

TP3 2e année IPT : Récursivité

Exercice 1 : Calcul du PGCD

Ecrire une fonction itérative puis une fonction récursive qui calculent le PGCD. Prouver leur terminaison/correction et évaluer leur complexité. Que peut-on dire de la pile de récursion dans le cas récursif ?

Exercice 2 : Calcul de puissances

Nous proposons deux algorithmes pour calculer a^n :

- Une fonction $p(a, n)$ définie par $p(a, 0) = 1$ et $p(a, n) = a * p(a, n - 1)$ si $n > 0$.
- (Exponentiation rapide) Une fonction $q(a, n)$ définie par $q(a, 0) = 1$ et si $n > 0$:

$$q(a, n) = \begin{cases} q(a^2, n/2) & \text{si } n \text{ est pair} \\ a * q(a^2, (n - 1)/2) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Programmer les deux fonctions, montrer la terminaison et la correction pour $q(a, n)$. Evaluer la complexité de chacune des deux fonctions.

Exercice 3 : Coefficients binomiaux

1. Pour calculer le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, on peut utiliser la formule du triangle de Pascal: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Pensez-vous que ce soit une bonne solution ? Justifier.

2. Nous pouvons utiliser d'autres formules de récurrence comme: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ (si $k \neq 0$) ou $\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k}$ (si $n > k$).

Programmer les deux versions ci-dessus, en veillant aux cas d'arrêt. Comparer leurs complexités. Laquelle privilégier ? Voyez-vous des inconvénients par rapport à la méthode du triangle de Pascal ?

Exercice 4 : Recherche dichotomique dans un tableau trié

Cet algorithme a déjà été vu en première année et revu lors du TP1 en version itérative. Programmer une version récursive qui soit de même complexité (attention aux coûts cachés, ne pas aller trop vite !), prouver sa terminaison/correction.

Exercice 5 : Tours de Hanoï

Le principe est le suivant: on dispose d'une tour constituée de n disques de taille croissante superposés sur une tige 1, on dispose de deux autres tiges 2 et 3. Le but est de déplacer intégralement la tour sur la tige 3 en respectant les règles suivantes:

- On ne peut déplacer qu'un disque à la fois d'une tige à une autre.
- On ne peut pas poser un disque sur un autre de diamètre inférieur.

Ecrire une fonction récursive qui prend en entrée le nombre n de disques et résout ce problème en indiquant les étapes de déplacement. On pourra imprimer des instructions de la forme "Déplacer un disque de la tige i vers la tige j ".