CHAPITRE 10

Algèbre bilinéaire

Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre.

Inscription que Platon aurait fait graver à l'entrée de l'Académie, son école d'Athènes.

1 Produits scalaires

1.1 Définitions et exemples

DÉFINITION — forme bilinéaire

Soient E *un espace vectoriel et* $\varphi : \mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathbb{R}$ *une application.*
On dit que φ *est une* ***forme bilinéaire*** *si elle est*

- *linéaire à droite*
$$\forall\, u,\ v,\ w\in\mathrm{E},\quad \forall\lambda,\ \mu\in\mathbb{R},\qquad \varphi(u\,,\,\lambda v+\mu w)=\lambda\varphi(u,v)+\mu\varphi(u,w).$$
- *linéaire à gauche*
$$\forall\, u,\ v,\ w\in\mathrm{E},\quad \forall\lambda,\ \mu\in\mathbb{R},\qquad \varphi(\lambda v+\mu w\,,\,u)=\lambda\varphi(v,u)+\mu\varphi(w,u).$$

DÉFINITION — produit scalaire

Soit $\varphi : \mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathbb{R}$ *une application. On dit que* φ *est un* ***produit scalaire*** *si :*

- φ *est une forme bilinéaire.*
- φ *est symétrique :* $\qquad \forall\, u,\ v\in\mathrm{E},\qquad \varphi(u,v)=\varphi(v,u).$
- φ *est positive :* $\qquad \forall\, u\in\mathrm{E},\qquad \varphi(u,u)\geqslant 0.$
- φ *est définie :* $\qquad \forall\, u\in\mathrm{E},\qquad \varphi(u,u)=0 \quad\Rightarrow\quad u=0_{\mathrm{E}}.$

Remarque. Si φ est linéaire à droite et symétrique alors φ est linéaire à gauche et donc bilinéaire. En pratique, on démontre donc d'abord la symétrie et une linéarité (à gauche ou droite) pour obtenir la condition de bilinéarité.

Notation. On écrit souvent $\langle u, v\rangle$ au lieu de $\varphi(u,v)$.

Exemples. Nous en donnons plusieurs pour illustrer la diversité des situations. Les preuves seront traitées au fur et à mesure des exercices.

- *Dans* $\mathbb{R}^n$.

Pour tous $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = \left(y_1, \dots, y_n\right)$ dans $\mathbb{R}^n$, posons $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.
Alors $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé **produit scalaire canonique sur** $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Soient u, v, $w \in \mathbb{R}^n$ et λ, $\mu \in \mathbb{R}$. On pose

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad v = \left(y_1, y_2, \dots, y_n\right) \quad \text{et} \quad w = (z_1, z_2, \dots, z_n).$$

→ **Symétrie**.

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle v, u\rangle.$$

→ **Bilinéarité**. Commençons par la linéarité à droite.

$$\langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\lambda y_i + \mu z_i\right) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \mu \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \lambda\langle u, v\rangle + \mu\langle u, w\rangle.$$

Puis, par symétrie, on a la linéarité à gauche et donc la bilinéarité.

→ **Définie positive**.

$$\langle u, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geqslant 0.$$

Avec égalité si et seulement si pour chaque indice i, $x_i = 0$. Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul. On a donc

$$\langle u, u\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u = (x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Conclusion. On a bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}$.

■

- *Dans* $\mathbb{R}_n[x]$. ⋙ *Voir exercice 6.*

Donnons deux exemples dans le cas polynomial.

→ Soient a_0, $a_1, \dots$, a_n, $n+1$ réels deux à deux distincts. L'application suivante est un produit scalaire

$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[x] \longmapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(a_k)\mathrm{Q}(a_k).$$

→ On peut aussi poser pour a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[x] \longmapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_a^b \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

- *Dans* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

L'application $\varphi : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longmapsto {}^t\mathrm{XY}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On l'appelle produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Noter, comme souvent, qu'on identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$.

- *Dans* $\mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$. ⋙ *Voir exercice 11.*

Pour A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\qquad \langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^t\mathrm{B}\right).$

- *Dans* $\mathscr{C}^0([a;b])$ avec $a < b$. ⋙ *Voir exercice 4.*

Pour f, $g \in \mathscr{C}^0([a;b])$ $\qquad \langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$

DÉFINITION **norme**

Soit E, *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* φ. *L'application*

$$\mathrm{N} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \mathrm{N}(u) = \sqrt{\varphi(u, u)} \end{array} \right.$$

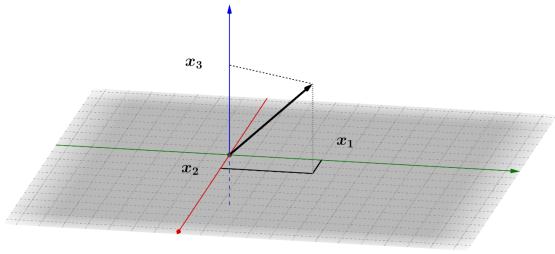
est appelée ***norme associée au produit scalaire*** φ.

Notation. On note souvent $\|\cdot\|$ au lieu de N.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^n$, la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique est définie par :

$$\forall\, u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2}.$$

Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on constate que la norme représente la distance à l'origine, ou encore la longueur du vecteur.



Remarque. Par extension, pour u, $v \in \mathrm{E}$, $\|u\|$ représente la « longueur » du vecteur u alors que $\|u - v\|$ correspond à la « distance » entre les deux vecteurs.

1.2 Propriétés du produit scalaire, de la norme

PROPOSITION — **règles de calcul**

Soit E *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *dont* $\|\cdot\|$ *est la norme associée.*

- $\forall\, u \in \mathrm{E}$, $\qquad \|u\| = 0 \iff u = 0_{\mathrm{E}}.$
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, u \in \mathrm{E}$, $\qquad \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|.$
- $\forall\, u$, $v \in \mathrm{E}$, $\qquad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2.$

Preuve. • Raisonnons par équivalence en utilisant le fait qu'un produit scalaire est défini. Soit $u \in \mathrm{E}$

$$\|u\| = 0 \iff \langle u, u\rangle = \|u\|^2 = 0 \iff u = 0_{\mathrm{E}}.$$

• Soient $u \in \mathrm{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme le produit scalaire est bilinéaire

$$\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle u, u\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle u, u\rangle} = |\lambda| \cdot \|u\|.$$

• Soient u, $v \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle && \text{bilinéarité}\\
&= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle\\
&= \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle && \text{symétrie}\\
\|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2.
\end{aligned}$$

■

Exercice 1

✦ ✎ **Identité du parallélogramme et formule de polarisation**

Montrer que pour tous u, $v \in \mathrm{E}$,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \text{et} \quad \langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right).$$

p. 25

THÉORÈME — **inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit E *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *dont* $\|\cdot\|$ *est la norme associée.*

$$\forall\, u,\ v \in \mathrm{E}, \qquad |\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si la famille (u, v) *est liée.*

Exercice 2

✦✦ ✎ **Preuve**

On suppose $u \neq 0_E$ et on définit l'application P sur $\mathbb{R}$ par $P(\lambda) = \|\lambda u + v\|^2$.

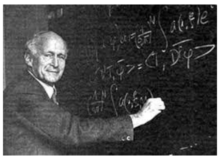
1. Vérifier que P est un polynôme de degré 2. Préciser son discriminant
2. Conclure (sans oublier le cas d'égalité).

p. 25

Exercice 3

✧ **Qui est qui ?**

Parmi les photos ci-dessous, reconnaître Hermann Amandus Schwarz (mathématicien allemand) et Laurent Schwartz (mathématicien français, médaille Fields pour ses travaux sur la théorie des distributions).



p. 25

Exemple. En reprenant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient

$$\forall (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n, \qquad \left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n {x_i}^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^n {y_i}^2}.$$

"Le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est méconnu et beaucoup des tentatives pour prouver l'inégalité et son cas d'égalité ne sont que paraphrases et esbroufe."

