DS n°1

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être soulignés ou encadrés *à la règle*, le texte et les formules ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités :
— Moins de 80% des *s* du pluriel ou moins de 70% des accents : -3 points,
— Formules mathématiques non ponctuées : -1 point,
— Recours à des abréviations (tt, qqs, fc., ens...) ou usage abusif de symboles logiques : -2 points.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Ce plaisant premier devoir moyennement long et facile est composé de deux problèmes. Le premier étudie une équation intégrale en utilisant des techniques d'algèbre linéaire et des résultats sur les équations différentielles. Le second est un problème de probabilités teinté ça et là d'algèbre linéaire élémentaire.

PREMIER PROBLÈME

Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue.

L'objet de ce problème est d'étudier, dans certains cas, l'ensemble $\mathcal{S}_g$ des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continues telles que pour tout réel x,

$$f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = g(x).$$

Partie 1

On suppose dans cette partie que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que tout élément f de $\mathcal{S}_g$ est deux fois dérivable et est solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle :
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - y(x) = g''(x). \tag{1}$$
2. Déterminer $\mathcal{S}_g$ dans les trois cas suivant
   (a) g est l'application nulle.
   (b) g est une application constante.
   (c) g est un polynôme de degré 1.
3. Montrer que $\mathcal{S}_g$ admet au plus une solution. Ce résultat est-il vrai dans le cas où g n'est pas supposé de classe $\mathcal{C}^2$.
4. **5/2** En utilisant la méthode de la variation des constantes donner la forme générale des solutions de l'équation (1).
5. **3/2** Montrer que pour tout couple (k,k') de réels l'application :
$$f_{k,k'}\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{e^x}{2}\left(\int_0^x e^{-t}g''(t)\mathrm{d}t + k\right) - \frac{e^{-x}}{2}\left(\int_0^x e^{t}g''(t)\mathrm{d}t + k'\right)$$
est solution de (1).

6. Montrer que toute solution f de (1) est élément de $\mathcal{S}_g$ si et seulement si elle vérifie :

$$f(0) = g(0), f'(0) = g'(0).$$

7. Déterminer $\mathcal{S}_g$ dans le cas où $g = \exp$.

Partie 2

On note $\mathbf{E}$ l'ensemble des application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues.

Pour tout élément f de $\mathbf{E}$ on note $A(f)$ l'application

$$A(f) \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout élément f de $\mathbf{E}$, $A(f)$ est élément de $\mathbf{E}$.
   On dispose donc de l'application $A \ : \ \mathbf{E} \to \mathbf{E}\,;\ f \mapsto A(f)$.
2. Montrer que A est injective.
3. On note I l'application identité de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ et pour tout entier naturel n on note A_n la n^{e} itérée de A :

$$A_0 = I,\ A_1 = A,\ A_2 = A \circ A, \ldots,\ A_n = \underbrace{A \circ A \circ \cdots \circ A}_{n \text{ termes}}.$$

   Montrer que pour tout élément f de $\mathbf{E}$, et tout réel x,

$$A_2(f)(x) = \int_0^x \frac{1}{3!}(x-t)^3 f(t)\mathrm{d}t.$$

   Donner une expression analogue pour $A_n(f)(x)$, valable pour tout entier $n \geq 1$.
4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $U_n = A + A_2 + ... + A_n$ et soit U l'application de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ définie par

$$U(f) \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)f(t)\mathrm{d}t,$$

   pour tout élément f de $\mathbf{E}$.
   (a) Montrer que pour tout réel u :

$$\left|\mathrm{sh}(u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| \leq \frac{\mathrm{ch}(u)|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

   (b) En déduire que pour tout élément f de $\mathbf{E}$ et tout réel x,

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \frac{\mathrm{ch}(x)|x|^{2n}}{(2n)!}\left|\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t\right|.$$

5. Montrer que $U \circ A = A \circ U = U - A$.
6. Montrer que les applications $I - A$ et $I + U$ sont des bijections de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ réciproques l'une de l'autre. En déduire $\mathcal{S}_g$.

