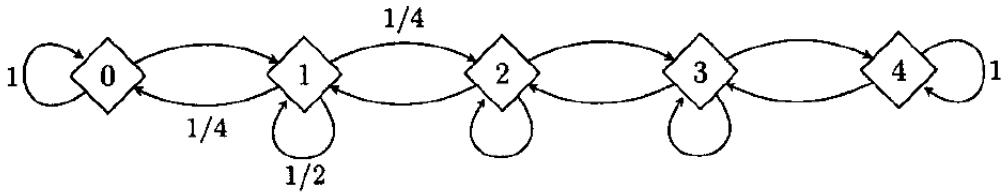
A. Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

1. Soient i et j deux entiers dans $[\![0, 4]\!]$. On note $p_{i,j}$ la probabilité pour qu'il y ait exactement i personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour A un jour donné, sachant qu'il y en avait j la veille.

  a) Justifier : $p_{0,0} = p_{4,4} = 1$.

  b) Justifier : si i et j dans $[\![0, 4]\!]$ sont tels que $|i - j| \geqslant 2$, alors $p_{i,j} = 0$.

c) Donner pour tout $(i,j) \in [\![0,4]\!]^2$ la probabilité $p_{i,j}$.
On présentera les résultats sur le diagramme suivant, à reproduire et à compléter, et on justifiera quelques cas.



2. On définit la matrice $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$, et pour tout entier naturel n, la matrice colonne

$$U_n = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \\ \mathbf{P}(X_n = 3) \end{bmatrix}.$$

a) Pour tout entier naturel n, établir une relation entre U_n, M et U_0.

b) En déduire que pour tout $k \in \{1,2,3\}$, la suite $(\mathbf{P}(X_n = k))_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire des trois suites $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Que dire, pour tout $k \in \{1,2,3\}$, de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = 0$?

d) Établir : $\lim\limits_{n\to+\infty} [\mathbf{P}(X_n = 0) + \mathbf{P}(X_n = 4)] = 1$. Comment interpréter ce résultat ?

3. Simulation avec python.

B. On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de m électeurs.
On note $\pi_{n,k} = \mathbf{P}(X_n = k)$, la probabilité pour qu'il y ait exactement k électeurs envisageant de voter pour A à l'issue du n-ième jour.

1. Soit n un entier naturel.

a) Expliciter les probabilités

$$\mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1), \quad \mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k).$$

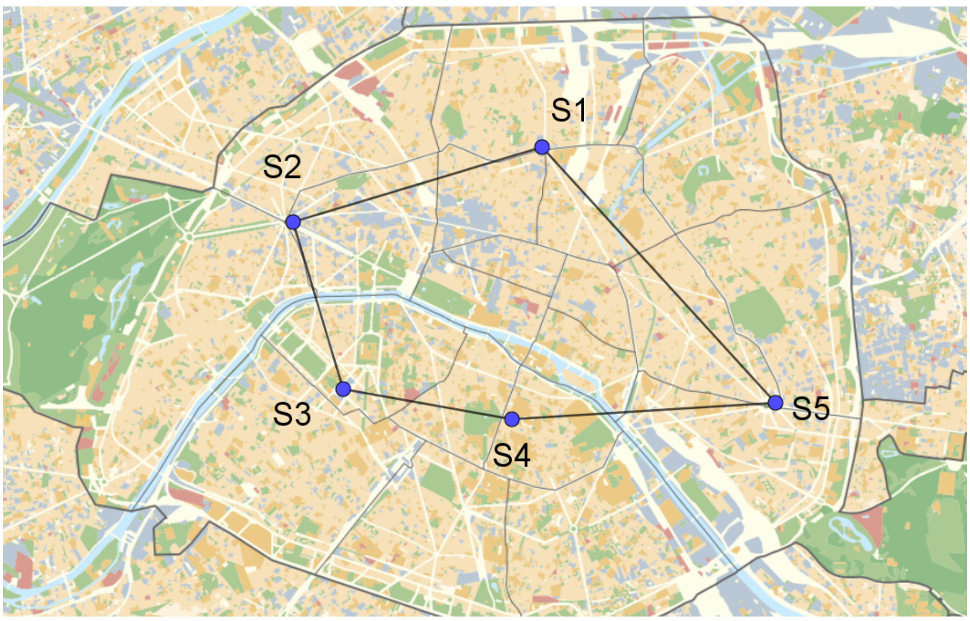
b) Pour $k \in [\![1, m-1]\!]$, exprimer $\pi_{n+1,k}$ à l'aide de $\pi_{n,k-1}$, $\pi_{n,k}$ et $\pi_{n,k+1}$.

2. **a)** Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$,

$$\pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n.$$

b) En déduire, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$, la limite de $\pi_{n,k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 52. ✦ ✎ Anton et Emilie ont rendez-vous sur Paris dans un des cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-dessous. Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, Anton se présente au site S_1 et Emilie au site S_2.



Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes, avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres. Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes).
- Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

Dans la suite, on introduit les événements :

- A_n : « Anton et Emilie sont sur le même site après le n-ème déplacement »
- B_n : « Anton et Emilie sont sur des sites adjacents après le n-ème déplacement »
- C_n : « Anton et Emilie sont à deux routes de distance après le n-ème déplacement »

On note alors
$$a_n = \mathbf{P}(A_n), \quad b_n = \mathbf{P}(B_n), \quad \text{et} \quad c_n = \mathbf{P}(C_n).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n, \quad b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n.$$

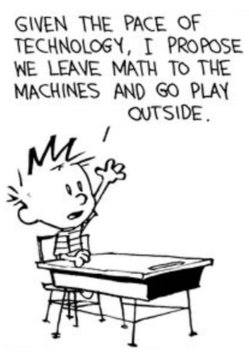
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+2} = \frac{5}{4}c_{n+1} - \frac{5}{16}c_n$.

3. Démontrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha = (5+\sqrt{5})/8 \\ \beta = (5-\sqrt{5})/8 \end{cases}$$

4. Prouver la convergence et la somme
$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha-\beta}{(1-\beta)(1-\alpha)}\right) = 4.$$

5. En déduire que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

6. Justifier que Anton et Emilie se retrouvent presque surement.



CALVIN ET HOBBES

Thème : Variables aléatoires à densité

Exercice 53. ✦✦ ✎ **Inverse du produit de lois uniformes** *D'après ESC 2009*

Soient U, V deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0;1]$. On considérera que, du fait que $[U=0]$ et $[V=0]$ sont de probabilité nulle, $U(\Omega) =]0,1]$, $V(\Omega) =]0,1]$. On pose

$$X = -\ln(U) \quad \text{et} \quad Y = -\ln(V).$$

1. Montrer que $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et que la variable X suit une loi exponentielle de paramètre 1.
2. a) Quelle est la loi de Y? Justifier que X et Y sont indépendantes.
   b) Déterminer une densité f de $Z = X + Y$. Vérifier que si $x \geqslant 0$, alors $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
   c) Déterminer la fonction de répartition de Z.
3. On note $T = \mathrm{e}^Z$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de T et montrer que T est une variable à densité.
   b) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

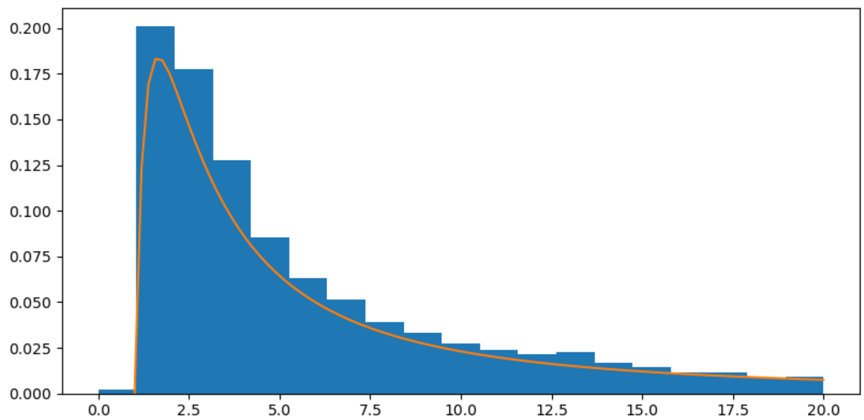
$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

   est une densité de la variable aléatoire $\frac{1}{UV}$.
4. Écrire une fonction Python nommée **Simu** qui simule la variable $1/(UV)$.
   On rappelle que la commande **np.random.rand()** simule une variable à densité suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, dont les exécutions successives donnent des variables indépendantes.
5. Commenter le code suivant :

