TP 2e année IPT : Equation de la chaleur

On se propose dans ce TP de résoudre de manière numérique l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

sur une barre horizontale de longueur finie L dont on a fixé les conditions aux bords ainsi qu'une condition initiale:

$$T(x,0) = T_0(x) \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant L,$$

$$T(0,t) = T(L,t) = T_{ext} \text{ pour } t > 0.$$

Nous présenterons deux méthodes pour cela. Avant toute chose, on s'assurera d'importer les modules nécessaires:

```
import numpy as np
import matplotlib as mpl
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
```

Méthode 1 : FTCS (Forward-Time Central-Space)

Il s'agit d'une méthode de discrétisation : on subdivise l'intervalle de temps et celui d'espace en sous-intervalles de longueurs respectives dt et dx, ce qui nous donne un cadrillage de l'espace-temps. On utilise ensuite les approximations suivantes (pouvez-vous les justifier ?):

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \simeq \frac{T(x,t+1) - T(x,t)}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \simeq \frac{T(x+1,t) + T(x-1,t) - 2T(x,t)}{dx^2}$$

Pour que ce modèle soit stable on impose la condition : $dt < \frac{dx^2}{2}$.

1. Utiliser les formules ci-dessus pour établir la relation calculant $T(x,t+1)$.

2. Programmer cette méthode en Python en prenant pour échelle d'espace l'intervalle $[0,1]$ découpé en 10, pour échelle de temps l'intervalle $[0,1]$ découpé en 1000, et pour conditions initiales/aux bords: $T_0(x) = 0$, $T_{ext} = 1$. Tracer ensuite la surface correspondante.

Pour tracer une surface, on utilisera les commandes suivantes: si `X,Y` représentent les vecteurs des abscisses et des ordonnées (de tailles respectives n et m) et `Z = f(X,Y)` la surface que l'on veut représenter (sous forme d'un tableau de taille $n \times m$) :

```
ax = Axes3D(plt.figure())
X, Y = np.meshgrid(X, Y , indexing = 'ij')
ax.plot_surface(X, Y, Z)
```

Méthode 2 : Utiliser une EDO

Dans la deuxième approximation, on remarque que tous les termes de droite sont pris au même instant t. Dès lors, on peut considérer T comme un vecteur de même taille que X (vecteur d'espace) et dépendant uniquement du temps t. On peut alors approximer l'EDP par EDO (équation différentielle ordinaire) à valeurs vectorielles:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T[x+1](t) + T[x-1](t) - 2T[x](t)}{dx^2}$$

1. Utiliser `odeint` pour résoudre cette EDO (écrire soigneusement la fonction `F` correspondante) avec les mêmes conditions initiales que précédemment, puis tracer la surface obtenue et comparer avec celle obtenue précédemment.

2. Utiliser la méthode d'Euler à la place d'`odeint` pour la résoudre (recoder la méthode d'Euler générale). Tracer la surface obtenue et comparer avec les précédentes.