

DS 2 - sujet A

THÈME : PROBABILITÉS, VARIABLE DISCRÈTE, ESPÉRANCE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème A : succession de Pile-face, fonction génératrice

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté. On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n + 1)^{\text{ème}}$ l'autre côté.

De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.

On définit de même les séries suivantes.

Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement "le $i^{\text{ème}}$ lancer amène Pile" et F_i l'événement contraire. Les trois parties sont indépendantes.

I. Étude des longueurs de séries

1. On note L_1 la longueur de la première série. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Exprimer l'événement $[L_1 = n]$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n + 1$. En déduire que

$$\mathbf{P}(L_1 = n) = p^n q + q^n p.$$

Vérifier par le calcul que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(L_1 = n) = 1.$$

2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.

- a) Exprimer l'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n + k + 1$ puis calculer la probabilité de l'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$.
- b) En déduire que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$$

On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(L_2 = k) = 1$.

3. Montrer que la variable aléatoire L_2 admet une espérance égale à 2.

II. Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers

On considère dans toute cette partie que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire que $p = \frac{1}{2}$. On note N_n le nombre de séries lors des n premiers lancers :

→ La première série est donc de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k + 1)$ -ième l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce.

→ La dernière série se termine nécessairement au $n^{\text{ème}}$ lancer.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : FFPFFFPFFPP... (F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1, \quad N_3(\omega) = \dots = N_6(\omega) = 2, \quad N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3, \quad N_9(\omega) = \dots = N_{11}(\omega) = 4$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.

On admettra que N_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

4. Déterminer les lois de N_1 et N_2 . Donner leurs espérances.

5. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par N_n) puis calculer les valeurs de $\mathbf{P}(N_n = 1)$ et $\mathbf{P}(N_n = n)$.

• *Simulation informatique.*

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le $k^{\text{ème}}$ lancer amène Pile et 0 sinon.

6. Recopier et compléter la fonction informatique suivante qui prend en argument $m \in \mathbb{N}$ afin qu'elle simule les m variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_m$ (dont les valeurs seront placées dans la matrice X) et détermine les valeurs de $N_1, N_2, \dots, N_m$ (qui seront stockées dans la matrice N).

Proposer alors un programme qui, sur la base de 10000 simulations de N_{20} , retourne une valeur approchée de l'espérance $\mathbf{E}(N_{20})$.

• *Fonction génératrice de N_n .*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0, 1]$, $G_n(s) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(N_n = k) s^k$.

8. Pour $s \in [0; 1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

9. Que représente $G'_n(1)$?

10. a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ et tout $k \in [1; n]$, on a

$$\mathbf{P}([N_n = k] \cap P_n) = \frac{1}{2} \mathbf{P}([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{P}([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}).$$

On admet que l'on obtiendrait de même

$$\mathbf{P}([N_n = k] \cap F_n) = \frac{1}{2} \mathbf{P}([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{P}([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}).$$

b) En déduire alors que

$$\mathbf{P}(N_n = k) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} \mathbf{P}(N_{n-1} = k-1).$$

11. Soit $n \geq 2$. Montrer que

$$G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s).$$

Calculer $G_1(s)$ et en déduire que

$$G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1} s.$$

12. Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.

III. Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs

13. Montrer que pour tout réel x on a $1-x \leq e^{-x}$.

14. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $\mathbf{P}(A_i)$ diverge. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geq k$, on note

$$C_n = \bigcup_{k \leq i \leq n} A_i = A_k \cup \dots \cup A_n$$

Justifier que $\sum_{i=k}^n \mathbf{P}(A_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

15. Montrer que $\mathbf{P}(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^n \mathbf{P}(\overline{A_i})$ puis, en utilisant la question 13, que

$$\mathbf{P}(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n \mathbf{P}(A_i)\right).$$

En déduire que $\mathbf{P}(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

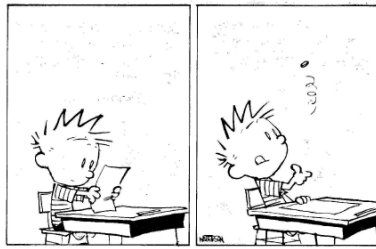
16. Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1} . Que peut-on en déduire pour $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right)$?

Editeur

```
def simulation( ... ):
    X=np.zeros(m)
    N=np.zeros(m)
    X[0]=rd.randint(0,2)
    N[0]= ...
    for i in range(1,m):
        X[i]= ...
        if X[i]==X[i-1]:
            N[i]= ...
        else:
            N[i]= ...
    return ...
```

17. Justifier que $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$ et en déduire que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$.

18. En considérant les événements A_n "on obtient Pile au $(2n)^{\text{ème}}$ et au $(2n+1)^{\text{ème}}$ lancers", montrer que la probabilité d'avoir deux "Pile" consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.



Calvin et Hobbes

Problème B : Loi binomiale négative avec paramètre entier

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant une proportion $p \in]0, 1[$ de boules blanches et une proportion $q = 1 - p$ de boules noires. Les différents tirages sont supposés indépendants.

Pour tout entier naturel k non nul, on note B_k (respectivement N_k) l'événement : "le k -ième tirage donne une boule blanche (resp. une boule noire)".

On note également S_k le rang de la k -ième boule blanche tirée et T_k le rang d'apparition de la dernière boule blanche parmi la première série de k boules blanches consécutives. On suppose que S_k et T_k sont deux variables aléatoires toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Par exemple, si les lancers donnent

$N_1, B_2, N_3, B_4, N_5, B_6, B_7, B_8, \dots$,

alors S_1 et T_1 prennent la valeur 2, S_2 prend la valeur 4, T_2 prend la valeur 7, S_3 prend la valeur 6, T_3 prend la valeur 8, S_4 prend la valeur 7 et S_5 prend la valeur 8.

Partie 1 : simulations de S_k et T_k

19. Compléter la fonction suivante qui prend en arguments p , k et affiche la valeur prise par S_k :

Editeur

```
import numpy.random as rd
def simu2( ... ):
    n=0
    c=0
    while c<k:
        n+=1
        if ... :
            c+=1
    return ...
```

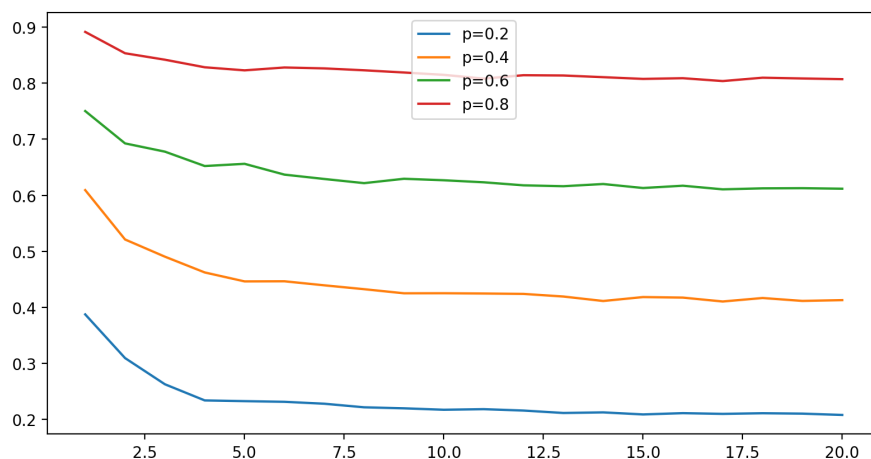
20. Comment modifier le code précédent pour simuler la variable T_k ?

21. On considère les deux codes suivants et on affiche la réponse de la machine au second code.

Editeur

```
# Code 1
def approx(k,p):
    N=10000
    s=0
    for iter in range(N):
        s+= 1/simu2(k,p)
    return s/N

# Code 2
for p in np.linspace(0.2,0.8,4):
    L=np.zeros(20)
    for k in range(1,21):
        L[k-1]=k*approx(k,p)
    Absc=np.linspace(1,nmax,nmax)
    plt.plot(Absc,L)
plt.show()
```



- a) Le premier code permet d'approximer une certaine quantité, laquelle?
 b) Que permet de conjecturer les résultats du second code?

Partie 2 : calcul de l'espérance S_k

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k , on note X_{n-1} la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors des $n-1$ premiers lancers.

22. Reconnaître la loi de X_{n-1} .

23. a) Donner $S_k(\Omega)$ puis écrire l'événement $[S_k = n]$ à l'aide de la variable X_{n-1} et B_n .
 b) En déduire que la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geq k, \quad \mathbf{P}(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

24. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On pose $Z_1 = S_1$ et, pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 2, on pose $Z_i = S_i - S_{i-1}$. On admet que $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Reconnaître la loi des variables aléatoires Z_i parmi les lois discrètes usuelles.

25. a) Exprimer S_k à l'aide d'une somme de certaines des variables Z_i .
 b) En déduire que S_k possède une espérance et

$$\mathbf{E}(S_k) = \frac{k}{p}.$$

Partie 3 : calcul de l'espérance de T_k

26. Comparer les variables aléatoires S_1 et T_1 .

• Calcul d'une espérance conditionnelle

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

27. On admet que T_k possède une espérance. Soit A , un événement de probabilité non nulle. Après avoir rappelé la définition de l'espérance conditionnelle, justifier que $\mathbf{E}(T_k | A)$ est bien définie.
 28. Justifier, en utilisant la variable aléatoire W égale au rang de la première boule noire lors de l'expérience décrite au début de ce problème, que les événements

$$N_1, \quad B_1 \cap N_2, \quad B_1 \cap B_2 \cap N_3, \quad B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap N_4, \quad \dots, \quad B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k \quad \text{et} \quad B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap B_k$$

forment un système complet d'événements.

29. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k , on a $\mathbf{P}_{N_1}(T_k = n) = \mathbf{P}(T_k = n - 1)$, puis en déduire que

$$\mathbf{E}(T_k | N_1) = 1 + \mathbf{E}(T_k).$$

30. De la même façon, vérifier que pour tout i de $[[2, k]]$, $\mathbf{E}(T_k | B_1 \cap \dots \cap B_{i-1} \cap N_i) = i + \mathbf{E}(T_k)$.
 31. Justifier que $\mathbf{E}(T_k | B_1 \cap \dots \cap B_k) = k$.

• Calcul de $\mathbf{E}(T_k)$

32. Déduire des questions précédentes, la relation :

$$E(T_k) = \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)p^j q + E(T_k) \sum_{j=0}^{k-1} p^j q + kp^k.$$

33.   tablir finalement que :

$$E(T_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}.$$

Partie 4 : Loi binomiale négative

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On dit qu'une variable X suit une loi binomiale négative de paramètres k, p si la loi de X est donnée par

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \binom{n+k-1}{n} p^k (1-p)^n.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{BN}(k, p)$.

- Construction d'un échantillon

34. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_k = S_k - k$. Justifier que $X_k \hookrightarrow \mathcal{BN}(k, p)$.

35. a) En utilisant la fonction `simu2`, construire un programme `simuX` qui prend en arguments k, p et simule une variable $X \hookrightarrow \mathcal{BN}(k, p)$.
b) En déduire un programme `Echantillon` qui prend en arguments k, p et N et renvoie une matrice ligne contenant N simulations de la variable $X \hookrightarrow \mathcal{BN}(k, p)$.

- Construction du diagramme en b  tons de la loi de $\mathcal{BN}(k, p)$

36. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{BN}(k, p)$, vérifier par le calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n+1) = (1-p) \frac{n+k}{n+1} P(X = n).$$

37. En déduire une fonction `seuil` qui prend en arguments p, k puis renvoie le plus petit entier naturel N tel que $P(X \leq N) \geq 0.95$.

38. Déduire aussi de la question 36 une fonction `Loi` qui prend en argument k, p et n puis renvoie la matrice ligne (ou liste)

$$[P(X=0) \quad P(X=1) \quad P(X=2) \quad \dots \quad P(X=n)].$$

Ainsi, en exécutant les commandes suivantes. On peut construire le diagramme en b  tons de la loi $\mathcal{BN}(k, p)$.

Editeur

```
n=seuil(p,k)
np.linspace(0,n,n+1)
plt.bar(indice,Loi(n,p,k),color='red')
```

- Application

39. Soient k_1, k_2 deux entiers naturels non nuls et $p \in]0; 1[$. On considère les variables X et Y de lois

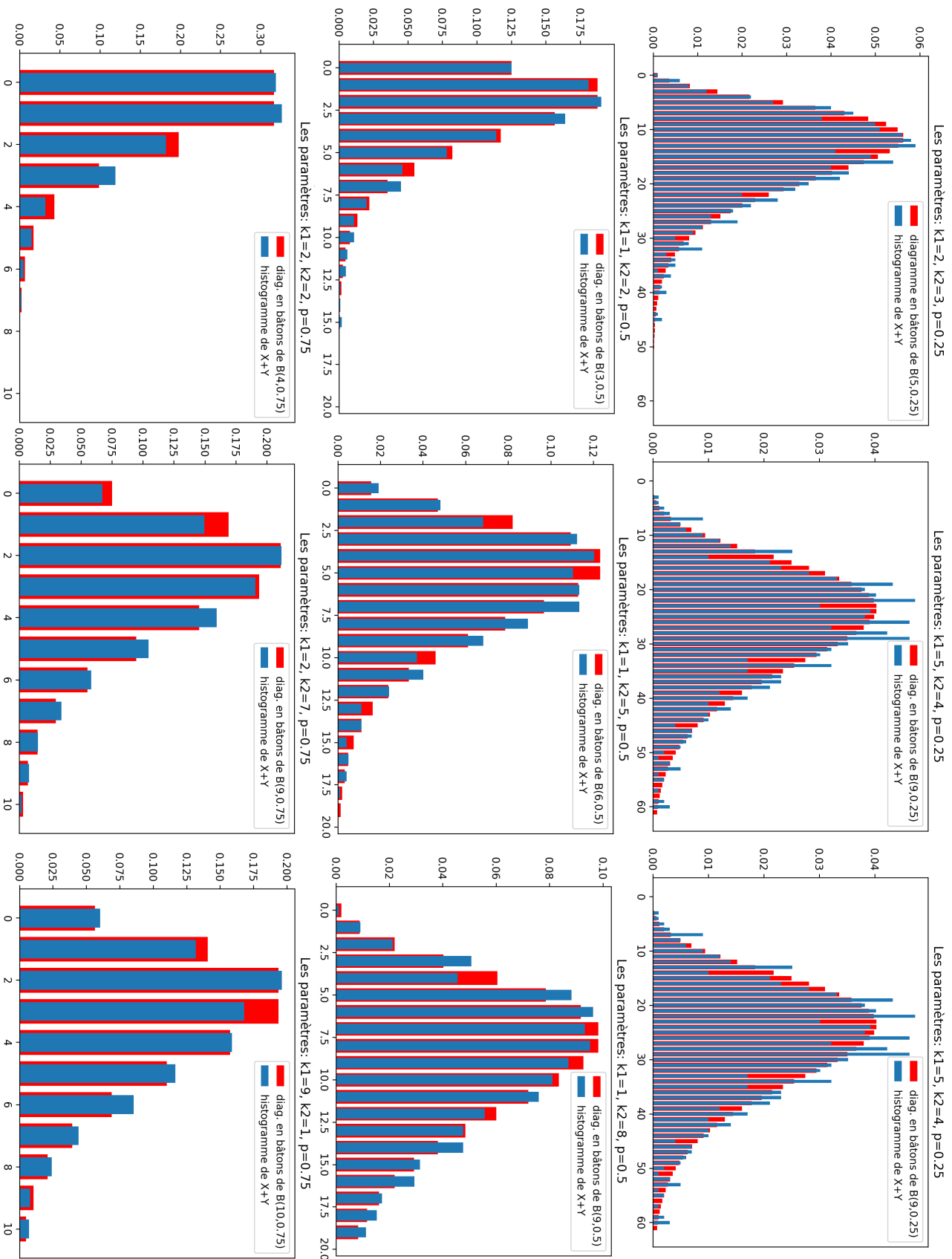
$$X \hookrightarrow \mathcal{BN}(k_1, p) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{BN}(k_2, p).$$

   l'aide du code suivant et des résultats obtenus, conjecturer la loi de la variable $X + Y$.

Editeur

```
indice=np.linspace(0,n,n+1)
plt.bar(indice,Loi(n,p,k1+k2),color='red')

Ech1=Echantillon(k1,p,1000)
Ech2=Echantillon(k2,p,1000)
classe=0.5+np.linspace(-1,n,n+2)
plt.hist(Ech1+Ech2,bins=classe,density='True')
```



- FIN -

DS 2 - sujet *

THÈME : PROBABILITÉS, VARIABLE DISCRÈTE, ESPÉRANCE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice : espérance conditionnelle

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $p \in]0, 1[$.

On considère une urne U_0 contenant n boules blanches et noires, la proportion de boules blanches étant égale à p . On effectue n tirages avec remise dans l'urne U_0 .

Si le nombre de boules blanches tirées dans U_0 est égal à i , on fabrique une urne U_1 contenant i boules blanches et $n - i$ boules noires. On effectue alors n tirages avec remise dans l'urne U_1 . On fabrique de même une urne U_2 contenant n boules avec un nombre de boules blanches égal à celui obtenu lors des n tirages dans U_1 , les autres boules étant noires.

On procède de la même façon pour fabriquer une urne U_3 à partir de l'urne U_2 , une urne U_4 à partir de l'urne U_3 , etc... On note T_k le nombre de boules blanches tirées dans l'urne U_k . On pose de plus $Z_k = T_k(n - T_k)$.

• Simulation informatique.

1. Expliquer et compléter les codes suivants qui permettent de simuler la variable T_k .

Éditeur

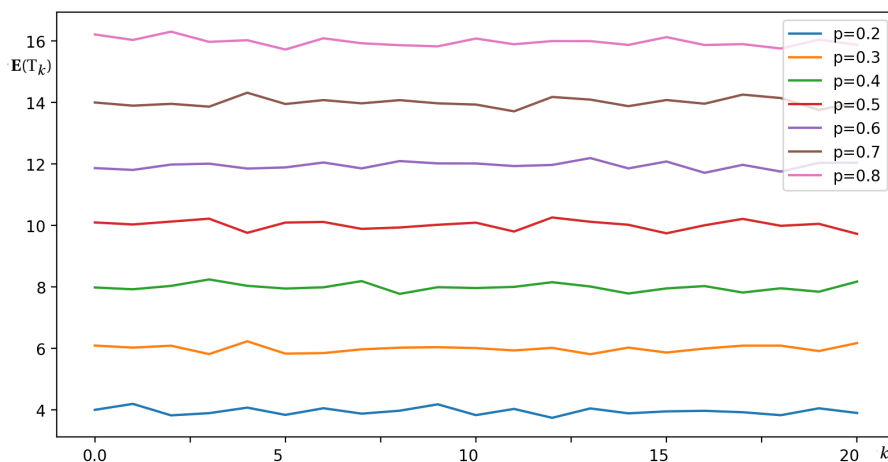
```
import random as rd

def tirage(n,q) :
    C=0
    for iter in range(n):
        if rd.random()<q :
            C+=1
    return C

def simulationT(k,n,p):
    m=1
    T=tirage(n,p)
    while m<=k:
        m+=1
        T=tirage( ... , ... )
    return T
```

2. Proposer un programme qui prend en arguments k et p et renvoie une approximation de $E(T_k)$.

On a tracé ci-dessous les premières approximations de $E(T_k)$ pour $k \in \llbracket 1; 20 \rrbracket$, $n = 20$ pour plusieurs valeurs de $p \in]0; 1[$. Commenter.