Rapport de Jury : HEC 2019

Exercice 4

✦ 1. Justifier que l'application suivante est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a;b])$.

$$\forall f, g \in \mathscr{C}^0([a;b]), \qquad \varphi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Expliciter l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire.
3. Montrer que si $f \in \mathscr{C}^0([0;1])$ avec f ne s'annulant pas sur $[0;1]$

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 1.$$

Préciser le cas d'égalité.

p. 25

PROPOSITION — inégalité triangulaire

Pour tous $u, v \in E$,

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

Preuve. Soient $u, v \in E$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle \\ &\leqslant \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

D'où le résultat car la fonction racine carrée est croissante et la norme positive. ■

Exercice 5

✦✦ Soient E un espace euclidien et $B = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

p. 26

1. Soient $u, v \in E$.
   Que peut-on dire de u et v si on a le cas d'égalité $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$?
2. Démontrer que B est une partie strictement convexe de E, c'est-à-dire que, pour tous $x, y \in B$ avec $x \neq y$, tout $t \in]0, 1[$, on a $\|tx + (1-t)y\| < 1$.
3. Illustrer ce résultat dans $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire canonique.

Remarque. Par récurrence, on montre que pour tout famille finie $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de vecteurs de E

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} u_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|.$$

1.3 Orthogonalité

Orthogonalité et vecteurs

Considérons $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad \text{où} \quad u = (x_1, x_2), \quad v = (y_1, y_2).$$

Mais, on a aussi $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cos(\theta)$ où θ est une mesure de l'angle entre u et v.

Preuve.

...

■

En particulier, $\langle u, v \rangle = 0$ si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). Les vecteurs u et v sont orthogonaux. Généralisons ce cas par une définition.

DÉFINITION — **vecteurs orthogonaux**

Soient E*, un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Deux vecteurs u et v de E *sont dits* ***orthogonaux****, noté $u \perp v$, si* $\langle u, v \rangle = 0$.

Exemples. Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

...

Remarque. Le seul vecteur de E qui soit orthogonal à tous les autres vecteurs de E est le vecteur nul. Autrement dit, pour tout $u \in E$, on a l'équivalence :

$$\left(\forall v \in E, \qquad \langle u, v \rangle = 0 \right) \iff u = 0_E.$$

Preuve. En effet, prouvons ce point par double-implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Pour $v = u$, on a directement $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = 0$, puis $u = 0_E$ car le produit scalaire est défini.

$\boxed{\Leftarrow}$ Par linéarité à gauche du produit scalaire, pour tout $v \in E$,

$$\langle 0_E, v \rangle = \langle 0 \cdot 0_E, v \rangle = 0 \cdot \langle 0_E, v \rangle = 0.$$

■

⚠ **Attention.** La notion d'orthogonalité est relative au produit scalaire.

Exercice 6

✦✦ ✎ **Deux produits scalaires sur $\mathbb{R}_2[x]$**

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$, on pose

$$\varphi_1(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) \quad \text{et} \quad \varphi_2(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

p. 26

1. Vérifier que φ_1 et φ_2 définissent deux produits scalaires sur $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Notons P_1 le polynôme d'expression $P_1(x) = x$.
   Donner un vecteur orthogonal à P_1 relativement à φ_1 mais non orthogonal pour φ_2 et inversement.

THÉORÈME — **de Pythagore**

Deux vecteurs u et v sont ***orthogonaux*** *si et seulement si*

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Preuve. Il suffit de rappeler que pour tous $u, v \in E$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle.$$

■

DÉFINITIONS — **famille normée, orthogonale, orthonormée**

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

- *La famille est dite* ***normée*** *si pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\|u_i\| = 1$.*
- *La famille est dite* ***orthogonale*** *si, pour tout $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$ avec $i \neq j$, $u_i \perp u_j$.*
- *La famille est dite une famille* ***orthonormée*** *(ou orthonormale) si c'est une famille orthogonale et normée.*

Exercice 7

✦✦ *d'après ESCP 2001*

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que pour tout x réel : $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.

1. Montrer que l'application :
   $$(P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$
   définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.
2. Montrer que la famille $(T_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[x]$ muni de ce produit scalaire.
3. Comment obtenir une base orthonormée ?

p. ??

Remarques. Autrement dit, la famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ est orthonormée si et seulement si

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \qquad \langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Le théorème de Pythagore se généralise, si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2.$$

Preuve. Procédons par récurrence sur p.

→ *Initialisation.* Pour $p=1$, l'énoncé est directement vrai.

→ *Hérédité.* Soit $p\in\mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie au rang p. Si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_{p+1})$ est orthogonale. En particulier $u_1+\cdots+u_p$ est orthogonal à u_{p+1} car

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} u_i, u_{p+1} \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\langle u_i, u_{p+1}\rangle}_{0} = 0.$$

Par application du théorème de Pythagore (avec deux vecteurs)

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i=1}^{p+1} u_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{p} u_i + u_{p+1} \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{p} u_i \right\|^2 + \|u_{p+1}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2 + \|u_{p+1}\|^2 = \sum_{i=1}^{p+1} \|u_i\|^2\end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang suivant.

→ *Conclusion.* La propriété est vérifiée pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

■

Exercice 8

✧ Que permettent de dire les lignes de code suivantes ? p. 27

Editeur

```
def n2(U):
    return (U[0]**2+U[1]**2+U[2]**2)

def orthogonal(U,V):
    if U[0]*V[0]+U[1]*V[1]+U[2]*V[2]==0:
        print('OUI!!')
    else :
        print('Non..')

def Test(U,V,W):
    return n2(U)+n2(V)+n2(W)==n2(U+V+W)
```

Console

```
import numpy as np
u=np.array([1,0,0])
v=np.array([-2,1,2])
w=np.array([1,1,1])

>>> Test(u,v,w)
True
>>> orthogonal(u,v)
Non..
>>> orthogonal(u,w)
Non..
>>> orthogonal(v,w)
Non..
```

PROPOSITION — orthogonalité implique liberté

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

→ ***Si*** *$\mathscr{F}$ est orthogonale, et si aucun des vecteurs de $\mathscr{F}$ n'est le vecteur nul,* ***alors*** *$\mathscr{F}$ est libre.*

→ ***Si*** *$\mathscr{F}$ est orthonormée,* ***alors*** *$\mathscr{F}$ est libre.*

Remarque. Les réciproques sont fausses.

Preuve. • Prouvons le premier point. Notons $\mathscr{F}=(u_1, u_2, \dots, u_p)$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\in\mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j = 0_{\mathrm{E}}.$$

Soit $i\in[\![1,p]\!]$, par linéarité à gauche du produit scalaire

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j, u_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \left\langle u_j, u_i \right\rangle = \lambda_i \langle u_i, u_i\rangle = \lambda_i \|u_i\|^2.$$

Ainsi, $\lambda_i=0$ car $\|u_i\|^2\neq 0$, u_i est non nul. Ce calcul étant vérifié pour tout $i\in[\![,p]\!]$, la famille $\mathscr{F}$ est libre.

• Le second point est une conséquence directe du premier puisque les vecteurs de norme 1 sont non nuls.

■

Exercice 9

✦ Soit $E = \mathscr{C}^0\big([-\pi,\pi]\big)$ muni du produit scalaire défini par

$$\forall\, f, g \in E, \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que la famille $\big(x \mapsto \cos(kx)\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est orthogonale. Est-elle orthonormée? p. 27
2. En déduire que les familles $\big(x \mapsto \cos(kx)\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $\big(x \mapsto \sin(kx)\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont des familles libres de E.
3. Est-ce que la famille $\big(x \mapsto \cos(kx),\ x \mapsto \sin(kx)\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est aussi une famille libre de E?

Orthogonalité et sous-espaces vectoriels

DÉFINITION — sous-espaces orthogonaux

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. On dit que* F *et* G *sont* ***orthogonaux*** *si*

$$\forall\, u \in F, \quad \forall\, v \in G, \qquad u \perp v.$$

Remarque. Soient $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ et $(\varepsilon_j)_{j\in[\![1;p]\!]}$ deux familles respectivement de F et G.
Si les familles sont génératrices, alors le sous espace vectoriel F est orthogonal à G si

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad \forall\, j \in [\![1,p]\!], \qquad e_i \perp \varepsilon_j.$$

Preuve. Soit $u \in F$. Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Soit $v \in G$. Il existe $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \in \mathbb{R}$ tels que $v = \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j \varepsilon_j$.