Editeur

```
E=np.zeros(5000)
for i in range(5000):
    E[i]=Simu()

x=np.linspace(1,20,100)
y=np.log(x)/x**2
plt.hist(E,bins=np.linspace(0,20,20),density=True)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```



Thème : Espérance conditionnelle

Exercice 54. ✧ Rappeler la définition de l'espérance conditionnelle et donner la formule de l'espérance totale.

Exercice 55. ✦✦ *D'après ESC 2005*

Dans tout l'exercice, S désigne un entier naturel non nul fixé. Une urne contient initialement 4S boules indiscernables au toucher, dont S boules rouges, S boules vertes et 2S boules bleues.
On effectue des tirages successifs d'une boule, au hasard, et avec le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne, mais on remet dans l'urne une boule bleue ;
- si la boule tirée est verte, on la remet dans l'urne ;
- si la boule tirée est bleue, on ne la remet pas dans l'urne, mais on remet dans l'urne une boule rouge.

On note, pour tout entier naturel n non nul, X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne après le n-ème tirage, et on note X_0 la variable aléatoire certaine égale à S.

1. Déterminer la loi de X_1, et calculer son espérance.
2. Déterminer la loi de X_2 et calculer son espérance.
3. On suppose désormais que n est un entier supérieur ou égal à 2S, de sorte que

$$X_n(\Omega) = \{0, \ldots, 3S\}.$$

   a) Soit $k \in [\![1, 3S-1]\!]$.
   Quelle est la composition de l'urne une fois l'événement $[X_n = k]$ réalisé ?
   En déduire la loi de X_{n+1} conditionnellement à l'événement $[X_n = k]$.

   b) Montrer que $\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = k) = \left(1 - \frac{1}{2S}\right) k + \frac{3}{4}$. Cette formule est-elle encore vraie pour $k = 0$ et $k = 3S$?

   c) En déduire par la formule de l'espérance totale que $\mathbf{E}(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{2S}\right) \mathbf{E}(X_n) + \frac{3}{4}$.

4. On note, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2S, $u_n = \mathbf{E}(X_n)$.

   a) Donner l'expression de u_n en fonction de n, S et u_{2S}.

   b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n) = \frac{3S}{2}$.

5. Écrire en Python une fonction **simul(S,n)** qui prend en entrée deux paramètres S et n, simule une série de n tirages dans une urne de 4S boules et retourne le nombre de boules rouges restant dans l'urne à l'issue de ces n tirages.

Exercice 56. ✦✦ ✎

1. • **Préliminaires**
   Dans cette question, x désigne un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

   a) Justifier la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} x^k/k$.

   b) Vérifier, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0,1[$, l'égalité : $\displaystyle\frac{1}{1-t} = \frac{t^m}{1-t} + \sum_{k=0}^{m-1} t^k$.

   c) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t}\,dt$ tend vers 0 quand l'entier m tend vers l'infini.

   d) En déduire la somme de la série $\sum_{k\geqslant 1} x^k/k$.

2. • **Application**
   Soient $U_1, U_2, \ldots, U_N$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$ et N une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p indépendante de la suite $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On pose

$$X = \max_{1\leqslant i\leqslant N} U_i.$$

   Calculer l'espérance de X.

Thème : Intégrales de Wallis et formule de Stirling

≫ ✦ *Reprendre le sujet 0 de Ecricome, ou le problème EDHEC 2018.*

Exercice 57. ✦✦ **Une démonstration probabiliste de la formule de Stirling** *D'après HEC maths 2 2017, voie S*

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathrm{A}, \mathbf{P})$;
- on note θ un paramètre réel.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit h_n la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad h_n(x) = \left((1-x)\mathrm{e}^x\right)^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 h_n(x)\mathrm{d}x$.

1. **a)** À l'aide du changement de variable $u = n(1-x)$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{I}_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}} \displaystyle\int_0^n u^n \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $x + \ln(1-x) \leqslant -\dfrac{x^2}{2}$.

c) En se référant à une densité de la loi normale centrée réduite, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

2. On note h_n^* la restriction à l'intervalle $]0,1[$ de la fonction h_n.
On pose pour tout $x \in]0,1[$:

$$h_n^*(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\mathrm{H}(x)\right) \quad \text{et} \quad g(x) = (1-x)\ln(1-x) + x - \frac{x^2}{2}.$$

a) Montrer que H est prolongeable par continuité en 0. On note encore H la fonction ainsi prolongée.

b) Montrer que la fonction g est convexe et strictement positive sur $]0,1[$.

c) En déduire que la fonction H réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ sur $[1,+\infty[$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente de limite nulle telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < 1$.

a) Donner un exemple d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \mathrm{H}(u_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement : $\mathrm{I}_n \geqslant \displaystyle\int_0^{u_n} h_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\sqrt{nv_n}} \int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y$.

d) Déduire des questions 1.c) et 3.c), un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathrm{N}^*$, on pose : $\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \cdots + \mathrm{T}_k$.

a) Rappeler la loi suivie par la variable aléatoire S_n et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([\mathrm{S}_n \leqslant n]) = \dfrac{1}{2}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathrm{U}_n = \dfrac{\mathrm{T}_{n+1}}{\sqrt{n}}$. Montrer que la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathrm{N}^*}$ converge en probabilité vers la constante 0.

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([\mathrm{S}_{n+1} \leqslant n]) = \dfrac{1}{2}$.

5. Montrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling).

≫ *La partie II est intéressante sur la somme de loi de Cauchy.*

Thème : Fonctions génératrices

Cas des variables aléatoires finies

Pour toute variable aléatoire X finie et à valeurs dans $[\![0;n]\!]$, on définit la fonction polynomiale G_X par

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad G_X(t)=\sum_{x\in X(\Omega)} t^x\,\mathbf{P}(X=x).$$

Exercice 58. ✧ ✎ **Premières propriétés de la fonction génératrice**
Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0;n]\!]$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de X à l'aide de $G_X'(1)$ et $G_X''(1)$.
2. Justifier que X et Y ont même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.
3. *Fonction génératrice d'une somme et application*
   a) Justifier que si X et Y sont indépendantes
   $$\forall\, t\in\mathbb{R},\qquad G_X(t)G_Y(t)=G_{X+Y}(t).$$
   b) Calculer $G_X(t)$ lorsque $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n;p)$.
   c) Retrouver le fait que si $X_1,\dots,X_k$ sont de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et qui suivent des lois binomiales $\mathscr{B}(n_i,p)$ alors la somme $S_n=\sum_{i=1}^{k}X_i$ suit encore une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
4. *Fonction génératrice d'une combinaison linéaire*
   Soit $\in\mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_k$ indépendantes, à valeurs dans $[\![0;n]\!]$, de fonctions génératrices $G_1, G_2, \dots, G_k$. Exprimer la fonction génératrice G de $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i X_i$ en fonction de $G_1, G_2, \dots, G_k$ et des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Exercice 59. ✦ **Fonction génératrice d'un couple**
Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2 fixés. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega)\subset[\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega)\subset[\![0,m]\!]$ et le couple $Z=(X,Y)$.
Pour $(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]$, on note $p_{i,j}=\mathbf{P}([X=i]\cap[Y=j])$ et on introduit les fonctions G_X, G_Y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$G_X(x)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{P}(X=i)x^i,\quad G_Y(x)=\sum_{i=0}^{m}\mathbf{P}(Y=i)x^i$$

et la fonction G_Z définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$G_Z(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}p_{i,j}x^iy^j.$$

1. Calculer $G_Z(1,1)$. Exprimer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{E}(XY)$ et $\mathrm{Cov}(X,Y)$ à l'aide des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de G_Z évaluées en $(1,1)$.
2. On considère une fonction polynomiale $f:(x,y)\mapsto\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{i,j}x^iy^j$. Montrer que,
   $$\big(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=0\big)\quad\Longleftrightarrow\quad\big(\forall(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!],\quad a_{i,j}=0\big).$$
3. Déduire de la question précédente que X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $G_Z(x,y)=G_X(x)G_Y(y)$.
4. *Application.*Une urne contient des jetons portant chacun une des trois lettres A, B ou C. La proportion des jetons A (resp. B, C) dans l'urne est égale à $p\in]0,1[$ (resp. $q,r\in]0,1[$) avec $p+q+r=1$. On effectue n tirages (avec $n\in\mathbb{N}^*$) avec remise dans cette urne et on note X (resp. Y) la variable aléatoire correspondant au nombre de jetons A (resp. B) piochés.
   a) Déterminer la loi de X et celle de Y puis les expressions de G_X et G_Y.
   b) Déterminer la loi de Z puis l'expression de G_Z.
   c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Déterminer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Le résultat était-il prévisible ?

Exercice 60. ✦✦✦ **Un exemple de processus de type Galton-Watson**

Une cellule se reproduit ainsi : elle donne deux cellules-filles avec probabilité p, et aucune descendante avec probabilité $q = 1 - p$. Elle meurt ensuite.

On part d'une seule cellule et on cherche à déterminer si la population va s'éteindre ou non. On suppose que les comportements des descendances sont mutuellement indépendants et on note, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n, la variable aléatoire égale au nombre de cellules à la n-ième génération.

1. Expliciter l'ensemble des valeurs prises par X_n, noté $X_n(\Omega)$.
2. Montrer que $\mathbf{P}_{[X_n=i]}(X_{n+1} = 2k) = \binom{i}{k} p^k \cdot q^{i-k}$, où $k \in [\![1; i]\!]$.
3. Soit G_n, la fonction génératrice de X_n, c'est-à-dire la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{j \in X_n(\Omega)} \mathbf{P}\left(X_n = j\right) \cdot x^j.$$
   a) En appliquant convenablement la formule des probabilités totales, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = G_n\left(q + p \cdot x^2\right).$$