- Étude des variables T_k et Z_k .
3. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, préciser $\mathbf{E}(T_{k+1} | T_k = i)$.
 4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{E}(T_k)$ en fonction uniquement de n et p .
 5.
 - a) Calculer $\mathbf{E}(Z_0)$.
 - b) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n} \mathbf{E}(Z_k)$.
 6. Exprimer $\mathbf{E}(Z_k)$ en fonction de n, p, k . En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(Z_k)$.
 7. Montrer que $\mathbf{E}(Z_k) \geq \sum_{i=1}^{n-1} i \mathbf{P}(T_k = i)$, puis que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} i \mathbf{P}(T_k = i) = 0$.
 8. Montrer alors que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(T_k = n) = p$.
 9. Conclure en montrant qu'en répétant le procédé un grand nombre de fois, la probabilité qu'à partir d'un certain rang, les urnes U_k ne soient constituées que de boules blanches est égale de p .

Problème

Nombre moyen de retours à l'origine lors d'une promenade aléatoire sur une droite, dans un plan, dans l'espace.

Partie I : Résultats préliminaires

- Équivalent des sommes partielles de la série harmonique.

10. a) Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

- b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)$.

- Étude d'une suite.

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \sqrt{n} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

11. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1/2}{\sqrt{n(n+1)}}$; en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

12.
 - a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.
 - b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

13. En admettant la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- Simulation d'une loi discrète.

14.
 - a) Soit B une variable aléatoire de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0; 1[$. Donner la loi de la variable $R = 2B - 1$.
 - b) En déduire une fonction python `simuR` qui prend en argument p et simule la variable R .

Partie II : Promenades sur une droite, dans un plan, dans l'espace

Promenades sur $\mathbb{Z}$

Une droite est rapportée à un repère orthonormé $(O, \vec{i})$. Un objet mobile se trouve à l'origine O à l'instant 0 , et son abscisse à l'instant n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) est une variable aléatoire X_n . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = X_n - X_{n-1}$: ainsi $X_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. On suppose que les variables aléatoires A_n sont indépendantes et que sa loi est donnée par

$$\mathbf{P}([A_n = 1]) = \mathbf{P}([A_n = -1]) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la variable aléatoire qui indique le nombre des passages à l'origine de l'objet entre les instants 1 et $2n$ (compris).

- Simulation

15. En reprenant le préliminaire, recopier et compléter le code suivant pour simuler la variable X_n .

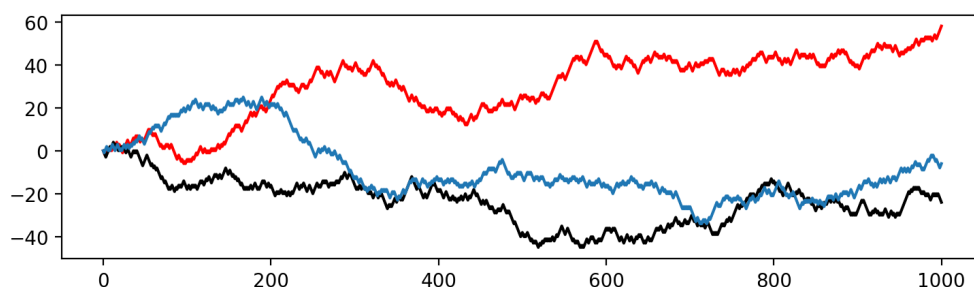
Editeur

```
def simuX(n):
    s=0
    for i ... :
        s= ...
    return s
```

16. a) Comment modifier le code précédent pour avoir une fonction python `Simu1D` qui prend en argument n et renvoie une simulation de

$$[X_0 \ X_1 \ \dots \ X_{n-1} \ X_n].$$

Ci-dessous, trois trajectoires obtenues avec `plt.plot(np.linspace(0,n,n+1), Simu1D())` et $n=1000$.



- b) En déduire un programme `simuU` qui prend en argument n et simule U_n .
- Équivalent de $\mathbf{E}(U_n)$.
17. Reconnaître la loi de $(X_n + n)/2$.
18. En déduire la probabilité pour que l'objet se retrouve à l'origine à l'instant $2n$? à un instant impair $2n+1$?
19. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, O_k désigne la variable aléatoire égale à 1 si l'objet est à l'origine à l'instant k , et 0 sinon. Donner la loi de O_k et vérifier que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(O_{2p}) = \binom{2p}{p} \left(\frac{1}{4}\right)^p.$$

Préciser $\mathbf{E}(O_{2p+1})$ pour $p \in \mathbb{N}$.

20. Justifier que $U_n = \sum_{k=1}^{2n} O_k$. En déduire une expression de l'espérance $\mathbf{E}(U_n)$.
21. Établir par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{E}(U_n) = (2n+1) \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} - 1.$$

22. Exprimer $\mathbf{E}(U_n)$ à l'aide de u_n , et en déduire un équivalent simple de $\mathbf{E}(U_n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Promenades sur $\mathbb{Z}^2$

Un plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un mobile se trouve à l'origine $O = (0, 0)$ à l'instant 0, et ses coordonnées à l'instant $n \in \mathbb{N}$ sont des variables aléatoires X_n et Y_n .

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $A_n = X_n - X_{n-1}$, $B_n = Y_n - Y_{n-1}$. On suppose :

→ Les variables aléatoires A_n (resp. B_n) sont indépendantes et que l'on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n = 1) &= 1/2 & \text{et} & & \mathbf{P}(A_n = -1) &= 1/2 \\ \mathbf{P}(B_n = 1) &= 1/2 & \text{et} & & \mathbf{P}(B_n = -1) &= 1/2. \end{aligned}$$

→ Les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout entier naturel n non nul.

Enfin, pour tout entier naturel n non nul, V_n désigne la variable aléatoire indiquant le nombre des passages à l'origine du mobile entre les instants 1 et $2n$ (compris).

23. Quelle est la probabilité d'un retour à l'origine à l'instant $2n$? D'un retour à l'origine à un instant impair?
24. En procédant comme dans le paragraphe précédent, donner une expression de l'espérance $\mathbf{E}(V_n)$.
25. À l'aide du préliminaire, déduire l'encadrement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{4} \ln(n) \leq \mathbf{E}(V_n) \leq \frac{1}{\pi} (\ln(n) + 1)$$

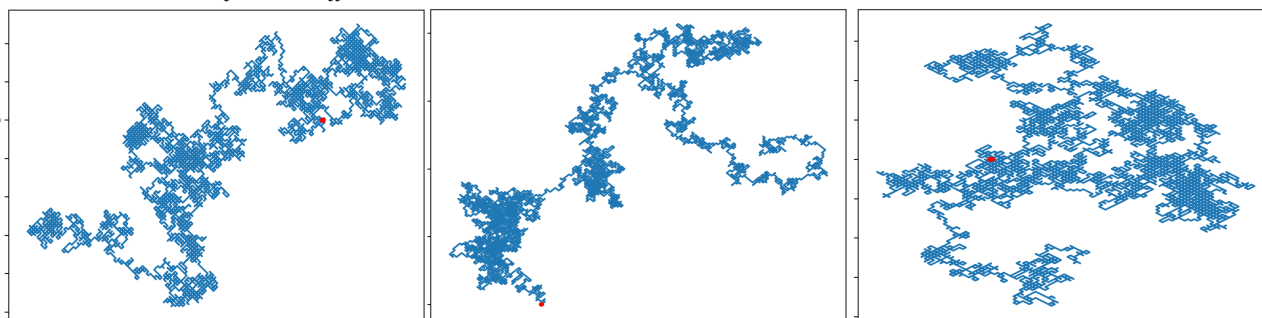
et la limite de la suite $(\mathbf{E}(V_n))_n$.

- Simulation
26. a) Comment simuler les variables X_i, Y_i pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et afficher les matrices lignes

$$[X_0 \ X_1 \ \dots \ X_{n-1} \ X_n] \quad \text{et} \quad [Y_0 \ Y_1 \ \dots \ Y_{n-1} \ Y_n].$$

Comment tracer des trajectoires du mobile dans le plan?

Ci-dessous, trois trajectoires différentes.



b) En déduire une simulation de la variable V_n .

Promenades sur $\mathbb{Z}^3$

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un individu se trouve à l'origine $O = (0, 0, 0)$ à l'instant 0, et ses coordonnées à l'instant $n \in \mathbb{N}$ sont des variables aléatoires X_n, Y_n, Z_n .

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $A_n = X_n - X_{n-1}$, $B_n = Y_n - Y_{n-1}$, $C_n = Z_n - Z_{n-1}$. On suppose :

→ que les variables aléatoires A_n (resp. B_n , resp. C_n) sont indépendantes et que l'on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n = 1) &= 1/2 & \text{et} & & \mathbf{P}(A_n = -1) &= 1/2 \\ \mathbf{P}(B_n = 1) &= 1/2 & \text{et} & & \mathbf{P}(B_n = -1) &= 1/2 \\ \mathbf{P}(C_n = 1) &= 1/2 & \text{et} & & \mathbf{P}(C_n = -1) &= 1/2. \end{aligned}$$

→ que les variables X_n, Y_n et Z_n sont indépendantes pour tout entier $n \geq 1$.

Enfin, pour $n \geq 1$, W_n est la variable aléatoire indiquant le nombre des passages à l'origine de l'individu entre les instants 1 et $2n$ compris.