Par bilinéarité du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{p} \mu_j \varepsilon_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_i \mu_j \underbrace{\left\langle e_i, \varepsilon_j \right\rangle}_{0} = 0.$$

Par suite $u \perp v$. Ceci étant valable pour tous u, $v \in E$, les sous-espaces F et G sont orthogonaux. ■

Exercice 10

✧ Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on pose $u = (1,2,3)$ et

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(u).$$

p. 28

1. Donner une famille génératrice de F.
2. Vérifier que F et G sont orthogonaux.

Exercice 11

✦ *Exemple dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application φ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}\big(A^t B\big)$ est un produit scalaire. p. 28
2. Notons $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$), l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

DÉFINITION - PROPOSITION — le s.e.v orthogonal

Soit F *une partie de* E *muni d'un produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Posons*

$$\mathrm{F}^{\perp} = \left\{x \in \mathrm{E} \mid \forall y \in \mathrm{F}, \quad x \perp y\right\}.$$

Alors :

- *L'ensemble* $\mathrm{F}^{\perp}$ *est un sous-espace vectoriel de* E.
- *Les sous-espaces* F *et* $\mathrm{F}^{\perp}$ *sont orthogonaux.*

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{F}^{\perp}$ *s'appelle* ***l'orthogonal*** *de* F *dans* E.

Preuve. Soient $u, v \in \mathrm{F}^{\perp}$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit $w \in \mathrm{F}$. Par bilinéarité

$$\begin{aligned}\langle \lambda u + \mu v, w\rangle &= \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle \\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

D'où $\lambda u + \mu v \in \mathrm{F}^{\perp}$. Comme $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}^{\perp}$, $\mathrm{F}^{\perp}$ est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de E. Soient $u \in \mathrm{F}$, $v \in \mathrm{F}^{\perp}$. Par définition, $\langle u, v\rangle = 0$. Les sous-espaces F et $\mathrm{F}^{\perp}$ sont orthogonaux.

■

Exemples. On a $\mathrm{E}^{\perp} = \{0_{\mathrm{E}}\}$ et $\{0_{\mathrm{E}}\}^{\perp} = \mathrm{E}$.

Remarques.
• Si G est un s.e.v de E tel que G est orthogonal à F, alors $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}^{\perp}$. Autrement dit, $\mathrm{F}^{\perp}$ est le plus grand (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui soit orthogonal à F.
• Si $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ alors $\mathrm{G}^{\perp} \subset \mathrm{F}^{\perp}$.
Soit $u \in \mathrm{G}^{\perp}$. Montrons que $u \in \mathrm{F}^{\perp}$.
Soit $v \in \mathrm{F}$. Par hypothèse, $v \in \mathrm{G}$ et par définition $\langle u, v\rangle = 0$ d'où $u \perp v$ et $\mathrm{G}^{\perp} \subset \mathrm{F}^{\perp}$.

Exercice 12

✦ Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Prouver les énoncés suivants.

1. $\mathrm{F} \subset \left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp}$.
2. $\mathrm{F}^{\perp} + \mathrm{G}^{\perp} \subset (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^{\perp}$.
3. $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$.
4. $\mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp} \subset (\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp}$.

p. 28

2 Espaces euclidiens

2.1 Définitions et exemples

DÉFINITION — espaces euclidiens

Un ***espace euclidien*** *est la donnée :*

- *d'un espace vectoriel* E *de dimension finie,*
- *d'un produit scalaire sur* E.

On note $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$.

Exemples. Reprenons les exemples étudiés précédemment.

- $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AB})$.
- $\mathbb{R}_n[x]$ muni d'un produit scalaire.
- $\mathscr{C}^0\left([a, b]\right)$ n'est pas un espace euclidien.

2.2 Bases orthonormées

En première année, on a vu qu'une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base d'un espace vectoriel E si tout vecteur de E s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire de la famille. Le caractère générateur de la famille justifiant l'existence de la décomposition, le caractère libre justifiant l'unicité de cette décomposition. Toutefois, il reste une question : comment calculer efficacement et sans erreur les coefficients de la décomposition ?
Voici une des motivations des bases orthonormées.

Définitions, exemples et coordonnées

Comme son nom l'indique une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une **base orthonormée** (abrégé en b.o.n) si c'est à la fois :

- une base : $\forall\, u \in \mathrm{E},\quad \exists!\,(\lambda_i)_{i\in[\![1;n]\!]},\quad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i.$
- une famille orthonormée : $\forall\, i, j \in [\![1;n]\!],\qquad \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Exemples.
- Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont des b.o.n pour les produits scalaires canoniques.
- On définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$ en posant, pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_2[x]$

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1) + \mathrm{P}(2)\mathrm{Q}(2).$$

On vérifie que si l'on pose $\mathrm{L}_0(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, $\mathrm{L}_1(x) = -x(x-2)$ et $\mathrm{L}_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$, alors la famille $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$ pour le produit scalaire précédent.

Exercice 13

✧ Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier que la base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ définie par

$$\varepsilon_1 = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \quad \varepsilon_2 = \sin(\theta)e_1 - \cos(\theta)e_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = e_3$$

p. 28

reste une base orthonormée pour le produit scalaire canonique. Donner une interprétation graphique.

Exercice 14

✧ Pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_2[x]$, on pose

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}'(0)\mathrm{Q}'(0) + \mathrm{P}''(0)\mathrm{Q}''(0).$$

1. **a)** Montrer que ceci définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$.
b) Vérifier que la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est orthogonale pour ce produit scalaire.
En déduire une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

2. *Généralisation.*

p. ??

Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[x]$ on considère maintenant

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}^{(k)}(0)\mathrm{Q}^{(k)}(0).$$

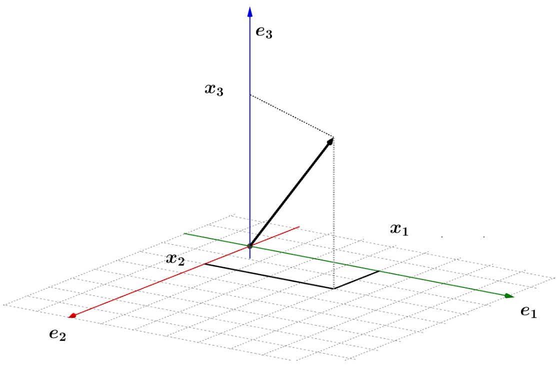
a) Vérifier que ceci définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
b) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$ pour ce produit scalaire.

THÉORÈME — **coordonnées dans une b.o.n**

Soient $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$, un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, une base orthonormée.
Pour tout vecteur $u \in \mathrm{E}$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle\, e_i.$$

Autrement dit, les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$ sont les réels $\langle u, e_1\rangle, \ldots, \langle u, e_n\rangle$.



Preuve. Soit $u \in \mathrm{E}$. La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, il existe donc $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Soit $j \in [\![1; n]\!]$, on a par linéarité à gauche du produit scalaire

$$\left\langle u, e_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left\langle e_i, e_j \right\rangle.$$

Comme la famille est orthonormée, $\left\langle e_i, e_j \right\rangle = 0$ dès que $i \neq j$ et $\langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1$. Il vient $\left\langle u, e_j \right\rangle = \lambda_j$ et la formule est finalement prouvée.

■

⚠ **Attention.** Il ne faut pas oublier l'hypothèse "base orthonormée".

PROPOSITION **norme et b.o.n**

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$*, une base orthonormée d'un espace euclidien* $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$*. Pour tous* $u, v \in \mathrm{E}$,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle \langle v, e_i \rangle \quad \text{et} \quad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle^2.$$

Preuve. Soient u, $v \in \mathrm{E}$. D'après le théorème précédent et la bilinéarité du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \left\langle v, e_j \right\rangle e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_i \rangle \left\langle v, e_j \right\rangle \left\langle e_i, e_j \right\rangle.$$

Comme $\left\langle e_i, e_j \right\rangle = 0$ pour $i \neq j$, la somme se simplifie

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle \langle v, e_i \rangle \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle \langle v, e_i \rangle.$$

La seconde formule s'en déduit avec $v = u$ car $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

■

Théorèmes d'existence d'une b.o.n et procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Soit $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$, une base quelconque d'un espace euclidien $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Prouvons qu'il existe une famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que :

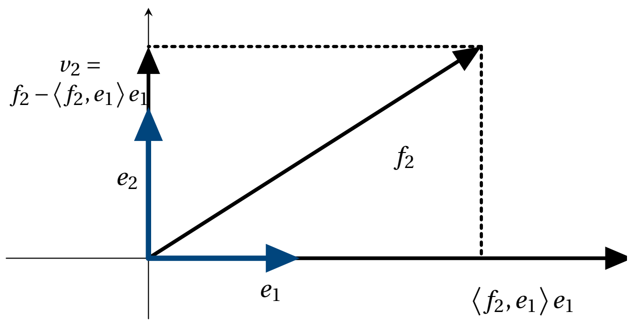
i) $\mathscr{B}$ est une base orthonormée.

ii) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\quad \mathrm{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_k) = \mathrm{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_k)$.