   b) Calculer $G_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en déduire que $G_{n+1}(x) = q + p \cdot G_n(x)^2$.
4. Soit $m = \min(1; q/p)$. On définit la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par
$$u_1 \in [0; m] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = q + p {u_n}^2.$$
   a) Vérifier que la suite est à valeurs dans $[0; m]$ et monotone.
   b) En déduire la convergence de la suite et préciser la limite.
5. Soit T_n, la variable aléatoire égale à 1 lorsque la population est éteinte et à 0 sinon. Justifier que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

Cas des variables aléatoires dénombrables

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose :
$$\forall t \in [-1, 1], \qquad G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \,\mathbf{P}(X = k).$$

Exercice 61. ✦ **Définition et exemple**

1. Soit $t \in [-1, 1]$. Montrer que la série qui définit $G_X(t)$ est absolument convergente, puis exprimer $G_X(t)$ à l'aide de l'espérance d'une variable aléatoire.
2. On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.
   a) Calculer $G_X(t)$ pour tout $t \in [-1, 1]$.
   b) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$.
   Cette dernière égalité est un fait général.

Exercice 62. ✦✦ ✎ **Lien entre la fonction génératrice et l'espérance**

1. **a)** Exprimer $G_X(t)$ comme espérance d'une variable aléatoire.
   b) Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}$, alors
$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t).$$
2. **a)** On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1[$
$$p_k = \mathbf{P}(X = k) \quad \text{et} \quad H(t) = \frac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1}.$$
   Montrer que
$$H(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \left(1 + t + t^2 + \cdots + t^{k-1}\right).$$
   En déduire que la fonction H est croissante sur $[0, 1[$.

b) On suppose que X admet une espérance. Prouver que

$$\forall t \in [0,1[, \quad \mathrm{H}(t) \leqslant \mathbf{E}(\mathrm{X}).$$

c) En déduire que $\mathrm{G_X}$ est dérivable à gauche en 1. Quelle relation existe-t-il entre $\mathbf{E}(\mathrm{X})$ et la dérivée à gauche de $\mathrm{G_X}$ en 1 ?

d) On suppose maintenant que $\mathrm{G_X}$ est dérivable à gauche en 1. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k p_k \leqslant (\mathrm{G_X})'_g(1).$$

En déduire que X possède une espérance. Quelle relation entre $(\mathrm{G_X})'_g(1)$ et $\mathbf{E}(\mathrm{X})$ peut-on en déduire ?

e) Conclure en donnant le lien entre $\mathrm{G_X}$ et $\mathbf{E}(\mathrm{X})$.

3. Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire X, et retrouver ainsi la valeur de $\mathbf{E}(\mathrm{X})$.

a) X suit la loi géométrique de paramètre p.

b) X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 63. ✦✦✦ ✎ **Identités de Wald et sommes aléatoires de variables aléatoires**

Soient X et $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi et admettant une espérance. Soit N, une nouvelle variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et admettant aussi une espérance. On pose pour tout $\omega \in \Omega$

$$\mathrm{S}(\omega) = \begin{cases} \mathrm{X}_1(\omega) + \cdots + \mathrm{X}_{\mathrm{N}(\omega)}(\omega) & \text{si } \mathrm{N}(\omega) \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } \mathrm{N}(\omega) = 0. \end{cases}$$

On admet que S est une variable aléatoire.

1. • **Espérance de S : une formule, deux approches.**

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(\mathrm{N} = n) \neq 0$. Justifier l'existence et calculer l'espérance $\mathbf{E}\big(\mathrm{S} \mid [\mathrm{N} = n]\big)$.

b) En déduire l'existence de l'espérance de S et l'égalité $\mathbf{E}(\mathrm{S}) = \mathbf{E}(\mathrm{X}) \cdot \mathbf{E}(\mathrm{N})$.

2. **a)** Justifier que pour tout $t \in [-1;1]$

$$\mathrm{G_S}(t) = \mathrm{G_N}\big(\mathrm{G_X}(t)\big).$$

On pourra admettre que l'on peut intervertir les sommes doubles.

b) En admettant que dans le cas d'absolue convergence, l'espérance de la variable X est donnée par $\mathrm{G}'_{\mathrm{X}}(1)$, retrouver le résultat de la question 1.(b).

3. • **Variance**

On suppose maintenant que les variables X_i admette un moment d'ordre 2. Justifier que

$$\mathbf{E}\Big(\big(\mathrm{S} - \mathrm{N}\mathbf{E}(\mathrm{X})\big)^2\Big) = \mathbf{E}(\mathrm{N})\,\mathbf{V}(\mathrm{X}).$$

Thème : Processus de Poisson

Exercice 64. ✦✦✦ *D'après ESSEC 2010, voie E*

- **Préliminaires** [2]

0.(a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Donner la limite de $\lfloor nx \rfloor / n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

0.(b) Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$, deux séries absolument convergentes

i. Justifier que pour tout $x \in [-1,1]$, les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont absolument convergentes (avec la convention que $0^0 = 1$). On pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$

ii. Vérifier que pour $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k + o_0(x^N)$.

iii. En déduire que si $f = g$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.

On considère un système dont le fonctionnement est défini comme suit : pour tout réel t positif, la variable aléatoire N_t à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle $[0, t]$. On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.
On notera en particulier que pour $s \leqslant t$, on a $N_s \leqslant N_t$.
On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes :

- $N_0 = 0$ et $0 < \mathbf{P}(N_t = 0) < 1$ pour tout $t > 0$.
- Pour tous réels $t_0, t_1, \dots, t_n$ tels que $0 \leqslant t_0 < t_1 < \dots < t_n$ les variables $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants)
- Pour tous réels s et t tels que $0 < s < t, N_t - N_s$ suit la même loi que N_{t-s} (accroissements stationnaires)
- On a la limite $\displaystyle\lim_{h \to 0, h>0} \frac{\mathbf{P}(N_h > 1)}{h} = 0$.

On pose, sous réserve d'existence, pour tout $u \geqslant 0$ et pour tout s dans $[0,1]$, $G_u(s) = \mathbf{E}\left(s^{N_u}\right)$, avec la convention $0^0 = 1$.

1. **a)** Justifier que pour tout $u \geqslant 0, G_u(s)$ existe pour tout s dans $[0,1]$ et qu'on a, pour tout s dans $[0,1]$,

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N_u = k)\, s^k.$$

b) Montrer par ailleurs que, pour tous réels u et v positifs ou nuls, et pour tout réel s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$, on a

$$G_{u+v}(s) = G_u(s) G_v(s).$$

2. On fixe s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$.

a) Montrer que $G_1(s) > 0$.
On pose $\theta(s) = -\ln G_1(s)$ et, pour $u \geqslant 0, \psi(u) = G_u(s)$.

b) Montrer que $\psi(k) = e^{-k\theta(s)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit q un entier naturel non nul. En considérant $G_{\frac{1}{q}}(s)$, montrer que $\psi\left(\frac{1}{q}\right) = e^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$.

d) Montrer que si p est entier naturel et q un entier naturel non nul, on a $\psi(r) = e^{-r\theta(s)}$ où on a posé $r = \frac{p}{q}$.

e) Montrer que pour tout réel positif u, $G_u(s) = e^{-u\theta(s)}$.

f) En déduire que pour tout $s \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{h \to 0, h>0} \frac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)$.

3. Montrer par ailleurs que pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_h(s) - 1 = \mathbf{P}(N_h = 1)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(N_h = k)\left(s^k - 1\right).$$

2. Cette partie préliminaire n'était pas présente dans le sujet original.

4. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$, $\lim\limits_{h \to 0, h>0} \dfrac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(N_h = k)\left(s^k - 1\right)}{h} = 0$

5. **a)** En déduire qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\alpha = \lim\limits_{h \to 0, h>0} \dfrac{\mathbf{P}(N_h = 1)}{h}$ et que pour pour tout $s \in [0,1]$, $\theta(s) = \alpha(1-s)$.

b) En considérant $G_u(0)$, montrer que $\alpha > 0$.

6. **a)** On fixe un temps $u > 0$. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right] s^k.$$

b) Déduire que pour tout $u > 0$, la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu.

Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille $(N_t)_{t \geqslant 0}$ est un processus de Poisson et la constante α s'appelle le paramètre du processus de Poisson.

7. Soit T la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit $t > 0$. Comparer les événements $[T > t]$ et $[N_t = 0]$. En déduire que T suit la loi exponentielle de paramètre α.

8. Pour t positif fixé, on pose pour h réel positif, $N_h = N_{t+h} - N_t$.

a) Montrer que $\tilde{N}_h$ est la variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps $]t, t+h]$.

b) Montrer que la famille $\left(\tilde{N}_h\right)_{h \geqslant 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α.

c) En déduire que la première panne survenant après la date t se produit à une date suivant la loi exponentielle de paramètre α.

d) (ADMIS) En déduire que le processus de Poisson a la propriété que, pour chaque date t donnée, le taux de défaillance du système après t est constant.

Thème : Entropie

Exercice 65. ✦✦ ✎

La notion d'entropie est centrale en théorie de l'information. Cette notion est due en grande partie au mathématicien américain Claude Shannon (1916-2001) et l'on parle souvent d'entropie de Shannon.
Ce sujet propose de trouver des conditions pour majorer l'entropie de Shannon et de préciser les cas d'égalité dans le cadre des variables finies, des variables infinies dénombrables, puis à densité.

Dans la suite, on définit sur $\mathbb{R}^+$ la fonction h par

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -x\ln(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Partie A. Cas fini

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé Ω fini.
On note x_i avec $i = 1, \ldots, n$ les valeurs prises par la variable X, c'est-à-dire que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
On définit l'entropie de X par :

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} h(p_i) \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1;n]\!] \quad p_i = \mathbf{P}\big([X = x_i]\big).$$

1. *Exemples.*
   (a) i. Soit $p \in [0;1]$. Vérifier que lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$,
   $$H(X) = h(p) + h(1-p).$$
   ii. Pour quelle valeur du paramètre p, l'entropie d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(p)$ est-elle maximale ?
   (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et U une variable de loi uniforme $[\![1;n]\!]$. Déterminer H(U).
2. *Python*

   Recopier et compléter le programme ci-contre qui prend en entrée une matrice ligne P contenant les valeurs p_i et renvoie l'entropie associée à la variable X.