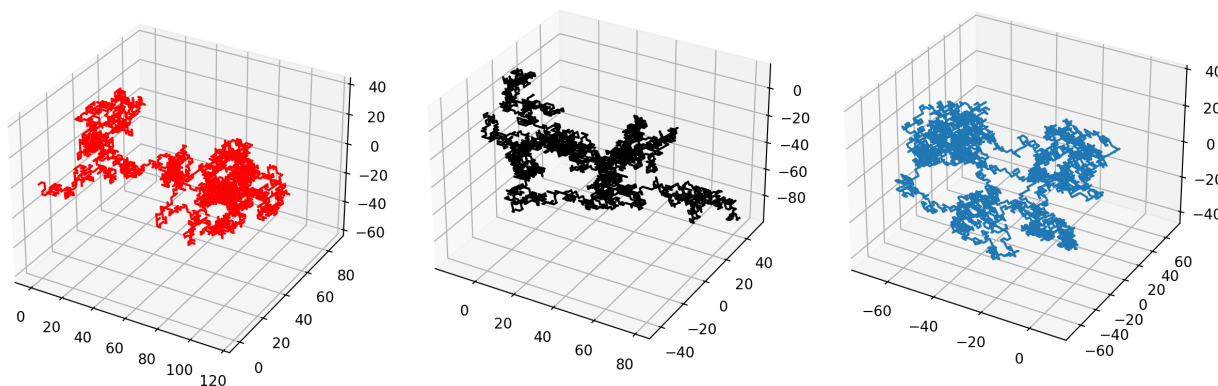
27. Quelle est la probabilité d'un retour à l'origine à l'instant $2n$?

28. En procédant comme précédemment, vérifier que

$$\mathbf{E}(W_n) = \sum_{k=1}^n \frac{u_k^3}{k\sqrt{k}}.$$

29. En déduire que la suite $(\mathbf{E}(W_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède une limite finie.

Quelques trajectoires dans l'espace.



Partie III. Probabilité de retour à l'origine

Retour de l'étude sur une droite

Comme dans la partie II, la variable aléatoire X_n indique l'abscisse de l'objet mobile à l'instant n (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Soit k et s deux entiers naturels fixés, tel que $0 \leq k \leq s$, et $s \geq 2$. On note E_k l'événement suivant :

→ si $k = s$, alors $E_s = \emptyset$ (événement impossible) ;

→ si $k \in [0, s[$, alors E_k est l'événement : "à partir d'un instant où l'événement $[X_n = k]$ est réalisé, la suite des valeurs

$$(X_{n+1}, X_{n+1}, \dots, X_p, \dots)$$

passer une première fois par la valeur 0 sans avoir atteint la valeur s , c'est-à-dire "il existe un entier p_0 tel que $p_0 \geq n, X_{p_0} = 0$ et pour tout $m \in [n; p_0 - 1]$, $0 < X_m < s$ ".

30. En utilisant la formule des probabilités totales, établir la relation

$$\forall k \in [1; s-1], \quad \mathbf{P}(E_k) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(E_{k+1}) + \frac{1}{2} \mathbf{P}(E_{k-1}).$$

31. Préciser $\mathbf{P}(E_0)$ et $\mathbf{P}(E_s)$. Déterminer $\mathbf{P}(E_k)$ en fonction de k et s .
 32. Quelle est la limite de $\mathbf{P}(E_k)$ lorsque s tend vers $+\infty$?
 33. a) En déduire que, si U_n désigne toujours le nombre de passage à l'origine entre les instant 1 et $2n$,

$$\mathbf{P}(U_n \geq 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

- b) Justifier l'affirmation suivante : "presque sûrement, le mobile passe par l'origine".

Étude dans l'espace

On reprend la définition de la variable W_n de la partie II.

34. a) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^N k \mathbf{P}(W_n = k) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}(W_n > k) - N \mathbf{P}(W_n > N).$$

- b) En déduire

$$\mathbf{E}(W_n) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}(W_n > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(W_n > k).$$

35. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(W_n > k) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(X_n)$.
 b) En déduire que la suite $(\mathbf{P}(W_n > k))_n$ admet une limite finie. Dans la suite, on note ℓ_k cette limite.

36. Démontrer que la série $\sum \ell_k$ converge.

Que peut-on dire à présent sur les variations et la convergence de la suite (ℓ_k) ?

37. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $\alpha_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(W_n = k)$.

Exprimer α_k à l'aide des termes de la suite $(\ell_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

- b) Démontrer l'existence d'une variable aléatoire W , telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(W = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(W_n = k) = \alpha_k$.

Indication. Il suffit de vérifier que les réels α_k sont positifs, la série $\sum \alpha_k$ est convergente et la somme sur $\mathbb{N}^$ vaut 1.*

38. On note E_m l'événement le premier retour à l'origine se produit au $2m$ -ième déplacement. Démontrer que

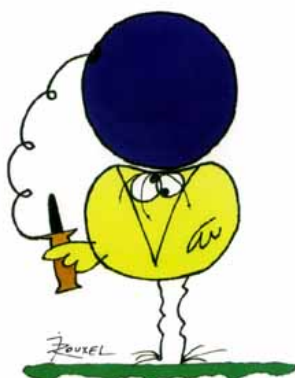
$$[W_n = k+1] = [W_n = k+1] \cap \left(\bigcup_{m=1}^n E_m \right) \quad \text{puis} \quad \mathbf{P}(W_n = k+1) = \sum_{m=1}^{n-k} \mathbf{P}(E_m) \cdot \mathbf{P}(W_{n-m} = k).$$

39. Après avoir justifié que $\mathbf{P}(W > 0) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbf{P}(E_m)$, en déduire que $\alpha_{k+1} = \alpha_k \mathbf{P}(W > 0)$.

40. Conclure en donnant la loi de W en fonction de $\mathbf{P}(W = 0)$. Préciser son espérance.

– FIN –

Les devises Shadok



EN ESSAYANT CONTINUUELLEMENT
ON FINIT PAR RÉUSSIR. DONC :
PLUS ÇA RATE, PLUS ON A
DE CHANCES QUE ÇA MARCHE.

DS 2 A - solution

Problème A

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux possibilités, soit la série commence par pile, soit par face. Il vient :

$$[L_1 = n] = (P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n \cap F_{n+1}) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1}).$$

Les événements qui constituent l'union sont disjoints, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(L_1 = n) &= \mathbf{P}(P_1 \cap \dots \cap P_n \cap F_{n+1}) + \mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1}). \end{aligned}$$

Puis par indépendance des lancers

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(L_1 = n) &= \mathbf{P}(P_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(P_n) \mathbf{P}(F_{n+1}) \\ &\quad + \mathbf{P}(F_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(F_n) \mathbf{P}(P_{n+1}) \\ &= p^n q + q^n p. \end{aligned}$$

- De plus, en se basant sur les séries géométriques convergentes ($p, q \in]0; 1[$)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(L_1 = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^n + q^n p \\ &= q \sum_{n=1}^{+\infty} p^n + p \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \\ &= q \cdot \frac{p}{1-p} + p \cdot \frac{q}{1-q} \\ &= q + p = 1. \end{aligned}$$

- 2.a) De nouveau, deux possibilités :

- Soit on commence par des piles, puis on enchaîne la deuxième série par des faces.
- Soit on commence par des faces puis par des piles. D'où

$$\begin{aligned} [L_1 = n] \cap [L_2 = k] &= (P_1 \cap \dots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \dots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \\ &\quad \cup (F_1 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \dots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}). \end{aligned}$$

Les événements dans l'union sont disjoints et par indépendance

$$\mathbf{P}([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) = p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k.$$

- 2.b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([L_1 = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(L_2 = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([L_2 = k] \cap [L_1 = n]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k. \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau les résultats sur les sommes géométriques

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(L_2 = k) &= q^k p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} + p^k q^2 \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} \\ &= q^k p^2 \cdot \frac{1}{1-p} + p^k q^2 \cdot \frac{1}{1-q} \\ &= q^{k-1} p^2 + p^{k-1} q^2. \end{aligned}$$

3. La convergence absolue de

$$\sum k \mathbf{P}(L_2 = k) = \sum k (p^2 q^{k-1} + p^{k-1} q^2)$$

est assurée par les résultats sur les séries géométriques dérivées ($p, q \in]0; 1[$). De plus

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(L_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbf{P}(L_2 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (k p^2 q^{k-1} + k p^{k-1} q^2) \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} + q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1} \\ &= p^2 \cdot \frac{1}{(1-q)^2} + q^2 \cdot \frac{1}{(1-p)^2} = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Remarque. Il est intéressant de noter que le résultat est indépendant de p .

4. La variable N_1 est une variable certaine égale à 1. D'où

$$\mathbf{E}(N_1) = 1.$$

On a $N_2(\Omega) = \{1; 2\}$. Puis

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_2 = 2) &= \mathbf{P}((P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)) \\ &= \mathbf{P}(P_1 \cap F_2) + \mathbf{P}(F_1 \cap P_2) \\ &= \mathbf{P}(P_1) \mathbf{P}(F_2) + \mathbf{P}(F_1) \mathbf{P}(P_2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Et } \mathbf{P}(N_2 = 1) = 1 - \mathbf{P}(N_2 = 2) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Enfin } \mathbf{E}(N_2) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}.$$

5. Il y a au minimum une série :

$$N_n \geq 1$$

et au maximum n séries :

$$N_n \leq n.$$

De plus, pour tout $k \in [1; n]$, on peut toujours obtenir k séries lors des n premiers lancers. Par exemple :

$$\underbrace{P_1 F_2 P_3 F_4 \dots}_{k \text{ alternances}} \quad \underbrace{\dots}_{\text{toujours la même pièce}}$$

Ainsi $N_n(\Omega) = \{1; n\}$.

De plus

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_n = 1) &= \mathbf{P}((F_1 \cap \dots \cap F_n) \cup (P_1 \cap \dots \cap P_n)) \\ &= \mathbf{P}(F_1 \cap \dots \cap F_n) + \mathbf{P}(P_1 \cap \dots \cap P_n). \end{aligned}$$

Les événements sont disjoints. Et par indépendance

$$\mathbf{P}(N_n = 1) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

L'événement $[N_n = n]$ est réalisé si on a une alternance à chaque lancer. Soit on commence par pile, soit face

$$\mathbf{P}(N_1 = n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

6.

```
def simulation(m):
    X=np.zeros(m)
    N=np.zeros(m)
    X[0]=rd.randint(0,2)
    N[0]=1
    for i in range(1,m):
        X[i]=rd.randint(0,2)
        if X[i]==X[i-1]:
            N[i]=N[i-1]
        else:
            N[i]=N[i-1]+1
    return N
```

7. Par exemple :

```
N=10000
s=0
for iter in range(N):
    s+=simulation(20)[19]
print(s/N)
```

8. Par le théorème de transfert (les sommes sont finies)

$$\mathbf{E}(s^{N_n}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N_n = k) s^k = G_n(s).$$

9. La fonction G_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall t \in [0; 1], \quad G'_n(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N_n = k) \cdot k \cdot s^{k-1}.$$

En particulier

$$G'_n(1) = \mathbf{E}(N_n).$$

10.a) Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $k \in \{1; n\}$. Appliquons la formule des probabilités avec le système complets d'événements formés de P_{n-1} et F_{n-1} .