La preuve s'effectue par récurrence et donne un procédé de construction de la base $\mathscr{B}$ à partir de la base $\mathscr{C}$.

- *Initialisation.* On pose $\quad v_1 = f_1 \quad \text{et} \quad e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}.$
- Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose $\quad e_k = \dfrac{v_k}{\|v_k\|} \quad \text{où} \quad v_k = f_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k, e_i \rangle e_i.$

Avant de faire la preuve, commençons par détailler le procédé d'orthonormalisation de Schmidt sur une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.



Posons

$$f_1 = (1,2,1), \quad f_2 = (3,1,1) \quad \text{et} \quad f_3 = (-2,1,6).$$

Avec les notations $\quad v_1 = f_1 \quad$ et $\quad e_1 = \dfrac{v_1}{\| v_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1).$

Puis $\quad v_2 = f_2 - \langle f_2, e_1\rangle e_1 = f_2 - \dfrac{1}{\| v_1\|^2}\langle f_2, v_1\rangle v_1.$

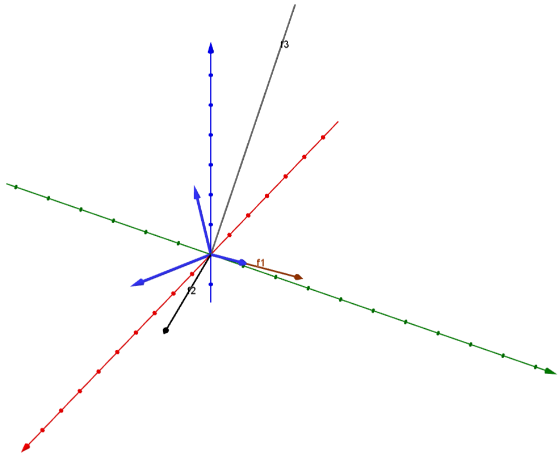
Après simplifications, on trouve

$$v_2 = (2,-1,0) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0).$$

Ensuite

$$v_3 = f_3 - \langle f_3, e_2\rangle e_2 - \langle f_3, e_1\rangle e_1 = f_3 - \frac{\langle f_3, v_2\rangle v_2}{\| v_2\|^2} - \frac{\langle f_3, v_1\rangle v_1}{\| v_1\|^2}.$$

Il vient $\quad v_3 = (-1,-2,5) \quad$ et $\quad e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{30}}(-1,-2,5).$



Preuve. Prouvons le cas général en raisonnant par récurrence sur la propriété

$$\mathscr{P}(k) : \left| \begin{array}{l} (e_1, \dots, e_k) \text{ est une famille orthonormée} \\ \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k). \end{array} \right. \quad \text{où} \quad k \in [\![1;n]\!].$$

→ *Initialisation.* Comme $e_1 = f_1 / \| f_1 \| \neq 0_E$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

→ *Hérédité.* Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$, supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie et démontrons $\mathscr{P}(k+1)$. Notons que v_{k+1} est non nul puisque par hypothèse, la famille $\mathscr{C}$ est libre. Le vecteur e_{k+1} est donc bien défini. Pour tout $j \in [\![1;k]\!]$, on a par linéarité à gauche du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle v_{k+1}, e_j\rangle &= \langle f_{k+1}, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle f_{k+1}, e_i\rangle \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \langle f_{k+1}, e_j\rangle - \langle f_{k+1}, e_j\rangle \quad \text{car, pour } i \neq j,\ \langle e_i, e_j\rangle = 0 \\ \langle v_{k+1}, e_j\rangle &= 0. \end{aligned}$$

D'où $v_{k+1} \perp e_j$. Comme e_{k+1} est colinéaire à v_{k+1}, on a aussi $e_{k+1} \perp e_j$ pour tout $j \in [\![1;k]\!]$. Précisons de plus que, par construction, e_{k+1} est normée. Comme la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est orthonormée, la famille $(e_1, \dots e_{k,}, e_{k+1})$ l'est aussi.
Justifions le second point.

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}) &= \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, v_{k+1}) \\ &= \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, f_{k+1} - u) \qquad \text{où} \quad u = \sum_{i=1}^{k} \langle f_{k+1}, e_i\rangle e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \\ &= \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, f_{k+1}). \\ &= \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) + \mathrm{Vect}(f_{k+1}) \\ &= \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k) + \mathrm{Vect}(f_{k+1}) \\ \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}) &= \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k, f_{k+1}). \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est donc vraie si $\mathscr{P}(k)$ l'est.
→ *Conclusion.* Les propriétés $\mathscr{P}(k)$ sont vraies pour tout $k \in [\![1;n]\!]$. L'énoncé s'obtient avec $\mathscr{P}(n)$ en rappelant qu'une famille libre avec autant de vecteurs que la dimension est une base. ■

Exercice 15

✦✦ **Exemples**

p. 29

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
   Orthonormaliser les bases $\big((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\big)$ et $\big((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\big)$.
2. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$.
   Orthonormaliser les bases $\left(1,x,x^2\right)$ et $\left((x-1)^2,(x-1)(x+1),(x+1)^2\right)$.

Corollaire — existence d'une base orthonormée

Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

Preuve. Comme l'espace est euclidien, il est de dimension finie et admet au moins une base. Il suffit alors d'appliquer le procédé d'orthonormalisation décrit précédemment à cette base pour obtenir une base orthonormée. ■

Corollaire — base orthonormée incomplète

Toute famille orthonormée d'une espace euclidien $\big(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ peut être complétée en une base orthonormée de E.
Autrement dit, si $\left(e_1,e_2,\ldots,e_p\right)$ est une famille orthonormée de E *de dimension n, il existe des vecteurs $e_{p+1},e_{p+2},\ldots,e_n$ tels que la famille $\left(e_1,e_2,\ldots,e_p,e_{p+1},\ldots,e_n\right)$ soit une base orthonormée de* E.

Preuve. D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $f_{p+1},f_{p+2},\ldots,f_n$ tels que $\mathscr{B}=\left(e_1,e_2,\ldots,e_p,f_{p+1},\ldots,f_n\right)$ soit une base de E. En reprenant le procédé d'orthogonalisation, on peut obtenir une base $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{B}$ sans modifier les vecteurs $e_1,e_2,\ldots,e_p$. D'où le résultat. ■

Bases orthonormées et matrices

Proposition — expression du produit scalaire avec les matrices colonnes

Soient $\big(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$, un espace euclidien, $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de E *et u, $v\in\mathrm{E}$.*

Si on note
- $\mathrm{U}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
- $\mathrm{V}=\mathrm{Mat}\mathscr{B}(v)$.

Alors $\qquad \langle u,v\rangle = {}^t\mathrm{U}\mathrm{V}$ *et* $\|u\|^2 = {}^t\mathrm{U}\,\mathrm{U}$.

Preuve. D'après le théorème précédent

$$u=\sum_{i=1}^{n}\langle u,e_i\rangle e_i \quad \text{et} \quad \mathrm{U}=\begin{bmatrix}\langle u,e_1\rangle\\ \langle u,e_2\rangle\\ \vdots\\ \langle u,e_n\rangle\end{bmatrix}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

De même pour le vecteur v. Il suffit alors de poser le calcul

$${}^t\mathrm{U}\mathrm{V}=\left[\,\langle u,e_1\rangle\,\langle u,e_2\rangle\cdots\langle u,e_n\rangle\,\right]\begin{bmatrix}\langle v,e_1\rangle\\ \langle v,e_2\rangle\\ \vdots\\ \langle v,e_n\rangle\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\langle u,e_i\rangle\langle v,e_i\rangle=\langle u,v\rangle.$$

Le second point s'en déduit avec $v=u$. ■

⚠ **Attention.** Rappelons que ces énoncés ne sont valables que dans le cadre d'une base orthonormée.