SECOND PROBLÈME

Toute les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ [1]. Dans tout le problème un polynôme R sera également noté $R(X)$. On considère a et b deux entiers naturels non nuls et l'on pose $N = a + b$. On considère une urne contenant initialement a boule noires et b boules blanches, dans laquelle on effectue des tirage successifs d'une boule selon le protocole suivant :

— si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant ;

— si la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée dans celle-ci par une boule blanche, prise dans une réserve annexe, avant de procéder au tirage suivant.

On considère pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire X_n égal au nombre de boules noires tirées lors des n premier tirages, et on note $\mathrm{E}(X_n)$ sont espérance.

Partie 1

Soit F l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à a et Φ l'application qui à tout polynôme R de F, fait correspondre $\Phi(R)$ défini par :

$$\Phi(R) = (aX + b)R + X(1 - X)R',$$

où R' désigne le polynôme dérivée de R.

1. (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de F.

   (b) Ecrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

2. (Réservé 5/2) Φ est-il diagonalisable ?

3. Pour tout élément k de $\{0, .., a\}$, on définit l'élément de F :

$$H_k = X^k(1 - X)^{a-k}.$$

   (a) Calculer $\Phi(H_k)$.

   (b) Montrer que $(H_0, H_1, \ldots, H_a)$ est une base de F. On la notera $\mathcal{B}_1$

4. On considère la suite de polynôme $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $Q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $Q_{n+1} = \Phi(Q_n)$.

   (a) Donner la décomposition de Q_0 dans la base $\mathcal{B}_1$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$Q_n = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (b + k)^n H_k.$$

Partie 2

Pour tout $k \in N^*$, on note T_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k^{e} tirage amène une boule noire, et qui vaut 0 sinon.

1. (a) Déterminer la loi de T_1.

   (b) Déterminer la loi de T_2.

   (c) Calculer la covariance de T_1 et T_2.

2. (a) Exprimer X_n en fonction de $T_1, T_2, \ldots T_n$, pour tout entier $n \geq 1$.

1. L'explicitation d'un tel univers dépasse le cadre du cours de MPSI et de MP*

(b) Montrer que pour tout n de $\mathbf{N}^*$:

$$\mathbf{P}(T_{n+1}=1)=\frac{a-\mathrm{E}(X_n)}{N}.$$

(c) En déduire, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ que :

$$\mathbf{P}(T_n=1)=\frac{a(N-1)^{n-1}}{N^n}.$$

3. Calculer $\mathrm{E}(X_n)$ pour tout $n\in\mathbf{N}^*$. Montrer que $\mathrm{E}(X_n)$ tend vers une limite à déterminer lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie 3

1. (a) Justifier intuitivement le fait que $X_n(\Omega)=\{0,\dots,\min\{a,n\}\}$.

   (b) calculer $P(X_n=0)$.

   (c) Calculer pour tout entier naturel $n\leq a$, $\mathbf{P}(X_n=n)$.

   On définit, pour tout entier $n\geq 1$, le polynôme $G_n=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(X_n=k)X^k$. et l'on pose $G_0=1$.

2. (a) Etablir pour tout entier naturel k, tel que $1\leq k\leq\min\{a,n\}$,

$$\mathrm{P}(X_{n+1}=k)=\frac{b+k}{N}\mathrm{P}(X_n=k)+\frac{a+1-k}{N}\mathrm{P}(X_n=k-1). \tag{2}$$

   (b) Vérifier quel'égalité (2) est encore valable pour $k=0$.

   (c) On suppose que $n+1\leq a$. Montrer que (2) est encore vérifier pour $k=n+1$.

   (d) En déduire que (2) est vérifiée pour tout entier naturel k inférieur ou égal à a.

3. Montrer l'égalité :

$$G_{n+1}=\frac{aX+b}{N}G_n+\frac{X(1-X)}{N}G_n'. \tag{3}$$

4. (a) Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Que représente $G_n'(1)$ pour la variable aléatoire X_n ?

   (b) À l'aide de (3), exprimer, pour tout entier $n\geq 1$, $\mathrm{E}(X_{n+1})$ en fonction de $\mathrm{E}(X_n)$.