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([N_n = k] \cap P_n) &= \mathbf{P}(P_{n-1}) \mathbf{P}_{P_{n-1}}([N_n = k] \cap P_n) \\ &\quad + \mathbf{P}(F_{n-1}) \mathbf{P}_{F_{n-1}}([N_n = k] \cap P_n). \end{aligned}$$

→ Si P_{n-1} est réalisé, alors l'apparition de P_n ne crée pas de nouvelle série, donc

$$\mathbf{P}_{P_{n-1}}([N_n = k] \cap P_n) = \mathbf{P}_{P_{n-1}}(N_{n-1} = k).$$

→ Si F_{n-1} est réalisé, l'apparition de P_n donne une nouvelle série.

$$\mathbf{P}_{F_{n-1}}([N_n = k] \cap P_n) = \mathbf{P}_{F_{n-1}}([N_{n-1} = k-1]).$$

Le résultat s'en déduit.

10.b) En admettant le résultat, il vient avec la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (P_n, F_n)

$$\mathbf{P}(N_n = k) = \mathbf{P}(P_n) \mathbf{P}(N_n = k \cap P_n) + \mathbf{P}(F_n) \mathbf{P}([N_n = k] \cap F_n).$$

En reprenant les deux relations de la questions précédentes et en réordonnant les termes

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_n = k) &= \frac{1}{2} \mathbf{P}([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{P}([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{P}([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{P}([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}). \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit par la formule des probabilités totales.

11. Soit $s \in [0; 1]$. D'après ce qui précède

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N_n = k) s^k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (\mathbf{P}(N_{n-1} = k-1) + \mathbf{P}(N_n = k)) s^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N_{n-1} = k) s^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N_{n-1} = k-1) s^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} G_{n-1}(s) + \frac{s}{2} G_{n-1}(s) \\ G_n(s) &= \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s). \end{aligned}$$

De plus,

$$G_1(s) = \sum_{k=1}^1 \mathbf{P}(N_1 = 1) s = \mathbf{P}(N_1 = 1) s = s.$$

La suite $(G_n(s))_n$ est une suite géométrique de raison $(1+s)/2$ et de premier terme s . Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1} s.$$

12. On dérive à partir de l'expression obtenue à la question précédente, il vient

$$G'_n(s) = \frac{n-1}{2} \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-2} s + \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1}.$$

Et par la question 9 :

$$\mathbf{E}(N_n) = G'_n(1) = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}.$$

13. Cette inégalité résulte de la convexité de la fonction exponentielle. La courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de la tangente en 0. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.$$

14. Comme toute probabilité d'un événement est positive, la suite $\left(\sum_{i=k}^n \mathbf{P}(A_i) \right)_{n \geq k}$ est croissante. D'après le théorème de convergence monotone, deux cas sont possibles :

→ soit elle converge vers une limite finie ;

→ soit elle tend vers $+\infty$.

Raisonnons par l'absurde en supposant la convergence vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_{k-1}) + \sum_{i=k}^n \mathbf{P}(A_i) \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_{k-1}) + \ell.$$

Absurde, par hypothèse, la série $\sum_i \mathbf{P}(A_i)$ diverge. Finalement

$$\sum_{i=k}^n \mathbf{P}(A_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

15. D'après les lois de Morgan :

$$\overline{C_n} = \overline{\bigcup_{i=k}^n A_i} = \bigcap_{i=k}^n \overline{A_i}.$$

De plus l'indépendance des événements (A_i) entraîne celle des événements contraires $(\overline{A_i})$. D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C_n) &= 1 - \mathbf{P}(\overline{C_n}) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=k}^n \overline{A_i}\right) \\ &= 1 - \prod_{i=k}^n \mathbf{P}(\overline{A_i}) \\ &= 1 - \prod_{i=k}^n (1 - \mathbf{P}(A_i)). \end{aligned}$$

On minore à l'aide de la question 13 :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C_n) &\geq 1 - \prod_{i=k}^n \exp(-\mathbf{P}(A_i)) \\ &\geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n \mathbf{P}(A_i)\right). \end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=k}^n \mathbf{P}(A_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, il vient

$$1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n \mathbf{P}(A_i)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

On a aussi $\mathbf{P}(C_n) \leq 1$, par le théorème d'encadrement,

$$\mathbf{P}(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

16. La suite $(C_n)_n$ est croissante par l'inclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n \subset C_{n+1}.$$

Par le théorème de la limite monotone, il vient

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=k}^n C_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(C_n) = 1.$$

17. Raisonnons par double inclusion.

Comme $A_i \subset C_i$, il vient

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i.$$

Réciproquement, supposons que l'un des C_i , $i \geq k$ soit réalisé. Notons le C_{i_0} . Alors $C_{i_0} = A_k \cup \dots \cup A_{i_0}$.

Et donc l'un des événements $A_k, \dots, A_{i_0}$ est réalisé, de sorte que $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$ est réalisé. Ainsi on a

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$$

et donc

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i = \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i.$$

D'après la question précédente

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.$$

18. On pose A_n l'événement "on obtient Pile au $(2n)^{\text{ème}}$ et au $(2n+1)^{\text{ème}}$ lancers". Donc par indépendance des lancers

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n) &= \mathbf{P}(P_{2n} \cap P_{2n+1}) \\ &= \mathbf{P}(P_{2n})\mathbf{P}(P_{2n+1}) = p^2. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{P}(A_n)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ diverge grossièrement. D'après ce qui précède

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.$$

Or, à k fixé, l'événement $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$ correspond à "obtenir Pile à un lancer d'ordre pair ainsi qu'au lancer suivant après le k -ième lancer", qui est inclus dans l'événement "obtenir deux Piles consécutifs après le k -ième lancer". Notons B_k ce dernier événement. Alors

$$\mathbf{P}(B_k) \geq \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.$$

Puisque d'autre part on a $\mathbf{P}(B_k) \leq 1$, on en déduit que $\mathbf{P}(B_k) = 1$, et ce pour tout k .

Autrement dit, la probabilité d'avoir deux Piles consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.

Problème B

19.

```
import random as rd

def simu2(k,p):
    n=0
    c=0
    while c<k:
        n+=1
        if rd.random()<p:
            c+=1
    return n
```

20. Il suffit de remettre à 0 le compteur si une boule noire apparaît.

```
def simuT(k,p):
    n=0
    c=0
    while c<k:
        n+=1
        if rd.random()<p:
            c+=1
        else: c=0
    return n
```

21.a) Le code permet d'estimer (approximer) $E(1/S_k)$.

21.b) Pour p donné, le second programme donner une approximation de $E(k/S_k)$ pour $k \in \llbracket 1; 20 \rrbracket$. Ensuite, il affiche les différents résultats obtenus. Pour plusieurs valeurs de p , on constate une convergence des premiers termes de la suite $(E(k/S_k))_k$. On conjecture que

$$\forall p \in]0; 1[, \quad E(k/S_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} p.$$

22. La variable X_{n-1} compte le nombre de succès (avoir une boule blanche) dans $n-1$ répétitions d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes. La probabilité de succès est p . Donc

$$X_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, p).$$

23.a) On a $S_k(\Omega) = \llbracket k; +\infty \rrbracket$ et pour tout entier $n \geq k$

$$[S_k = n] = [X_{n-1} = k-1] \cap B_n.$$

23.b) Comme les $n-1$ premiers tirages sont indépendants du n -ième tirage. Les événements $[X_{n-1} = n-1]$ et B_n sont indépendants. D'où

$$\begin{aligned} P(S_k = n) &= P(X_{n-1} = k-1) P(B_n) \\ &= \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} \cdot q^{(n-1)-(k-1)} \cdot p \\ &= \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}. \end{aligned}$$

Car X_{n-1} suit une loi binomiale.

24. Pour $i \in \mathbb{N}^*$. La variable Z_i donne le nombre de tirages à l'obtention de la i -ème boule blanche après l'obtention de la $(i-1)$ -ème boule blanche. c'est donc le rang d'une "première" apparition de l'événement dans une infinité d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes. D'où

$$Z_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

25.a) Par télescopage

$$S_k - S_1 = \sum_{i=2}^k S_i - S_{i-1} = \sum_{i=2}^k Z_i.$$

Comme $Z_1 = S_1$, il vient

$$S_k = \sum_{i=1}^k Z_i$$

25.b) Par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned} E(S_k) &= \sum_{i=1}^k E(Z_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{p} \quad (\text{Loi géométrique}) \\ E(S_k) &= \frac{k}{p}. \end{aligned}$$

26. On a $T_1 = S_1$.

27. Cours.

28. Notons que

$$\begin{aligned} N_1 &= [W = 1], \quad B_1 \cap N_2 = [W = 2] \\ B_1 \cap B_2 \cap N_3 &= [W = 3], \quad B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap N_4 = [W = 4] \\ B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k &= [W = k], \quad B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap B_k = [W > k]. \end{aligned}$$

Or les évènements.

$$[W = 1], \quad [W = 2], \quad \dots, \quad [W = k], \quad [W > k]$$

forment un système complet d'événements car W est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