Définition — **matrice orthogonale**

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que M *est une* ***matrice orthogonale*** *si* M *est inversible et* $\mathrm{M}^{-1} = {}^t\mathrm{M}$.

Remarque. D'après les résultats sur les matrices, M est orthogonale si et seulement si ${}^t\mathrm{M}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$ ou $\mathrm{M}\,{}^t\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$.

Exemple. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $\mathrm{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ est orthogonale. En effet,

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_\theta\,{}^t\mathrm{R}_\theta &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2 & -\cos(\theta)\sin(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\sin(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2. \end{aligned}$$

Remarques.
- Les colonnes d'une matrice M orthogonale sont non nulles et forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique. En effet, si on écrit $\mathrm{M} = [\mathrm{C}_1\ \mathrm{C}_2\ \dots\ \mathrm{C}_n]$, alors

$${}^t\mathrm{M} = \begin{bmatrix} {}^t\mathrm{C}_1 \\ {}^t\mathrm{C}_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathrm{C}_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t\mathrm{M}\mathrm{M} = \begin{bmatrix} {}^t\mathrm{C}_1 \\ {}^t\mathrm{C}_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathrm{C}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 & \mathrm{C}_2 & \dots & \mathrm{C}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\mathrm{C}_1\mathrm{C}_1 & {}^t\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2 & \cdots & {}^t\mathrm{C}_1\mathrm{C}_n \\ {}^t\mathrm{C}_2\mathrm{C}_1 & {}^t\mathrm{C}_2\mathrm{C}_2 & \cdots & {}^t\mathrm{C}_2\mathrm{C}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t\mathrm{C}_n\mathrm{C}_1 & {}^t\mathrm{C}_n\mathrm{C}_2 & \cdots & {}^t\mathrm{C}_n\mathrm{C}_n \end{bmatrix}.$$

Dès lors, la matrice M est orthogonale si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$

$${}^t\mathrm{C}_i\mathrm{C}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette dernière condition traduit le fait que la famille des matrices colonnes $(\mathrm{C}_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est orthonormée. Comme cette famille contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- **Structure de l'ensemble $\mathcal{O}_n$ des matrices orthogonales de taille (n, n)**
  - Présence d'un élément neutre : $\mathrm{I}_n \in \mathcal{O}_n$.
  - Stabilité par passage à l'inverse : $\forall\, \mathrm{P} \in \mathcal{O}_n, \quad \mathrm{P}^{-1} \in \mathcal{O}_n$.
  - Stabilité par produit : $\forall\, \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathcal{O}_n, \quad \mathrm{PQ} \in \mathcal{O}_n$.

Exercice 16

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes

✧ 1. Justifier les trois points de la remarque précédente.
✧ 2. Que dire d'une matrice diagonale et orthogonale ?
✦✦ 3. Montrer que si $\mathrm{P} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est orthogonale avec $\det(\mathrm{P}) > 0$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{P} = \mathrm{R}_\theta.$$

p. 29

Proposition — **matrice de passage orthogonale**

Soient $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espace euclidien et* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une base orthonormée de E.*
Soit $\mathcal{C}$ *une autre base de* E. *On a équivalence entre les énoncés :*

i) *La base* $\mathcal{C}$ *est orthonormée.*

ii) *La matrice de passage* $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ *est une matrice orthogonale.*

Preuve. Pour une matrice A, notons $[A]_{ij}$ son coefficient en position (i,j). Notons aussi $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée,

$$\forall i \in [\![1;n]\!] \qquad \varepsilon_i = \sum_{k=1}^{n} \langle \varepsilon_i, e_k \rangle e_k.$$

Par définition de le matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$

$$[\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}]_{ik} = \langle \varepsilon_i, e_k \rangle.$$

Puis, par définition de la transposée $\qquad [{}^t\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}]_{kj} = [\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}]_{jk} = \left\langle \varepsilon_j, e_k \right\rangle.$

Enfin, par la définition du produit matriciel

$$\begin{aligned}
[\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}\,{}^t\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}]_{ik} [{}^t\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \varepsilon_i, e_k \rangle \left\langle \varepsilon_j, e_k \right\rangle \\
[\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}\,{}^t\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}]_{ij} &= \left\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \right\rangle \qquad \text{voir proposition page 11.}
\end{aligned}$$

Raisonnons par équivalence. La matrice $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ est orthogonale si et seulement si

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}\,{}^t\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = \mathrm{I}_n &\iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \quad [\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}\,{}^t\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}]_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\
&\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \left\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ est orthogonale si et seulement si la base $\mathscr{C}$ est orthonormée. ■

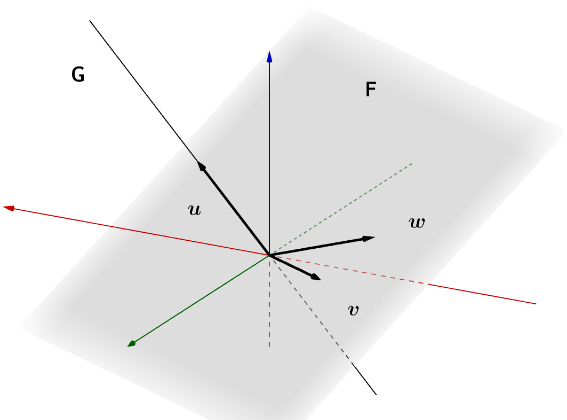
2.3 Le supplémentaire orthogonal

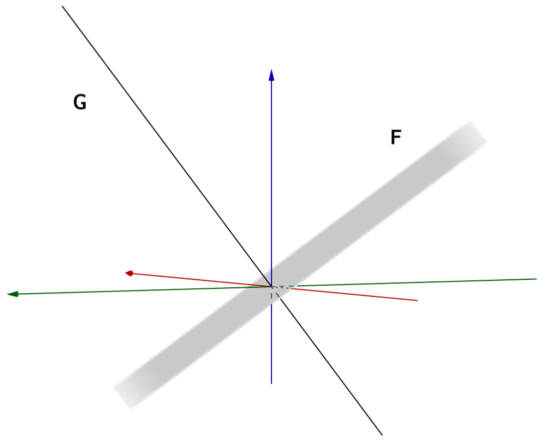
Tout s.e.v d'un espace euclidien $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ admet un supplémentaire orthogonal.
Autrement dit, si F est un s.e.v de E, il existe un s.e.v G de E tel que

$$\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E} \quad \text{et} \quad \forall u \in \mathrm{F}, \quad \forall v \in \mathrm{G}, \qquad u \perp v.$$

En effet, si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F, alors on peut choisir $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ une complétion en une base orthonormée de E. Dans ce cas, $\mathrm{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ fournit un supplémentaire orthogonal.

Exemple. Reprenons F et G de l'exercice 10, p. 8. Les vecteurs $v = (-2, 1, 0))$ et $w = (-3, 0, 1)$ forment une base du plan F et $u = (1, 2, 3)$, une base de la droite vectorielle G. On constate que F et G sont supplémentaires et orthogonaux.





PROPOSITION **propriétés**

Soit F *un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien* $(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

- F *et* $\mathrm{F}^{\perp}$ *sont supplémentaires dans* E.
- $\dim\left(\mathrm{F}^{\perp}\right)=\dim(\mathrm{E})-\dim(\mathrm{F})$.

