Test « Logarithme népérien »

1. Donner les formules de $\ln(ab)$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$, $\ln\left(a^n\right)$.

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$

2. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les réels suivants : $A = \ln(8)$; $B = \ln\left(2e^3\right)$.

$A = \ln(8) = \ln\left(2^3\right) = 3\ln(2)$

$B = \ln\left(2e^3\right) = \ln(2) + \ln\left(e^3\right) = \ln(2) + 3$

3. Résoudre $\ln(x) \leq 2$.

$\ln(x) \leq 2 \Leftrightarrow x \leq e^2$. Finalement, $x \in \left]0\ ;\ e^2\right]$.

4. Donner, <u>sans calculer mais en justifiant</u>, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée.

b) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ par croissance comparée.

5. <u>Calculer</u> les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln x$ **b)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{x}$

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{array}\right\}$ par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln x=+\infty$.

b) $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{x}\times\ln x$ d'où :

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty\end{array}\right\}$ par produit de limites, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$.

6. On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)+x$.

a) Calculer les limites de *f* en 0 puis en $+\infty$.

b) calculer la dérivée de *f*.

c) Étudier le signe de la dérivée puis établir le tableau des variations de *f*.

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0} x=0\end{array}\right\}$ par somme de limites, $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\end{array}\right\}$ par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1$

c) $f'(x)\geq0$ par somme de termes positifs.

On en déduit le tableau de variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$:

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	
Variations de f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

7. On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)-2x$.

a) Calculer les limites de *f* en 0 puis en $+\infty$.

b) calculer la dérivée de *f*.

c) Étudier le signe de la dérivée puis établir le tableau des variations de *f*.

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}-2x=0\end{array}\right\}$ par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}-2x=-\infty\end{array}\right\}$ par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$.

b) $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2$

c) $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{1-2x}{x}$.

$x>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1-2x$.

$1-2x\geq 0\Leftrightarrow -2x\geq -1\Leftrightarrow x\leq\dfrac{1}{2}$.

On en déduit le tableau de variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		$1/2$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1/2)$	$\searrow$	$-\infty$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)-2\times\dfrac{1}{2}=-\ln(2)-1.$