29. Si N_1 est réalisé, on peut faire commencer l'expérience au deuxième lancer. Avec ce décalage

$$P_{N_1}(T_k = n) = P(T_k = n-1).$$

Il est admis que T_k admet une espérance, donc T_k admet une espérance sachant N_1 (question 27). Ainsi, on a convergence et

$$\begin{aligned} E(T_k | N_1) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n P_{N_1}(T_k = n) \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} n P_{N_1}(T_k = n) \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} n P(T_k = n-1) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} (i+1) P(T_k = i) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} i P(T_k = i) + \sum_{i=k}^{+\infty} P(T_k = i) \\ E(T_k | N_1) &= E(T_k) + 1. \end{aligned}$$

30. On a

$$\begin{aligned} E(T_k | B_1 \cap \dots \cap B_{i-1} \cap N_i) \\ &= \sum_{n=k+i}^{+\infty} n P_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1} \cap N_i}(T_k = n) \\ &= \sum_{n=k+i}^{+\infty} n P(T_k = n-i) \\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} (j+i) P(T_k = j) = i + E(T_k). \end{aligned}$$

31. Sachant que les k premiers tirages ont tous donné une boule blanche, T_k est nécessairement égal à k . Donc

$$E(T_k | B_1 \cap \dots \cap B_k) = k.$$

32. D'après la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'événements donné à la question 28, il

vient

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(T_k) &= \mathbf{P}(N_1) \mathbf{E}(T_k | N_1) + \mathbf{P}(B_1 \cap N_2) \mathbf{E}(T_k | B_1 \cap N_2) \\
 &\quad + \dots + \mathbf{P}(B_1 \cap \dots \cap B_k) \mathbf{E}(T_k | B_1 \cap \dots \cap B_k) \\
 &= \sum_{i=1}^k \mathbf{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{i-1} \cap N_i) (i + \mathbf{E}(T_k)) + k \mathbf{P}(B_1 \cap \dots \cap B_k) \\
 &= \sum_{i=1}^k p^{i-1} q (i + \mathbf{E}(T_k)) + k p^k \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} (j+1) p^j q + \mathbf{E}(T_k) \sum_{j=0}^{k-1} p^j q + k p^k.
 \end{aligned}$$

33. Mais d'une part, on a

$$\sum_{j=0}^{k-1} p^j q = q \frac{1-p^k}{1-p} = 1 - p^k.$$

D'autre part, pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$\sum_{i=0}^k x^i = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}.$$

En dérivant cette relation par rapport à x , on obtient pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\sum_{i=1}^k i x^{i-1} = \frac{-(k+1)x^k(1-x) + 1-x^{k+1}}{(1-x)^2} = \frac{1-(k+1)x^k + kx^{k+1}}{(1-x)^2}.$$

Et donc en particulier, pour $x = p$,

$$\sum_{j=0}^{k-1} (j+1) p^j q = q \sum_{i=1}^k i p^{i-1} = \frac{1-(k+1)p^k + kp^{k+1}}{q}.$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(T_k) p^k &= \frac{1-(k+1)p^k + kp^{k+1}}{q} + k p^k \\
 &= \frac{1-(k+1)p^k + kp^{k+1} + (1-p)kp^k}{q} \\
 &= \frac{1-p^k}{q}.
 \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

34. Comme $S_k(\Omega) = \llbracket k; +\infty \llbracket$, on a

$$X_k(\Omega) = \mathbb{N}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(X_k = n) &= \mathbf{P}(S_k - k = n). \\
 &= \mathbf{P}(S_k = n+k) \\
 &= \binom{n+k-1}{k-1} p^{n+k} q^{(n+k)-k} \\
 \mathbf{P}(X_k = n) &= \binom{n+k-1}{k-1} p^{n+k} q.
 \end{aligned}$$

Or on a aussi la formule de symétrie des coefficients binomiaux

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{(n+k-1)-(k-1)} = \binom{n+k-1}{n}.$$

Ce qui permet de conclure.

35.a)

```
def simuX(k,p,N):
    return simu2(k,p)-k
```

35.b)

```
def Echantillon(k,p,N):
    X=np.zeros(N)
    for i in range(N):
        X[i]=simu2(k,p)-k
    return X
```

36. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \binom{n+k}{n+1} &= \frac{(n+k)!}{(n+1)!((n+k)-(n+1))!} \\
 &= \frac{n+k}{n+1} \cdot \frac{(n+k-1)!}{n!((n+k-1)-n)!} \\
 &= \frac{n+k}{n+1} \binom{n+k-1}{n}.
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(X = n+1) &= \binom{n+k}{n+1} p^k (1-p)^{n+1} \\
 &= \frac{n+k}{n+1} (1-p) \binom{n+k-1}{n} p^k (1-p)^n \\
 &= \frac{n+k}{n+1} (1-p) \mathbf{P}(X = n).
 \end{aligned}$$

37.

```
def seuil(p,k):
    Pn=p**k
    S=Pn
    n=1
    while S<0.95:
        Pn=(n-1+k)/(n)*Pn*(1-p)
        S+=Pn
        n=n+1
    return n
```

38.

```
def Loi(n,p,k):
    Loi=np.zeros(n+1)
    Loi[0]=p**k
    for i in range(n):
        Loi[i+1]=(i+k)/(i+1)*Loi[i]*(1-p)
    return Loi
```

39. Après avoir testé pour plusieurs valeurs de p , de k_1 , k_2 , on constate que l'histogramme d'un échantillon construit à partir de $X+Y$ est très proche du diagramme en bâtons de la loi binomiale de paramètres k_1+k_2 et p . On conjecture que

$$X+Y \hookrightarrow \mathcal{BN}(k_1+k_2; p).$$

DS 2* - solution

Exercice 1

1.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random as rd

def tirage(n,q) :
    C=0
    for iter in range(n):
        if rd.random()<q :
            C+=1
    return C

def simulationT(k,n,p):
    m=1
    T=tirage(n,p)
    while m<=k:
        m+=1
        T=tirage(n,T/n)
    return T
```

2.

```
def Bidule(k,n,p):
    m=5000
    S=0
    for i in range(m):
        S+=simulationT(k,n,p)
    return S/m
```

En tenant compte qu'on affiche des approximations, on constate que $E(T_k)$ ne semble pas dépendre de k .

3. Si l'événement $[T_k = i]$ est réalisé, on construit alors l'urne U_{k+1} avec i boules blanches et $n-i$ noires. Le nombre de boules blanches tirées dans n tirages sans remise (donc indépendants) dans cette urne suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(i/n, n)$, d'espérance $ni/n = i$. Ainsi

$$E(T_{k+1} | [T_k = i]) = i.$$

4. Sachant que les variables considérées sont finies

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad T_k(\Omega) = [0; n].$$

On peut appliquer la formule de l'espérance totale sans se soucier des problèmes de convergence (les variables sont finies) en utilisant le système complet d'événements $([T_k = i])_{i \in [0; n]}$

$$\begin{aligned} E(T_{k+1}) &= \sum_{i=0}^n P(T_k = i) E(T_{k+1} | [T_k = i]). \\ &= \sum_{i=0}^n P(T_k = i) \cdot i \\ &= E(T_k). \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(E(T_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est constante, indépendante de k .

Or $T_0 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(T_k) = E(T_0) = np.$$

Ce résultat est en accord avec la simulation.

5.a) Par la linéarité de l'espérance et la formule de Koenig-Huygens sachant que

$$T_0 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p),$$

il vient

$$\begin{aligned} E(Z_0) &= nE(T_0) - E(T_0^2) \\ &= n \cdot np - (V(T_0) + E(T_0)^2) \\ &= n^2 p - (npq + n^2 p^2) \\ E(Z_0) &= npq(n-1). \end{aligned}$$

5.b) Appliquons une nouvelle fois la formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements $(T_k = i)_{i \in [0; n]}$. Il vient :

$$E(Z_{k+1}) = \sum_{i=0}^n P(T_k = i) E(Z_{k+1} | [T_k = i]).$$

Or si $[T_k = i]$ est réalisé, il y a dans l'urne U_{k+1} , i boules blanches pour $n-i$ noires. En reprenant le calcul précédent

$$E(Z_{k+1} | [T_k = i]) = n\bar{p}^2 \bar{q}^2 (n-1) \text{ avec } \begin{cases} \bar{p} = i/n \\ \bar{q} = 1 - i/n \end{cases}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} E(Z_{k+1} | [T_k = i]) &= n \frac{i}{n} \cdot \left(1 - \frac{i}{n}\right) (n-1) \\ &= \frac{n-1}{n} i(n-i). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} E(Z_{k+1}) &= \sum_{i=0}^n i(n-i) P(T_k = i) \cdot \frac{n-1}{n} \\ &= E(T_k (n - T_k)) \cdot \frac{n-1}{n} \end{aligned}$$

par la formule de transfert. D'où le résultat.

6. On reconnaît pour $(E(Z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $(n-1)/n$ et de premier terme $E(Z_0) = npq(n-1)$. Il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(Z_k) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k \cdot npq(n-1).$$

7. Par la formule de transfert

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z_k) &= \sum_{i=0}^n i(n-i) \mathbf{P}(T_k = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) \mathbf{P}(T_k = i). \end{aligned}$$

Comme $(n-i) \geq 1$, on a directement

$$\mathbf{E}(Z_k) \geq \sum_{i=1}^{n-1} i \mathbf{P}(T_k = i) \geq 0.$$

Ensuite, par le théorème d'encadrement

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \mathbf{P}(T_k = i) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

8. On a

$$np = \mathbf{E}(T_k) = \sum_{i=1}^{n-1} i \mathbf{P}(T_k = i) + n \mathbf{P}(T_k = n).$$

Par passage à la limite ($k \rightarrow +\infty$) et en divisant par n , on obtient bien le résultat annoncé.

Remarque. En résumé, pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$

$$\begin{aligned} i \notin \{0; n\} &\Rightarrow \mathbf{P}(T_k = i) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \\ i = n &\Rightarrow \mathbf{P}(T_k = n) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} p \\ i = 0 &\Rightarrow \mathbf{P}(T_k = 0) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1 - p. \end{aligned}$$

On dira que $(T_k)_k$ converge en probabilité vers une variable aléatoire T de loi

$$T(\Omega) = \{0; n\} \quad \mathbf{P}(T = 0) = 1 - p, \quad \mathbf{P}(T = n) = p.$$

9. L'événement "à partir d'un certain rang, les urnes U_k ne contiennent que des boules blanches" correspond à

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [T_k = n].$$

(il y a au maximum n boules dans les urnes). Or La suite d'événements $([T_k = n])_k$ est croissante pour l'inclusion. Le théorème de convergence monotone s'applique

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [T_k = n]\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(T_k = n) = p. \end{aligned}$$

10.a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$,

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{k+1}.$$

Par intégration

$$\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt = \frac{1}{k+1}.$$

Par somme et changement de variable $k \leftarrow k+1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}.$$

On conclut par la relation de Chasles.

10.b) Posons $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$. De sorte que les inégalités précédentes deviennent

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n} \leq H_n.$$

Avec $H_n > 0$

$$1 - \frac{1}{H_n} \leq \frac{\ln(n)}{H_n} \leq 1.$$

Comme $H_n \rightarrow +\infty$ (deux arguments : H_n est la somme partielles de la série harmonique divergente, avec $(H_n)_n$ croissante ou $\ln(n) \leq H_n$ avec $\ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$). Il vient par le théorème d'encadrement

$$\frac{\ln(n)}{H_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Ce qui justifie l'équivalent.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \binom{2n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\binom{2n}{n}}.$$

Or

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1}{4} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \frac{2n+1}{n+1} = \frac{(n+1/2)}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

• En développant, on constate que

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - n(n+1) \geq 0.$$

$$\text{D'où} \quad \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \geq n(n+1)$$

et par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$

$$n + \frac{1}{2} \geq \sqrt{n(n+1)} \quad \text{puis} \quad \frac{n + \frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}} \geq 1.$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1.$$

Comme $(u_n)_n$ est positive,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} \geq u_n.$$

Inégalité qui s'étend à $n = 0$ car $u_0 = 0$. on retrouve la définition d'une suite croissante.

12.a) Justifions par récurrence que

$$\mathcal{P}(n): \quad u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

→ Comme $u_0 = 0$ et $\sqrt{0/(2 \cdot 0 + 1)} = 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

→ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{n+1/2}{\sqrt{n(n+1)}} u_n \\ &\leq \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} u_n \leq \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2n+1}{n+1}} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}} \\ &\leq \sqrt{\frac{n+1/2}{2(n+1)+1}} \leq \sqrt{\frac{n+1}{2(n+1)+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

12.b) Comme $n \leq 2n+1$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \sqrt{1} = 1.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge.

13. On a

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4^n}{\pi \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Puis, par produit

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{n} \cdot \frac{4^n}{\pi \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{4^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \neq 0$$

Ainsi
$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi}.$$

14.a) La variable R ne peut prendre que deux valeurs ± 1 avec

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R=1) &= \mathbf{P}(B=1) = p \\ \mathbf{P}(R=-1) &= \mathbf{P}(B=0) = 1-p. \end{aligned}$$

14.b)