```
def entropie( ... ) :
    H=0
    n= ...
    for i ...
        H= ...
   return H
```

3. *Minoration.*
   Démontrer que $H(X) \geqslant 0$ pour toute variable aléatoire X avec $H(X) = 0$ si et seulement si X est une variable aléatoire presque sûrement constante.
4. *Majoration.*
   (a) Justifier que $-x\ln x \leqslant 1 - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.
   (b) En déduire que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$: $(-np_k)\ln(np_k) \leqslant 1 - np_k$, puis,
   $$H(X) \leqslant H(U) \qquad \text{où} \quad U \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;n]\!]).$$
   Vérifier qu'il y a égalité si et seulement si X suit une loi uniforme.

Partie B. Entropie pour des variables aléatoires discrètes.

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On note

$$X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}.$$

On définit, sous réserve de convergence absolue, l'entropie de X par :

$$H(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} h(p_i) \quad \text{où} \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad p_i = \mathbf{P}\big([X = x_i]\big) > 0.$$

5. Dans cette question, on suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance. C'est-à-dire, la série suivante est absolument convergente :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} np_n$$

On souhaite prouver que X admet une entropie.

   (a) Justifier que

$$np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{p_n}\ln(p_n)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   (b) En déduire, l'existence d'un réel positif M tel que

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*, \qquad |np_n| \leqslant \mathrm{M} \quad \text{et} \quad \left|\sqrt{p_n}\ln(p_n)^2\right| \leqslant \mathrm{M}.$$

   (c) i. Soient $a, b\in\mathbb{R}$, justifier que $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

   ii. En déduire pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$|p_n\ln(p_n)| \leqslant \frac{1}{2}\cdot np_n + \frac{p_n\ln(p_n)^2}{2n} \leqslant \frac{1}{2}\cdot np_n + \frac{\mathrm{M}^{3/2}}{2n^{3/2}}.$$

   (d) À l'aide de l'inégalité précédente, justifier l'existence de l'entropie de X.

6. *Exemple.*
Vérifier que si la variable G suit une loi géométrique de paramètre $p\in\,]0;1[$,

$$\mathrm{H}(\mathrm{G}) = -\frac{1-p}{p}\ln(1-p) - \ln(p) = \frac{1}{p}\big(h(p)+h(1-p)\big) \quad \text{puis} \quad \mathrm{H}(\mathrm{G}) \leqslant \ln(2)\mathbf{E}(\mathrm{G}).$$

7. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathrm{X}(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\mathbf{E}(\mathrm{X})=\mathbf{E}(\mathrm{G})$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $q_k=\mathbf{P}(\mathrm{X}=k)$ et on supposera $q_k>0$. Vérifier que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\ln(p_k) - \ln(q_k) \leqslant \frac{p_k-q_k}{q_k}.$$

On pourra utiliser le fait que pour tout $x>0$, $\ln(x)\leqslant x-1$, puis établir

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}) \leqslant \mathrm{H}(\mathrm{G})$$

avec égalité si, et seulement si, X suit la même loi que G.

Partie C - le cas des variables à densité

On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des densités de probabilités f continues sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ soit convergente. Pour toute variable aléatoire X ayant pour densité un élément f de $\mathscr{F}$, on définit l'entropie H(X) de X par :

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} h\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

8. *Exemple 1 : cas des lois normales*
Soit Y_0 une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Montrer que $\mathrm{H}(\mathrm{Y}_0)$ existe et calculer $\mathrm{H}(\mathrm{Y}_0)$.

9. *Exemple 2 : cas des lois exponentielles*
Soit X_0 une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda\in\mathbb{R}_*^+$. Vérifier qu'il existe f, une densité de X_0 telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$h\big(f(x)\big) = -\ln(\lambda)f(x) + \lambda x f(x).$$

10. Montrer que $\mathrm{H}(\mathrm{X}_0)$ existe et calculer $\mathrm{H}(\mathrm{X}_0)$ en fonction de λ.

11. *Majoration*
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, admettant une densité g. On suppose que H(X) existe et que X admet une espérance égale à $\frac{1}{\lambda}$. Montrer que :

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}_0) = -\int_0^{+\infty} g(x)\ln\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant le fait que pour tout $u > 0$, $\ln(u) \leqslant u - 1$ montrer que

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}) \leqslant \mathrm{H}(\mathrm{X}_0).$$

⋙ *Pour aller plus loin, on pourra consulter le sujet HEC 2012*

Exercice 66. ✦✦✦ **Entropie dans le cas discret et optimisation sous contrainte**

Soit h_1 la fonction définie sur $[0,1]$ par : $h_1(x) = \begin{cases} -x\ln x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Vérifier que h_1 est continue sur $[0;1]$ et donner son graphe.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Y, une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ avec $\mathrm{Y}(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_n\}$. On note pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $p_k = \mathbf{P}(\mathrm{Y} = y_k)$, puis on définit l'entropie de Y par

$$\mathrm{H}(\mathrm{Y}) = \sum_{k=1}^{n} h_1(p_k).$$

2. Calculer l'entropie d'une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

3. Pour quelle valeur du paramètre p, l'entropie d'une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ est maximale ?

4. L'objectif de la suite est de déterminer parmi les variables aléatoires prenant n valeurs distinctes, celles qui maximise l'entropie. Pour cela, on définit la fonction h_n sur l'ouvert $]0;1[^n$ par

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in]0;1[^n, \qquad h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} h_1(x_k).$$

a) Justifier que h_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,1[^n$ et expliciter son gradient ∇h_n et sa matrice hessienne $\nabla^2 h_n$.

b) Vérifier que la fonction h_n admet un unique point critique a sous la contrainte $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$.

c) Soit $x \in]0,1[^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$ et notons $h = x - a$. Vérifier que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $a + th \in]0,1[^n$.
On note alors ψ la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\psi(t) = h_n(a + th)$.

d) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour ψ entre les points 0 et 1, montrer que h_n admet en a un maximum global sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Ce maximum est-il atteint en d'autres points que a ?

5. Parmi les variables aléatoires prenant n valeurs (chacune avec une probabilité non nulle), quelles sont les lois de celles qui ont la plus grande entropie ?

Thème : Simulations des lois

Exercice 67. ✦ **Lois de Pareto** *D'après EMLyon Voie E 2020*

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > b \\ a\dfrac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f. Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. **a)** Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Montrer que la variable aléatoire $b\mathrm{U}^{-\frac{1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b.

b) En déduire une fonction Python d'en-tête function `X = pareto (a, b)` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

Editeur