Preuve. • Soit $u\in\mathrm{E}$. Soit $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ une base de F orthonormée que l'on complète en une base $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ orthonormée de E. On a

$$u=\sum_{i=1}^{n}\langle u,e_i\rangle e_i=\underbrace{\sum_{i=1}^{p}\langle u,e_i\rangle e_i}_{:=u_{\mathrm{F}}}+\underbrace{\sum_{i=p+1}^{n}\langle u,e_i\rangle}_{:=u_{\perp}}.$$

F est un s.e.v stable par combinaison linéaire et pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $e_i\in\mathrm{F}$, donc $u_{\mathrm{F}}\in\mathrm{F}$. De plus, pour tout $j\in[\![1,p]\!]$

$$\left\langle u_{\perp},e_j\right\rangle=\sum_{i=p+1}^{n}\langle u,e_i\rangle\left\langle e_{i},e_j\right\rangle=0\quad\text{d'où}\quad u_{\perp}\in\mathrm{F}^{\perp}.$$

On a donc $\mathrm{E}=\mathrm{F}+\mathrm{F}^{\perp}$. De plus, pour $v\in\mathrm{F}\cap\mathrm{F}^{\perp}$. Le vecteur v est orthogonal à lui-même, c'est donc le vecteur nul. Ainsi, $\mathrm{F}\cap\mathrm{F}^{\perp}=\{0_{\mathrm{E}}\}$. Par la caractérisation des supplémentaires, $\mathrm{F}\oplus\mathrm{F}^{\perp}=\mathrm{E}$.

- Pour le second point, il suffit d'écrire

$$\mathrm{F}\oplus\mathrm{F}^{\perp}=\mathrm{E}\quad\Rightarrow\quad\dim(\mathrm{F})+\dim\left(\mathrm{F}^{\perp}\right)=\dim\mathrm{E}.$$

■

⚠ **Attention.** Il n'y a pas unicité du supplémentaire, mais unicité du supplémentaire orthogonal.
En effet, si G est un supplémentaire orthogonal de F, on a $\mathrm{G}\subset\mathrm{F}^{\perp}$ puisque $\mathrm{F}^{\perp}$ est le plus grand, au sens de l'inclusion, s.e.v de E orthogonal à F. Or, avec le second point, on a automatiquement $\dim(\mathrm{G})=\dim(\mathrm{F}^{\perp})$. Nécessairement $\mathrm{G}=\mathrm{F}^{\perp}$.
Dans l'exemple précédent, on constate qu'il n'y a qu'une droite vectorielle orthogonale à F.

Exemples.

- Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Posons $u=(1,1,1)$ et $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}(u)$. Déterminons une base de $\mathrm{F}^{\perp}$.
Tout d'abord, $\mathrm{F}^{\perp}$ est de dimension $3-1=2$. Pour déterminer une base de $\mathrm{F}^{\perp}$, il suffit de donner deux vecteurs de $\mathrm{F}^{\perp}$ qui forment une famille libre (donc ici, non colinéaires). Par exemple,

$$v=(1,-1,0)\quad\text{et}\quad w=(0,1,-1).$$

- Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire $\langle\mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle=\mathrm{P}(-1)\mathrm{Q}(-1)+\mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0)+\mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1)$. Donnons une base de l'orthogonal de $\mathrm{F}=\mathbb{R}_1[x]$. Comme F est de dimension 1, il suffit de trouver un polynôme de degré au plus 2, orthogonal à $\mathbf{1}$ et x. Or, pour $\mathrm{P}=ax^2+bx+c$, on montre que

$$\langle\mathrm{P}(x),\mathbf{1}\rangle=2a+3c\quad\text{et}\quad\langle\mathrm{P}(x),x\rangle=2b.$$

On constate que $\mathrm{P}=3x^2-2$ convient.

- Dans le cas de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, on montre (en reprenant les idées de l'exercice 11 que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})^{\perp}=\mathscr{A}_n$.

Exercice 17

✦ *Les questions sont indépendantes*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1. Montrer que $(\mathrm{F}^{\perp})^{\perp}=\mathrm{F}$.
2. Montrer que $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp}=\mathrm{F}^{\perp}\cap\mathrm{G}^{\perp}$ puis $\mathrm{F}^{\perp}+\mathrm{G}^{\perp}=(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})^{\perp}$.

p. 29

Exercice 18

✦ Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathrm{E}=\mathbb{R}_{2n}[x]$. Considérons F et G les s.e.v de E constitués des polynômes pairs (resp. impairs). Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire

$$\forall\,\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathrm{E},\qquad\langle\mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle=\int_{-1}^{1}\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

p. 29

Exercices

Exercice 19. ✦ **Vrai ou faux?**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. F et G sont supplémentaires si et seulement si $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$ le sont.

≫ Solution p. 30

Exercice 20. ✧ Montrer que pour tous réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$. Préciser le cas d'égalité.

≫ Solution p. 30

Exercice 21. ✧ **Inégalité de Bessel**
Soit $\mathscr{F}$, une famille orthonormée d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Montrer que pour tout vecteur $u \in E$:

$$\sum_{e \in \mathscr{F}} \langle u, e \rangle^2 \leqslant \|u\|^2.$$

≫ Solution p. 30

Exercice 22. ✦

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis vérifier que

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{Tr}\left(A^2\right) \leqslant \operatorname{Tr}\left({}^tAA\right).$$

2. Montrer également que $\operatorname{Tr}\left(A^2\right) = \operatorname{Tr}\left({}^tAA\right)$ si et seulement si A est une matrice symétrique.

≫ Solution p. 30

Exercice 23. ✦✦ **Condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité**
Soient u et v deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Établir l'équivalence entre les énoncés suivants :

i) Les vecteurs u et v sont orthogonaux.
ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u + v\| \geqslant \|v\|$.

≫ Solution p. 30

Exercice 24. ✦✦
Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice orthogonale. On désigne par c_j, le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice colonne dans la base canonique est la j-ème colonne de A.

1. Montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\| \cdot \left\|\sum_{j=1}^{n} c_j\right\|$.
2. En déduire l'inégalité $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

≫ Solution p. 30

Exercice 25. ✦✦✦ **Frames**
Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de norme 1 de E.

1. On suppose que

$$\forall u \in E, \qquad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle^2.$$

Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de E.

2. On suppose maintenant qu'il existe deux réels strictement positifs A et B tels que

$$\forall u \in E, \qquad A\|u\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle^2 \leqslant B\|u\|^2 \qquad (\star)$$

   a) Justifier que $\mathscr{B}$ reste une famille génératrice.

b) En considérant sur $E = \mathbb{R}^2$ la famille (e_1, e_2, e_3) définie par

$$e_1 = (1,0), \quad e_2 = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3}) \quad \text{et} \quad e_3 = \frac{1}{2}(-1, -\sqrt{3}),$$

montrer qu'une famille peut vérifier $(\star)$ sans être libre.

La théorie des frames permet d'étudier la stabilité et la redondance des représentations linéaires discrètes d'un signal. On la retrouve notamment dans la théorie des ondelettes, particulière utile en analyse d'images.

≫ Solution p. 31

Exercice 26. ✦✦ On considère un espace euclidien E ainsi qu'une famille $\mathscr{F} = \left(e_1, \cdots, e_p\right)$ de vecteurs de E. Montrer que si la famille $\mathscr{F}$ est génératrice de E, alors l'endomorphisme

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{p} \left\langle u, e_i \right\rangle e_i \end{array} \right. \qquad \text{est bijectif.}$$

Indication. On pourra, pour un vecteur u bien choisi, considérer $\left\langle u, \varphi(u) \right\rangle$.

≫ Solution p. 31

Exercice 27. ✦ ✎ Soit $\left(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$. On définit ensuite l'application sur E par

$$\forall x \in E, \qquad \varphi(x) = \langle x, u \rangle u.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E. Préciser $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
3. À quelle condition sur u, φ est un projecteur de E ?

≫ Solution p. 31

Exercice 28. ✦ **Probabilité de collision**
Soient X et Y deux variables aléatoires finies indépendantes et de même loi. Notons

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \mathbf{P}(X = x_i) = p_i.$$

1. Démontrer que $\mathbf{P}(X = Y) = \sum\limits_{k=1}^{n} {p_k}^2$.
2. En déduire que $\mathbf{P}(X = Y) \geqslant \frac{1}{n}$. Préciser le cas d'égalité.