```
def simuR(p):
    return 2*(rd.random()<p)-1
```

15.

```
def simuX(n):
    s=0
    for i in range(n):
        s=s+simuR(1/2)
    return s
```

16.a)

```
def simu1D(n):
    y=np.zeros(n+1)
    for i in range(1,n+1):
        y[i]=y[i-1]+simuR(1/2)
    return y
```

17. Rédaction 1.

On a pour $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{X_n + n}{2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k + 1}{2} \right).$$

en reprenant le raisonnement de la question 14a).

$$\frac{A_k + 1}{2} \hookrightarrow \mathcal{B}(p).$$

Les variables $((A_k + 1)/2)_{k \in [1;n]}$ sont indépendantes. On sait alors que

$$\frac{X_n + n}{2} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

Rédaction 2. Notons D_n le nombre de fois où le mobile s'est déplacé sur la droite entre les instants 0 et n . D_n compte le nombre de succès (aller vers la droite) dans n répétitions d'expériences mutuellement indépendantes. La probabilité de succès est $1/2$. Donc D_n suit une loi binomiale de paramètres $(n; 1/2)$. Or sur les n lancers, il y a :

→ D_n déplacements sur la droite;

→ $n - D_n$ déplacements sur la gauche.

Ainsi,

$$X_n = (-1) \cdot (n - D_n) + (+1) \cdot D_n = 2 \cdot D_n - n.$$

Puis

$$\frac{X_n + n}{2} = D_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

18. La probabilité que l'objet se trouve à l'origine au temps $2n$ est

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{2n} = 0) &= \mathbf{P}\left(\frac{X_{2n} + 2n}{2} = n\right) \\ &= \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

L'événement $[X_{2n+1} = 0]$ est impossible. En effet, pour retrouver à l'origine, il faut un nombre égal de déplacements sur la gauche et sur la droite. En particulier, il faut un nombre pair de déplacements.

19. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$O_k(\Omega) = \{0; 1\}$$

Ainsi O_k suit une loi de Bernoulli. Le paramètre est donné par la probabilité de l'objet d'être à l'origine, soit

$$\begin{cases} p_k = 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ p_k = \left(\frac{2k/2}{k/2}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^{k/2} & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Comme l'espérance s'identifie au paramètre pour une loi de Bernoulli, le résultat s'en déduit. En particulier

$$\mathbf{E}(O_{2p+1}) = 0.$$

20. La variable $\sum_{k=1}^{2n} O_k$ est une somme de 0 et de 1. Ainsi $\sum_{k=1}^{2n} O_k$ compte le nombre de 1, soit le nombre de fois où $[O_k = 1]$ est réalisé. C'est aussi le nombre de retour à l'origine entre les instants 1 à $2n$, c'est-à-dire U_n .

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{2n} O_k\right) = \sum_{k=1}^{2n} \mathbf{E}(O_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} p_k.$$

D'où pour $k = 2p$ (k pair)

$$\mathbf{E}(U_n) = \sum_{p=0}^n \binom{2p}{p} \left(\frac{1}{4}\right)^p.$$

21. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété

$$\mathcal{P}(n): \quad \mathbf{E}(U_n) = (2n+1) \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} - 1.$$

est vraie.

→ Donnons deux rédactions pour l'initialisation.

Rédaction 1

Pour $n = 1$, d'une part

$$(2 \times 1 + 1) \binom{2 \times 1}{1} \frac{1}{4^1} - 1 = \frac{1}{2}$$

D'autre part, entre les instants 1 et 2, les différentes trajectoires possibles sont

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}$$

les trajectoires sont équiprobables, U_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Ainsi

$$\mathbf{E}(U_1) = \frac{1}{2}$$

$\mathcal{P}(1)$ est ainsi prouvée.

Rédaction 2.

$$\mathbf{E}(U_1) = \sum_{p=1}^1 \binom{2p}{p} \frac{1}{4^p} = \frac{\binom{2}{1}}{4} = \frac{1}{2}.$$

→ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(U_{n+1}) &= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{2p}{p} \frac{1}{4^p} \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{2p}{p} \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1} \\ &= \mathbf{E}(U_n) + \frac{1}{4^{n+1}} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

En reprenant un résultat de la question 11 et par $\mathcal{P}(n)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(U_{n+1}) &= (2n+1) \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} - 1 + \frac{(2n+2)(2n+1)}{4^{n+1}(n+1)^2} \binom{2n}{n} \\ &= (2n+1) \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} - 1 + \frac{2n+1}{4^n \cdot 2 \cdot (n+1)} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{(2n+1)}{4^n} \binom{2n}{n} \left(1 + \frac{1}{(2n+2)}\right) - 1 \\ &= \frac{(2n+3)(2n+1)}{(2n+2) \cdot 4^n} \binom{2n}{n} - 1 \\ &= \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{4^{n+1}(n+1)^2} \binom{2n}{n} - 1 \\ &= (2n+3) \binom{2(n+1)}{n+1} \frac{1}{4^{n+1}} - 1. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vérifiée au rang suivant.

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{E}(U_n) = (2n+1) \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} - 1 = \frac{(2n+1)}{\sqrt{n}} u_n - 1.$$

On a vu que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Par produit

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n}} u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

Comme $1 = o(\sqrt{n})$, on a

$$\mathbf{E}(U_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

23. D'après ce qui précède, la probabilité que chacune des coordonnées se retrouve à l'origine à l'instant donné n est :

0 si n est impair,

$\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}$ si $n = 2k$ est un entier pair.

Comme les comportements des deux coordonnées sont indépendants et identiquement distribués, la probabilité d'un retour à l'origine est

$$\mathbf{P}((X_n; Y_n) = (0; 0)) = \mathbf{P}([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]).$$

Par indépendance des variables X_n, Y_n et le fait que X_n et Y_n ont même loi, cette probabilité vaut :

$$\mathbf{P}([X_n = 0])^2.$$

Cette probabilité est nulle pour un instant impair. Pour un instant pair $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, on trouve

$$p = \left(\frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \right)^2.$$

24. La variable V_n qui indique le nombre de retours à l'origine entre les instants 1 et $2n$, peut s'écrire comme somme de variables O'_k indiquant les retours à l'origine à l'instant k , les variables O'_{2k} suivent des lois de Bernoulli de paramètre

$$\left(\frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \right)^2.$$

Les variables O'_{2k+1} sont nulles, et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(V_n) &= \sum_{k=1}^{2n} \mathbf{E}(O'_k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(O'_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \right)^2. \end{aligned}$$

25. On peut exprimer l'espérance de V_n à l'aide de la suite $(u_n)_n$:

$$\mathbf{E}(V_n) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \right)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{u_k^2}{k}.$$

De plus, la suite (u_k) est croissante. Elle est minorée par son premier terme $u_1 = \frac{1}{2}$ et majorée par sa limite $1/\sqrt{\pi}$. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{4k^2} \leq \frac{u_k^2}{k} \leq \frac{1}{\pi}.$$

Par somme, il vient

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \mathbf{E}(V_n) \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

À l'aide du préliminaire

$$\frac{1}{4} \ln(n) \leq \mathbf{E}(V_n) \leq \frac{1}{\pi} H_n \leq \frac{1}{\pi} (\ln(n) + 1)$$

Par minoration :

$$\mathbf{E}(V_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Remarque. En affinant les inégalités, on montre que

$$\mathbf{E}(V_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n).$$

26.