```
import numpy as np

def pareto(a,b):
    u=np.random.rand()
    return b*u**(-1/a)
```

3.(c) On considère la fonction Python ci-dessous. Que contient la liste L renvoyée par la fonction **mystere** ?

Editeur

```
def mystere(a,b):
    L=[]
    for p in range(2,7):
        S=0
        for k in range(1,10**p):
            S+=pareto(a,b)
        L.append(round(S/10**p,5))
    return L
```

On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b. Comment interpréter les résultats obtenus ?

Editeur

```
>>> mystere(2,1)
[1.86379, 1.96188, 2.03994, 1.97986, 1.99862]
>>> mystere(3,2)
[3.01753, 3.08953, 2.98778, 2.99568, 2.99862]
>>> mystere(1,4)
[70.81249, 27.58769, 52.00457, 79.28056, 54.68078]
>>> mystere(1,4)
[29.62632, 45.92403, 50.88489, 79.99194, 58.12864]
```

4.(a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \frac{ab}{a-1}.$$

4.(b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$\mathbf{V}(\mathrm{X}) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}.$$

Exercice 68. ✦✦ *D'après la partie 3 de ESSEC 2014 E*

Dans tout le sujet, $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, où a et b sont réels ou infinis. On dit qu'une densité de probabilité f vérifie l'hypothèse CSP(I) lorsque f est :

- continue sur I,
- strictement positive sur I,
- nulle en dehors de I.

On écrira alors simplement : f est CSP(I).

La plupart des langages informatiques possèdent un générateur de nombres aléatoires. En Python par exemple, on dispose de l'instruction **np.random.rand()** de la bibliothèque **numpy** (alias **np**). Ces générateurs produisent une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0,1[$.
On propose dans la suite deux méthodes permettant de simuler des lois continues quelconques en utilisant ces générateurs aléatoires.
Jusqu'à la fin du problème : on note Z une variable aléatoire continue à valeurs dans I, de fonction de répartition G et admettant une densité g qui est CSP(I).

a- Simulation par la méthode d'inversion

1. **a)** On note H la restriction de G à I. Montrer que H réalise une bijection de I sur $]0,1[$. On note H^{-1} la bijection réciproque. Dresser le tableau de variations de H^{-1}.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$. On pose $X = H^{-1}(U)$, et on note F la fonction de répartition de X.

b) Montrer que pour tout x dans I, $F(x) = G(x)$.

c) En déduire que X suit la même loi que Z.

2. *Simulation de lois exponentielles.*
On suppose dans cette question que Z suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Expliciter l'intervalle I et les fonctions g, G et H^{-1}.

b) Écrire une fonction Python d'en-tête **def expo(lambda) :** qui simule la loi exponentielle.

3. *Simulation de la loi de Laplace.*
On cherche dans cette question à simuler une variable aléatoire de densité g donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad \text{(densité de Laplace).}$$

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
Soit V une variable aléatoire indépendante de Y suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, ce qui signifie $\mathbf{P}([V=-1]) = \mathbf{P}([V=1]) = \frac{1}{2}$. On pose $X = VY$.

a) Vérifier que g est une densité de probabilité qui est CSP($\mathbb{R}$).

b) Établir :

- pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbf{P}([X > x]) = \frac{1}{2}\mathbf{P}([Y > x])$;
- pour tout $x \leqslant 0$, $\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \frac{1}{2}\mathbf{P}([Y \geqslant -x])$.

c) En déduire une expression de la fonction de répartition de X.

d) Conclure que X est une variable aléatoire continue admettant g comme densité.

e) Écrire une fonction Python qui simule la loi de Laplace.

b- Simulation par la méthode du rejet

Dans la méthode dite du rejet, pour simuler la loi de Z de densité g, on commence par déterminer une loi de probabilité que l'on sait simuler, de densité f qui est CSP(I), et qui vérifie : il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall x \in I$, $g(x) \leqslant cf(x)$.

4. Montrer qu'il existe une fonction h continue sur I et à valeurs dans $[0,1]$ telle que, pour tout $x \in I, g(x) = cf(x)h(x)$ On considère alors :

- une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui suivent la loi uniforme sur $]0,1[$.

→ une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $]a,b[$, ayant toutes la même loi de densité de probabilité f et de fonction de répartition F.

On suppose de plus que pour tout entier $n \geqslant 1$, les variables $X_1,\dots,X_n,U_1,\dots,U_n$ sont mutuellement indépendantes.
On définit N la variable aléatoire prenant comme valeur le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

5. ADMIS. En utilisant la partie 1, prouver l'égalité, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([U_k \leqslant h(X_k)]) = \frac{1}{c}$.
En déduire que N suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, l'espérance et la variance.
On définit la variable aléatoire X comme étant la valeur de X_N, c'est-à-dire la valeur de X_k pour le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

6. Soit $x\in$ I.

a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement $[X\leqslant x]\cap[N=n]$ à partir des événements $[X_n\leqslant x]\cap[U_n\leqslant h(X_n)]$ et $[U_k > h(X_k)]$ pour $k\in[\![1,n-1]\!]$.

b) (ADMIS). En utilisant la question 3.(b), montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}([X_n\leqslant x]\cap[U_n\leqslant h(X_n)]) = \frac{1}{c}G(x).$$

c) En déduire $\mathbf{P}([X\leqslant x]\cap[N=n])$ en fonction de c et de $G(x)$.

d) Montrer finalement : $\mathbf{P}([X\leqslant x]) = G(x)$.

7. Conclure.

8. *Simulation de la loi normale.*
Dans cette question, Z suit la loi normale centrée et réduite, donc $I=\mathbb{R}$.
Soit f la densité de Laplace (question 3), définie par $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

a) Donner une densité g de Z qui est CSP($\mathbb{R}$).

b) Étudier les variations sur $[0,+\infty[$ de la fonction $a : x\mapsto e^{x-\frac{x^2}{2}}$.

c) Expliciter une constante $c>0$ telle que, pour tout $x\geqslant 0$: $g(x)\leqslant \frac{c}{2}e^{-x}$.

d) En déduire que pour tout x réel, $g(x)\leqslant c f(x)$.

e) Expliquer alors comment mettre en place la méthode du rejet pour simuler la loi normale centrée et réduite. On explicitera en particulier la fonction h introduite à la question 4.

f) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule la loi normale centrée réduite :

Editeur
```
def simulnormaleCR():
    ...