≫ Solution p. 32

Exercice 29. ✦✦ Soient $(u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien telle que

$$\forall (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \qquad \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2.$$

Montrer que la famille est orthogonale.
On pourra démontrer dans un premier temps que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \varepsilon_i u_i, \sum_{j=i+1}^{n} \varepsilon_j u_j \right\rangle.$$

≫ Solution p. 32

Exercice 30. ✦✦✦ Soit $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ avec pour tout indice i, $a_i \in \mathbb{R}_*^+$. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, on a

$$P(\sqrt{xy}) \leqslant \sqrt{P(x) \cdot P(y)}.$$

≫ Solution p. 32

Exercice 31. ✦✦✦ ✎ **Dual d'un espace euclidien**
Soit $\left(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$, un espace euclidien. On note E^*, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Pour tout $u \in E$, on définit les applications Φ_u par :

$$\Phi_u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle u, x \rangle. \end{array} \right.$$

1. Vérifier que pour tout $u \in E$, $\Phi_u \in E^*$.
   On pose alors l'application $\Phi : E \to E^*$ définie par $\Phi(u) = \Phi_u$.

2. a) Vérifier que Φ est une application linéaire de E dans E^*.

   b) Montrer que Φ est injective.

   c) En déduire que pour tout $f \in E^*$, il existe $u \in E$ tel que $f = \Phi_u$.

- *Application*

3. Justifier que si f est une forme linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ alors il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad f(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[x], \qquad \int_0^1 P_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = Q(0).$$

5. a) Justifier qu'il n'existe pas de polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ tel que : $\forall Q \in \mathbb{R}[x], \quad \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = Q(0)$.
   On pourra utiliser le polynôme défini par $Q(x) = xP(x)$.

   b) Est-ce en contradiction avec la question 3 ?

≫ Solution p. 33

Endomorphisme conservant la norme, les angles ...

Exercice 32. ✦✦ Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.

1. On dit que f est une isométrie si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

   a) Montrer que si f est une isométrie alors f est un isomorphisme de E.

   b) Établir l'équivalence entre les énoncés :

      i) f est une isométrie ;

      ii) Pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

   Dans la suite, on s'intéresse aux trois conditions :

   I) L'endomorphisme f est une isométrie.

   II) $f \circ f = -\mathrm{id}_E$.

   III) Pour tout $x \in E$, $f(x)$ est orthogonal à x.

   On souhaite montrer que si deux des conditions sont vérifiées alors la troisième l'est aussi.

2. Justifier que si les conditions I) et II) sont vraies alors III) aussi.

3. On suppose maintenant I) et III).

   a) Calculer $\langle f(x)+x, f^2(x)+f(x)\rangle$, en déduire $\langle x, f^2(x)\rangle = -\|x\|^2$.

   b) Expliciter $\|f^2(x)+x\|^2$, puis montrer II).

4. Conclure en montrant la dernière implication.

≫ Solution p. 33

Exercice 33. ✦✦ **Endomorphisme qui conserve l'orthogonalité** *Source : HEC 2007.*

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (u,v) \in E^2, \qquad \langle u, v\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = 0.$$

1. Vérifier que si u et v sont deux vecteurs de même norme, alors $(u-v)$ et $(u+v)$ sont orthogonaux.
2. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $u \in E$, $\|\varphi(u)\| = k\|u\|$.

≫ Solution p. 34

Produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[x]$ et familles de polynômes orthogonaux

Exercice 34. ✦ À quelles conditions sur les réels α, β et γ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]^2$ par

$$\varphi(P,Q) = \alpha P(-1)Q(-1) + \beta P(0)Q(0) + \gamma P(1)Q(-1)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$?

≫ Solution p. 34

Exercice 35. ✦ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2 \dots, a_n$, n réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on pose

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k\in[\![1;n]\!]\\ k\neq i}} \frac{x-a_k}{a_i-a_k} \quad \text{et} \quad P_i(x) = \left(x-a_i\right)L_i(x)^2.$$

1. Justifier que l'application φ définie par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^2, \qquad \varphi(P,Q) = \sum_{k=1}^{n} P\left(a_k\right)Q\left(a_k\right)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $(L_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base orthonormée.

2. Justifier que l'application ψ définie par : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]^2$

$$\psi(P,Q) = \sum_{k=1}^{n} P\left(x_k\right)Q\left(x_k\right) + \sum_{k=1}^{n} P'\left(x_k\right)Q'\left(x_k\right)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$ et $(P_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une famille orthonormée.

≫ Solution p. 35

Exercice 36. ✦✦ **Variantes de produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[x]$**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tous les polynômes P et Q appartenant à $E = \mathbb{R}_n[x]$, on pose

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(\alpha)\cdot Q^{(i)}(\alpha).$$

Montrer que $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ est un espace euclidien.
On pourra penser à la formule de Taylor pour les polynômes.

2. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels 2 à 2 distincts. Pour tous les polynômes P et Q appartenant à $E = \mathbb{R}_n[x]$, on pose

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\alpha_i\right)\cdot Q^{(i)}\left(\alpha_i\right).$$

Montrer que $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ est un espace euclidien.

≫ Solution p. 35

Exercice 37. ✦✦ **Un classique : les polynômes de Tchebychev**
On définit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de polynômes par la récurrence

$$T_0 = 1, \quad T_1(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\big((n+2)\theta\big) + \cos(n\theta) = 2\cos\big((n+1)\theta\big)\cos(\theta).$$

b) Montrer que pour tout réel θ, tout entier naturel n,

$$\cos(n\theta) = T_n\big(\cos(\theta)\big) \qquad (\bullet)$$

c) Vérifier que T_n est l'unique polynôme vérifiant les relations $(\bullet)$. Préciser le degré de T_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]^2$ par :

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

a) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire bien défini sur $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Vérifier que la famille $(\mathrm{T}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale pour ce produit scalaire.

c) Déterminer $\|\mathrm{T}_k\|$ pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$.

≫ Solution p. 36

Exercice 38. ✦✦✦ **Polynômes de Legendre**

On munit $\mathbb{R}[x]$ du produit scalaire : $$\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les polynômes $\mathrm{P}_n(x) = \left(x^2-1\right)^n$ et $\mathrm{L}_n = \mathrm{P}_n{}^{(n)}$.

1. Préciser L_n pour $n \in \{0,1,2,3\}$.
2. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant de L_n.
3. Calculer $\mathrm{L}_n(1)$.
4. Prouver que, pour tout $n \geqslant 1$, L_n possède n racines simples dans $]-1,1[$.
5. **a)** Justifier que si f et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ alors

$$\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(n-1-k)}(t)g^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

   b) Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}_p(x) = x^p$. Calculer $\langle \mathrm{L}_n, \mathrm{E}_p\rangle$ pour $p \in [\![0; n-1]\!]$.

   c) En déduire que la famille $(\mathrm{L}_n)_{n\geqslant 0}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
6. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{W}_p = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2p+1}(u)\,\mathrm{d}u$.

   a) Donner une relation simple entre W_{p+1} et W_p. En déduire W_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

   b) Vérifier que

$$\|\mathrm{L}_n\|^2 = 2(2n)!\,\mathrm{W}_n.$$

   c) En déduire $\|\mathrm{L}_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. En décomposant le polynôme $x\mathrm{L}_n(x)$ dans la base $(\mathrm{L}_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ de $\mathbb{R}_{n+1}[x]$, justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{L}_{n+1}(x) - 2(2n+1)x\mathrm{L}_n(x) + 4n^2\mathrm{L}_{n-1}(x) = 0.$$

≫ Solution p. 37

Algèbre bilinéaire et réduction

Exercice 39. ✦ **Matrice de Householder**

Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et U sa matrice colonne dans la base canonique. On pose

$$\mathrm{H} = \mathrm{I} - 2\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{U},$$

1. Simplifier HU et HV où V est la matrice colonne d'un vecteur v orthogonal à u. Que peut-on en déduire sur H ?
2. Vérifier que H est symétrique, orthogonale et diagonalisable.

≫ Solution p. 38

Exercice 40. ✦✦ Soit $(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien avec $\dim \mathrm{E} \geqslant 2$. Pour tout vecteur u non nul et pour tous les réels $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, on définit l'endomorphisme f de E par

$$f(x) = \lambda x + \mu\langle x, u\rangle u.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. Est-ce que f est diagonalisable ?
2. **a)** On dit qu'un endomorphisme g est une isométrie si pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|g(x)\| = \|x\|$. Justifier que $\mathrm{Sp}(g) \subset \{-1;1\}$.

   b) À quelles conditions sur λ et μ, l'application f est une isométrie ?