```
def simu2D(n):
    x=np.zeros(n+1)
    y=np.zeros(n+1)
    for i in range(1,n+1):
        x[i]=x[i-1]+simuR(1/2)
        y[i]=y[i-1]+simuR(1/2)
    plt.plot(x,y)
    plt.show()
```

27, 28. D'après ce qui précède, la probabilité que chacune des coordonnées se retrouve à l'origine à l'instant donné n est : 0 si n est impair, et

$$\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}$$

si $n = 2k$ est un entier pair. Comme les comportements des trois coordonnées sont indépendants et de même loi, la probabilité d'un retour à l'origine est

$$\left(\frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \right)^3 \text{ si } n = 2k, k \in \mathbb{N}$$

et 0 si n est impair.

La variable W_n s'exprime comme précédemment comme somme de variables O''_k indiquant les retours à l'origine à l'instant k , les variables O''_{2k} suivent des lois de Bernoulli de paramètre

$$\left(\frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \right)^3 = \frac{u_k^3}{k\sqrt{k}},$$

les variables O''_{2k+1} sont nulles et $\mathbf{E}(W_n)$ vaut

$$\mathbf{E}(W_n) = \sum_{k=1}^{2n} \mathbf{E}(O''_k) =$$

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E}(O''_{2k}) = \sum_{k=1}^n \frac{u_k^3}{k\sqrt{k}}.$$

29. On a vu que

$$u_k \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Par produit

$$\frac{u_k^3}{k\sqrt{k}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}^3} \cdot \frac{1}{k^{3/2}}.$$

La série de Riemann $\sum 1/k^{3/2}$ est convergente. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série

$$\sum \frac{u_k^3}{k\sqrt{k}}$$

est donc convergente. La suite des sommes partielles est convergente, c'est-à-dire $(\mathbf{E}(W_n))_n$ est convergente vers une limite finie.

30. Considérons le système complet d'événements constitué de

$$[A_{n+1} = 1], \quad [A_{n+1} = -1]$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(E_k) \\ = \mathbf{P}(A_{n+1} = 1) \mathbf{P}_{[A_{n+1}=1]}(E_k) + \mathbf{P}(A_{n+1} = -1) \mathbf{P}_{[A_{n+1}=-1]}(E_k). \end{aligned}$$

Or si l'événement $[A_{n+1} = 1]$ est réalisé, on a $X_{n+1} = k + 1$. L'événement E_k est réalisé dans ce cas, si le mobile passe par l'origine pour la première fois sans dépasser s . C'est E_{k+1} . Ainsi

$$\mathbf{P}_{[A_{n+1}=1]}(E_k) = \mathbf{P}(E_{k+1}).$$

De même

$$\mathbf{P}_{[A_{n+1}=-1]}(E_k) = \mathbf{P}(E_{k-1}).$$

Le résultat s'en déduit.

31. On a

$$\mathbf{P}(E_0) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(E_s) = 0.$$

Pour exprimer $\mathbf{P}(E_k)$, on peut utiliser les résultats sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Ici on peut remarquer que

$$\forall k \in \llbracket 1; s-1 \rrbracket, \quad \mathbf{P}(E_{k+1}) - \mathbf{P}(E_k) = \mathbf{P}(E_k) - \mathbf{P}(E_{k-1}).$$

C'est donc une constante. Notons $c \in \mathbb{R}$ cette constante. Ainsi

$$\mathbf{P}(E_{k+1}) = \mathbf{P}(E_k) + c.$$

À l'aide des résultats sur les suites arithmétiques

$$\forall k \in \llbracket 0; s \rrbracket, \quad \mathbf{P}(E_k) = \mathbf{P}(E_0) + kc.$$

Les conditions aux bords imposent $\mathbf{P}(E_s) = 1 + sc = 0$

$$\mathbf{P}(E_k) = 1 + \left(-\frac{k}{s}\right).$$

32.a) On a directement

$$\mathbf{P}(E_k) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 1.$$

33.a) D'après ce qui précède, à plus ou moins long terme un retour à l'origine est quasi-certain d'après la question précédente. On en déduit que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(U_n \geq 1) = 1.$$

33.b) Notons B l'événement "presque sûrement, le mobile passe par l'origine". On a

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [U_n \geq 1].$$

La suite $([U_n \geq 1])_n$ est croissante pour l'inclusion, d'après le théorème de convergence monotone

$$\mathbf{P}(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(U_n \geq 1) = 1.$$

34. Voir exercice de TD - un classique.

35. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\mathbf{P}(W_n > k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\mathbf{P}(W_n > k)}_{\geq 0} = \mathbf{E}(W_n).$$

Or la suite $(\mathbf{E}(W_n))$ est croissante, elle est majorée par sa limite ℓ . D'où

$$\mathbf{P}(W_n > k) \leq \ell.$$

De plus,

$$[W_n > k] \subset [W_{n+1} > k].$$

Par croissance de la probabilité

$$\mathbf{P}(W_n > k) \leq \mathbf{P}(W_{n+1} > k)$$

Ainsi la suite $(\mathbf{P}(W_n > k))_n$ est croissante et majorée, elle converge.

36. Notons que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\ell_k \geq 0.$$

On a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(W_n > k) &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(W_n > k) \\ &\leq \mathbf{E}(W_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(W_n) = \ell. \end{aligned}$$

Par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{k=0}^N \ell_k \leq \ell.$$

Or la suite $\left(\sum_{k=0}^N \ell_k\right)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante. D'après le théorème de convergence monotone, cette suite converge. Autrement dit, la série $\sum \ell_k$ converge. On en déduit que

$$\ell_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}(W_n > k_{k+1}) \leq \mathbf{P}(W_n > k).$$

Par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$

$$\ell_{k+1} \leq \ell_k.$$

La suite est décroissante.

37.a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$[W_n = k] = [W_n > k-1] \setminus [W_n > k].$$

Sachant que $[W_n > k] \subset [W_n > k-1]$, il vient

$$\mathbf{P}(W_n = k) = \mathbf{P}(W_n > k-1) - \mathbf{P}(W_n > k).$$

Par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$, il vient

$$\alpha_k = \ell_{k-1} - \ell_k.$$

37.b) Comme la suite $(\ell_k)_k$ est décroissante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k \geq 0$$

De plus pour $N \in \mathbb{N}^*$, par télescopage

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1 - \ell_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

La série $\sum \alpha_k$ est convergente et la somme vaut 1. Ce qui permet d'affirmer l'existence de la variable W .

38. Les événements $(E_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux disjoints. De plus, si l'événement $[W_n = k+1]$ est réalisé, alors au moins un des événements $(E_m)_{m \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est réalisé. Soit

$$[W_n = k+1] \subset \bigcup_{m=1}^n E_m.$$

(Il faut bien commencer par un premier retour). Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(W_n = k+1) &= \mathbf{P}\left([W_n = k+1] \cap \left(\bigcup_{m=1}^n E_m\right)\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{m=1}^n (E_m \cap [W_n = k+1])\right) \\ &= \sum_{m=1}^n \mathbf{P}(E_m \cap [W_n = k+1]) \\ &\quad \text{union disjointe} \\ &= \sum_{m=1}^n \mathbf{P}(E_m) \mathbf{P}_{E_m}(W_n = k+1). \end{aligned}$$

Si E_m est réalisé alors un premier retour est réalisé au temps m . Pour que $[W_n = k+1]$ soit réalisé, il faut et il suffit que entre les instants $2m+1$ et $2n$, il y ait k retours exactement à l'origine. Comme les déplacements sont indépendants, la probabilité est identique que celle d'avoir k retours à l'origine entre l'instant 1 et $(2n) - (2m+1) + 1 = 2(n-m)$. Soit

$$\mathbf{P}_{E_m}(W_n = k+1) = \mathbf{P}(W_{n-m} = k).$$

Ce qui donne la formule.

39. L'événement $[W > 0]$ est réalisé

si et seulement si il y a au moins un retour à l'origine

si et seulement si il existe un instant $2m$ où le mobile est à l'origine pour la première fois

si et seulement si il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que E_m soit réalisé. D'où

$$[W > 0] = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} E_m.$$

Comme les événements E_m sont deux à deux disjoints

$$\mathbf{P}([W > 0]) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(E_m)$$

Ensuite, en passant à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans la relation de la question précédente

$$\alpha_{k+1} = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbf{P}(E_m) \alpha_k = \mathbf{P}(W > 0) \alpha_k.$$

40. On reconnaît une suite géométrique de raison $\mathbf{P}(W > 0)$ et de premier terme

$$\mathbf{P}(W = 0) = 1 - \mathbf{P}(W > 0).$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(W = k) = (1 - \mathbf{P}(W > 0)) \mathbf{P}(W > 0)^k.$$

On peut remarquer que $W + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathbf{P}(W > 0))$. Ainsi par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(W) &= \mathbf{E}(W + 1) - 1 \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}(W > 0)} - 1. \end{aligned}$$

Commentaire. On a démontré qu'une promenade aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ passe une infinité par l'origine si la série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^{d/2}}$$

est convergente. Ainsi, il y a convergence sur la droite, dans le plan mais pas dans l'espace. Notons que l'on peut améliorer le résultat : sur une droite ou dans le plan, la promenade repasse presque sûrement une infinité de fois par l'origine. On illustre ce théorème en disant qu'un homme saoul retrouvera presque sûrement son chemin vers la maison alors qu'un oiseau saoul ne retrouvera pas nécessairement son nid.