    while ... :

       x=laplace()
       u=np.random.rand()
           ...
    return normale=
```

g) Comment simuler une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$?

Exercice 69. ✦
On considère X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 et pour $n\in\mathbb{N}$, $Y_n=\frac{-X}{1+e^{-nX}}$. On dispose d'une fonction **simulY** qui prend en argument deux entiers n et m, et qui renvoie une m simulations de la réalisation de Y_n.
Que fait le programme suivant ?

Editeur
```
import numpy as np
n=int(input ('Entrer la valeur de n '))
print(np.mean(simulY(n, 1000)))
```

Thème : Python

Exercice 70. ✧ ✎ **Deux programmes de première année**

1. Écrire un programme qui prend en argument une fonction f, un entier naturel non nul n et deux réels a, b (avec $a < b$) et renvoie la somme de Riemann d'ordre de f :
$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

2. Donner une approximation de $\sqrt{2}$ par l'algorithme de dichotomie à 10^{-5} près.

Exercice 71. ✦✦

La série $\sum \frac{1}{n^3}$ est convergente. Écrire un programme qui calcule les termes successifs de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles de cette série jusqu'à ce que $\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} < 10^{-10}$ et renvoie le dernier S_n calculé.

Exercice 72. ✦✦ **Polynômes de Lagrange**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n+1$ nombres réels distincts deux à deux.
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on définit la fonction polynôme L_k par
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{L}_k(x) = \prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n \\ j\neq k}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

1. Écrire une fonction **Lagrange(X,k,x)** qui prend en entrée une matrice ligne **X**$= [x_0, x_1, \ldots, x_n]$, un entier $k \in [\![0; n]\!]$ et un réel x, puis renvoie le nombre $\mathrm{L}_k(x)$.
2. Tracer sur l'intervalle $[-3, 3]$ chacune des courbes des polynômes L_k correspondant à **X**$= [-2, -1, 0, 1, 2]$

Exercice 73. ✦

Compléter le script ci-contre pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 \ln\left(1+t^2\right) \mathrm{d}t$:

Editeur

```
import numpy as np
U=rd.random(100000)
V=np.ln(1+U**2)
I=   ...
     ...
```

Exercice 74. ✦

On considère X, Y deux variables de Poisson indépendantes de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

1. Écrire une fonction d'en-tête **def estime(Lambda) :** qui, prenant en argument un réel Lambda strictement positif, simule un grand nombre de fois les variables aléatoires X et Y, et renvoie une estimation de $\mathbf{P}([\mathrm{X} = \mathrm{Y}])$.
*Rappel. La commande **np.random.poisson(mu,n)** renvoie un tableau de nombres de taille n dont chaque coefficient suit une loi de Poisson d'espérance **mu**.*
2. Adapter le programme pour X et Y suivant une loi géométrique de paramètre p (vérifier par un calcul théorique le résultat obtenu).

Exercice 75. ✧

Soit $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{U}(]0; 1])$ et $\mathrm{Y} = -\ln(\mathrm{X})$

1. Donner la loi de Y.
2. Quelle est la loi simulée par le programme ci-contre ?

Editeur

```
def simulation(n): # n est un entier > 1
    u=np.random.rand(n)
    p=np.prod(u) # effectue le produit
        des coefficients de u
    return -np.log(p)
```

Exercice 76. ✦✦ **Pile-Pile** *d'après Ecricome 2021 E*

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux «Pile» consécutifs. On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux «Pile» consécutifs. Si on obtient jamais deux «Pile» consécutifs, on conviendra que X vaut -1. Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face,... alors X prend la valeur 5.

1. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux «Pile» consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

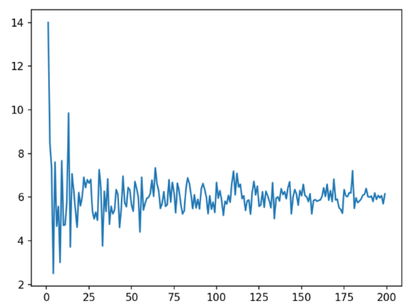
Editeur

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def simulationX():
    tirs=0
    pile=0
    while pile ... :
        if np.random.rand()<1/2:
            pile= ...
        else :
            pile= ...
        tirs= ...
    return tirs
```

2. Écrire une fonction Python d'en-tête **moyenne (n)** qui simule n fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

3 On calcule moyenne (n) pour chaque entier n de $[\![1, 200]\!]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe ci-contre.
Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X?