≫ Solution p. 39

Exercice 41. ✦✦ *d'après EMLyon*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[x]$ et on considère l'application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est bien définie puis montrer que c'est un produit scalaire sur E. On pose $\|\mathrm{P}\| = \sqrt{\varphi(\mathrm{P},\mathrm{P})}$.

2. Soit T le polynôme défini par $T(X) = 1 + \frac{X^n}{n!}$. Calculer $\|T\|$.
On pose $I = \frac{T}{\|T\|}$

3. On définit l'application ψ qui à tout polynôme P de E associe $2\varphi(P, I)I - P$.

   a) Montrer que θ est un automorphisme de E et déterminer ψ^{-1}.

   b) Montrer que pour tout P de E : $\|\psi(P)\| = \|P\|$.

   c) Quelles sont les valeurs propres possibles de ψ ?

   d) L'endomorphisme ψ est-il diagonalisable ?

≫ Solution p. ??

Exercice 42. ✦✦✦ **Matrices de Gram et valeurs propres**
Soient $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien de dimension n et $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On pose

$$G = \left(\left\langle u_i, u_j \right\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \cdots, u_n),$$

où $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.

1. Vérifier que $G = {}^t MM$.

2. En déduire que $\ker(G) = \ker(M)$, puis $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$.
Indication. Considérer ${}^t XGX$ *pour* $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. Vérifier que G est inversible si et seulement si la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une base de E.

4. Justifier que les valeurs propres de G sont positives ou nulles.

5. Justifier que les valeurs propres sont majorées par $\sum_{i=1}^{n} \left\|u_i\right\|^2$.

≫ Solution p. 39

Exercice 43. ✦✦ Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel que l'on note $\langle,\rangle$. La norme associée est notée $\|\cdot\|$. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme égale à 1.
Pour tout réel a, on définit l'application f_a par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad f_a(x) = x + a\langle x, u\rangle u.$$

1. Montrer que f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

2. Soient a et b deux réels.

   a) Déterminer c tel que $f_a \circ f_b = f_c$.

   b) Pour quelle(s) valeur(s) de a, l'application f_a est-elle bijective ? Expliciter alors sa bijection réciproque.

   c) Pour quelle(s) valeur(s) de a, l'application f_a est-elle une symétrie ?

   d) Pour quelle(s) valeur(s) de a, l'application f_a est-elle une projection ? Préciser alors les deux sous-espaces F et G tels que f_a soit une projection sur F parallèlement à G.

3. L'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?

4. Dans cette question, on pose $a = -2$ et on ne suppose plus le vecteur u fixé.
On note s_u l'application f_{-2} définie précédemment. On a donc, pour tout u de $\mathbb{R}^n$ tel que $\|u\| = 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad s_u(x) = x - 2\langle x, u\rangle u.$$

On note g un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété suivante : la matrice de g^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la transposée de la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   a) Vérifier que $\|g(u)\| = 1$.

   b) Montrer que : $g \circ s_u \circ g^{-1} = s_{g(u)}$.

≫ Solution p. ??

Compléments en dimension infinie

Exercice 44. ✦✦✦ **Orthogonal d'un hyperplan**

On munit $E = \mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ du produit scalaire défini par :$\forall (f,g) \in E^2, \qquad \langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$

Considérons le sous-ensemble A de E, constitué des applications qui s'annulent en 0 et le sous-ensemble B de E, constitué des applications dont l'intégrale sur $[0,1]$ est nulle. A et B sont les noyaux de formes linéaires non nulle

$$f \in E \mapsto f(0) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f \in E \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt \in \mathbb{R}.$$

Ce sont donc des hyperplans de E. Déterminer $A^\perp$ et $B^\perp$.

≫ Solution p. 40

Exercice 45. ✦✦ **Un sujet de concours**

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\big(f(x)\big)^2\,dx$ converge. Pour toute fonction f de E, on note $\Phi(f)$ la fonction définie dans cette partie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On admet que $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. **a)** Justifier : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leqslant \frac{1}{2}\big(x^2+y^2\big)$.

   b) En déduire que, pour toutes fonctions f et g de E_2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ est absolument convergente.

   c) Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

2. On considère l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f,g) \in E_2 \times E_2, \quad \langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx.$$

   Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E_2. On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

3. Soit f une fonction de E_2.

   On note pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $\quad h(x) = \displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt.$

   a) Calculer les limites de $x \mapsto \frac{(h(x))^2}{x^4}$ et de $x \mapsto \frac{(h(x))^2}{x^3}$ en 0.

   b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall X \in \mathbb{R}_*^+, \quad \int_0^X \frac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3}\frac{\big(h(X)\big)^2}{X^3} + \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\,dx \qquad (\bullet)$$

   c) Soit $X \in \mathbb{R}_*^+$. En étudiant le signe de la fonction polynomiale $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^X \big(\lambda f(x) + \Phi(f)(x)\big)^2\,dx$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\,dx \leqslant \left(\int_0^X \big(f(x)\big)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\,dx\right)^{1/2}.$$

   d) En déduire :

$$\forall X \in \mathbb{R}_*^+, \quad \left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^X \big(f(x)\big)^2\,dx\right)^{1/2}.$$

   e) Montrer alors que la fonction $\Phi(f)$ appartient à E_2 et que l'on a : $\|\Phi(f)\| \leqslant \dfrac{2}{3}\|f\|$.

   f) En utilisant la relation $(\bullet)$, justifier que la limite de $X \mapsto X\big(\Phi(f)(X)\big)^2$ en $+\infty$ est finie, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

   g) En déduire :

$$\|\Phi(f)\|^2 = \frac{2}{3}\big\langle \Phi(f), f\big\rangle.$$

≫ Solution p. 40

Exercice 46. ✦✦✦ ✦✦✦ **Séries de Fourier**

Dans la suite, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. Pour tout $f \in \mathrm{E}$, on définit les coefficients de Fourier par :

$$a_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad b_0(f) = 0,$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

On définit de plus la matrice
$$\widehat{\mathrm{F}}_n(f) = a_n(f)\,\mathrm{I}_2 + b_n(f)\,\mathrm{J} \quad \text{où} \quad \mathrm{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Régularité et décroissance des coefficients de Fourier*

1. Justifier que l'application définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ par

$$\forall\,(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2, \qquad \varphi(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{AB}\right)$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

2. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que : $a_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $b_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) En déduire que $\left\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

On admet que ce résultat est encore valable même lorsque f est continue (de classe $\mathscr{C}^0$).

3. Vérifier que si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\widehat{\mathrm{F}}_n(f') = -n\mathrm{J}\,\widehat{\mathrm{F}}_n(f)$.

4. Comparer $\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f')\|$ et $\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\|$.

5. En déduire que si f est de classe $\mathscr{C}^p$ avec $p \in \mathbb{N}$ alors $\left\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\right\| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$.

- *Un produit scalaire sur* E

6. Vérifier que l'application définie sur E^2 par

$$\forall\,(f,g) \in \mathrm{E}^2, \qquad \langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur E. On note $\mathrm{N}(\cdot)$, la norme associée.

7. Notons $\mathscr{P}$ (respectivement $\mathscr{I}$), le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions paires (respectivement impaires). Vérifier que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

8. **a)** Justifier que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a)\cdot\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a-b)+\cos(a+b)\big)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions f_k pour $k \in [\![0;n]\!]$ par

$$f_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto 1/\sqrt{2} \quad \text{et pour } k \geqslant 1 \quad f_k : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(kt).$$

Justifier que la famille $\mathscr{F}_n$ constituée des fonctions $(f_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
De la même manière, on montre que la famille $\mathscr{G}_n$ constituée des fonctions $g_k : t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(kt)$ pour $k \in [\![1;n]\!]$ est orthonormée.

9. Vérifier que la concaténation des familles $\mathscr{F}_n$ et $\mathscr{G}_n$ forme une famille orthonormée de E.

10. Soit $f \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F}_n, \mathscr{G}_n)$. Démontrer que

$$\mathrm{N}(f)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left\|\widehat{\mathrm{F}}_k(f)\right\|^2.$$

≫ Solution p. 41