

## Test « Logarithme népérien »

1. Donner les formules de  $\ln(ab)$ ,  $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ ,  $\ln(a^n)$ .

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n \ln(a)$$

2. Exprimer en fonction de  $\ln(2)$  les réels suivants :  $A = \ln(8)$  ;  $B = \ln(2e^3)$ .

$$A = \ln(8) = \ln(2^3) = 3 \ln(2)$$

$$B = \ln(2e^3) = \ln(2) + \ln(e^3) = \ln(2) + 3$$

3. Résoudre  $\ln(x) \leq 2$ .

$$\ln(x) \leq 2 \Leftrightarrow x \leq e^2. \text{ Finalement, } x \in ]0 ; e^2].$$

4. Donner, sans calculer mais en justifiant, les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  par croissance comparée.

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$  par croissance comparée.

5. Calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$

a)  $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\}$  par produit de limites,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$ .

b)  $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$  d'où :

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right\}$  par produit de limites,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ .

6. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x) + x$ .

a) Calculer les limites de  $f$  en 0 puis en  $+\infty$ .

b) calculer la dérivée de  $f$ .

c) Étudier le signe de la dérivée puis établir le tableau des variations de  $f$ .

a)  $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{array} \right\}$  par somme de limites,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\}$  par somme de limites,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b)  $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$

c)  $f'(x) \geq 0$  par somme de termes positifs.

On en déduit le tableau de variations de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$  :

$x$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de $f$	$-\infty$  $+\infty$	

7. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x) - 2x$ .

- a) Calculer les limites de  $f$  en 0 puis en  $+\infty$ .
- b) calculer la dérivée de  $f$ .
- c) Étudier le signe de la dérivée puis établir le tableau des variations de  $f$ .

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} -2x = 0 \end{array} \right\} \text{par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissance comparée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

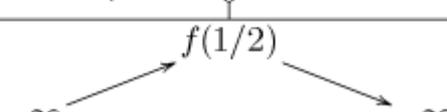
$$\text{b) } f'(x) = \frac{1}{x} - 2$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}.$$

$x > 0$ , donc  $f'(x)$  est du signe de  $1-2x$ .

$$1-2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}.$$

On en déduit le tableau de variations de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$  :

$x$	0	1/2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f$	$f(1/2)$ 		

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \times \frac{1}{2} = -\ln(2) - 1.$$