Exercice 77. ✦✦ **Suites adjacentes**

On considère le programme suivant :

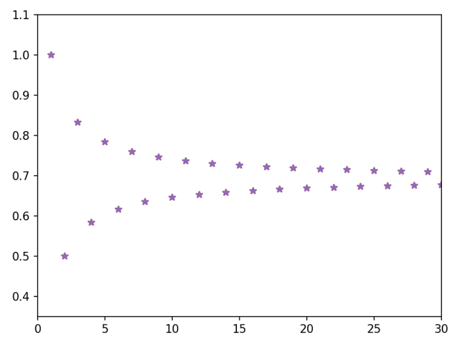
Editeur

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n=30
x=np.arange(1,n+1)
y=np.zeros(n)
eps=1
for i in range(n):
    y[i]=eps/(i+1)
    eps=eps*(-1)
z=np.cumsum(y)

plt.axis([0, 30, 0.35, 1.1])
plt.plot(x,z,'*')
plt.show()
```

Ci-dessous, le résultat obtenu :



1. Préciser le contenu des variables y et z après l'exécution du programme.
2. Ce graphe suggère que deux suites sont adjacentes. Lesquelles ?
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 78. ✦✦✦ **Tracé de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite**

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}} \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}.$$

En déduire que
$$\left|\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}\right| \leqslant \frac{x}{n}\left(1-e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

2. En déduire une inégalité sur n afin d'avoir une valeur approchée de $\Phi(x)$ à 10^{-4} près ?
3. Proposer, en langage Python, une fonction `I(f, a, b, n)` qui prend en entrée une fonction f à valeurs réelles, deux réels a et b et un entier naturel n et qui renvoie une valeur approchée avec la méthode des rectangles de $\int_a^b f(t)\,dt$ calculée avec n rectangles.
4. En déduire une fonction qui renvoie une approximation de $\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, puis de $\Phi(x)$.
5. Donner un programme qui trace le graphe de Φ sur $[-5;5]$.

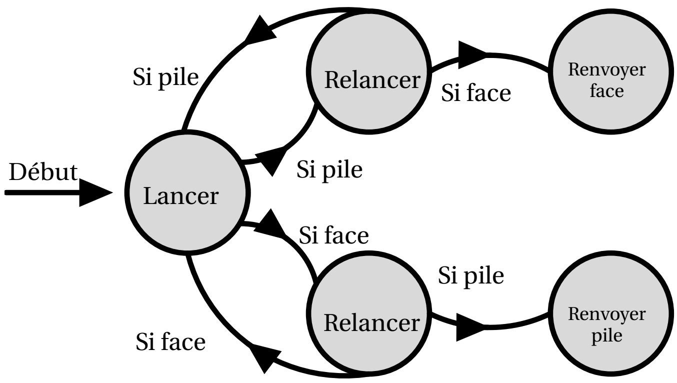
Exercice 79. ✦✦ **Retour sur la méthode de Monte-Carlo**

Soient $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$ et N une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p indépendante de la suite $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. On pose $q=1-p$ et
$$X = \max_{i\in[\![1;N]\!]} U_i.$$

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X. Comment tracer son graphe avec python ?
2. Justifier que $\mathbf{E}(X)$ admet une espérance avec $\mathbf{E}(X) = 1 + pq^{-2}\big(\ln(p)+q\big)$.
   On pourra utiliser l'égalité $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n/n$ *pour* $x\in[-1;1[$.
3. Simuler la variable et vérifier votre résultat.

Exercice 80. ✦✦ **Pile - Face**

Le but de cet exercice est d'étudier un algorithme permettant de générer un pile ou face équilibré à partir d'une pièce truquée. On suppose que la pièce (truquée) renvoie pile avec probabilité $p\in]0,1[$ avec $p\neq 1/2$. Voici une description schématique de l'algorithme. On se place dans le cas où les lancers successifs de la pièce sont mutuellement indépendants.



1. Écrire une fonction `Bernoulli` qui prend en argument $p\in[0;1]$ et simule une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(p)$.
2. Donner une fonction Python `algo` qui renvoie pile (1) ou face (0) en suivant l'algorithme décrit ci-dessus.
3. Effectuer 4000 réalisations et afficher les fréquences d'obtention de pile et face. Commenter.
4. Modifier la fonction `algo` pour afficher en plus le nombre de lancers nécessaires pour que l'algorithme se termine.
5. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour que l'algorithme se termine. Estimer l'espérance $\mathbf{E}(T)$.

Exercice 81. ✦✦ **Exemple de marche aléatoire asymétrique**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$\mathbf{P}(X_n=1)=p \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n=-1)=1-p.$$

- *Sur une droite*

1. Écrire une fonction python d'argument p et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X_1.
2. On pose $A_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $A_n = X_1+X_2+\cdots+X_n$.
   Écrire une fonction d'arguments p et n et qui renvoie la liste $[A_0,A_1,\cdots,A_n]$.
3. Soit $m\in\mathbb{N}^*$. On note $T_m=\min\{k\in\mathbb{N}\,\big|\,|A_k|=m\}$. Écrire une fonction d'arguments p, m qui renvoie une simulation de la variable aléatoire T_n.

- *Dans le plan*
  On suppose maintenant un point mobile qui se déplace sur les points à coordonnées entières dans le plan. Initialement à l'origine, sa position à l'étape p est donnée par (B_n,C_n) où B_n et C_n sont deux variables aléatoires de même loi que A_n.

4. Simuler les n premières étapes du mobile.
5. Simuler la variable aléatoire T'_m qui renvoie le numéro de l'étape où le mobile est à distance plus grande que m de l'origine.

Notes personnelles

Lettres grecques

Il est utile de connaitre les lettres grecques. Il est parfois difficile de suivre les étudiants lorsqu'ils confondent deux lettres de leurs énoncés.

Rapport de Jury : Oral, HEC 2021

\- FIN -

Exercice : Traduire $0+0=\theta\tau\tau$.