   (c) Retrouver ainsi la valeur de $\mathrm{E}(X_n)$, en fonction de n.

5. Montrer que pour tout entier naturel j inférieur ou égal à a :

$$\mathrm{P}(X_n=j)=\sum_{k=0}^{j}\binom{a}{k}\binom{a-k}{j-k}(-1)^{j-k}\left(\frac{b+k}{N}\right)^n.$$

⋆ ⋆

⋆

Correction du DS n°1
SECOND PROBLÈME

Partie 1

1. (a) La linéarité de Φ résulte de la linéarité de la dérivation et de celle de la multiplication par un polynôme.
Soit $k \in \{0, ..., a-1\}$

$$\Phi(X^k) = (b+k)X^k + (a-k)X^{k+1} \in F,$$

$$\Phi(X^a) = (b+a)X^a + 0X^{a+1} \in F.$$

Donc $(X^0, X^1, \dots X^a)$ étant une base de F et Φ linéaire, $\Phi(F) \subset F$.

$\underline{\Phi \text{ est un endomorphisme de } F.}$

(b) Le calcul mené au (a) donne

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b & 0 & & & 0 \\ a & b+1 & & & \\ 0 & a-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b+a+1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a-(a-1) & b+a \end{pmatrix}}$$

2. (Réservé 5/2) Φ est diagonalisable car il admet $a+1$ valeurs propres deux à deux distinctes : $b, b+1, ...b+a$ et que F est de dimension $a+1$.

3. (a)

$$\Phi(H_k) = (aX+b)X^k(1-X)^{a-k} +$$
$$X(1-X)\big(kX^{k-1}(1-X)^{a-k} - (a-k)X^k(1-X)^{n-k-1}\big)$$

Donc
$$\Phi(H_k) = (b + aX + k(1-X) - (a-k)X)H_k = \underline{(b+k)H_k}.$$

(b) (5/2) $(H_0, H_1, \dots, H_a)$ est une famille libre de F car c'est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, donc une base car de cardinal $a+1$ égal à la dimension de F.
(3/2) On montre la liberté de $(H_0, H_1, \dots, H_n)$, pour $n = 0, ..., a$ par récurrence et en utilisant Φ.

4. (a) Grâce au binôme de Newton,

$$Q_0 = ((1-X)+X)^a = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} X^k(1-X)^{a-k} = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} H_k.$$

(b) Notons pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(\mathbf{P}_n)$ la propriété à montrer.
- La sous-question (a) prouve $(\mathbf{P}_0)$.

- Soit $m \in \mathbf{N}$. Supposons $(\mathbf{P}_m)$.

$$Q_{m+1} \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (b+k)^n H_k.$$

$$Q_{m+1} = \Phi\left(\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (b+k)^m H_k\right) = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (b+k)^m \Phi(H_k) = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (b+k)^{m+1} H_k,$$

par (a). D'où $(\mathbf{P}_{m+1})$

Donc par récurrence $(\mathbf{P}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Partie 2

Pour tout $k \in N^*$, on note T_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k^{e} tirage amène une boule noire, et qui vaut 0 sinon.

1. (a) A chaque tirage la probabilité de tirage d'une boule est *a priori* uniforme donc :

$$\boxed{T_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{a}{N}\right)}$$

(b) Par la formule des probabilités totales, puisque $(\{T_1 = 1\}, \{T_1 = 0\})$ est un système complet d'événements,

$$\mathrm{P}(T_2 = 1) = \mathrm{P}(T_2 = 1 | T_1 = 1)\mathrm{P}(T_1 = 1) + \mathrm{P}(T_2 = 1 | T_1 = 0)\mathrm{P}(T_1 = 0) = \frac{a-1}{N} \times \frac{a}{N} + \frac{a}{N} \times \frac{b}{N}.$$

D'où $\mathrm{P}(T_2 = 1) = \frac{a(N-1)}{N^2}$ Donc $\boxed{T_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{a(N-1)}{N^2}\right)}$

(c) Calculer la covariance de T_1 et T_2.

D'après (a) et (b) et le cours,

$$\mathrm{E}(T_1) = \frac{a}{N},$$

$$\mathrm{E}(T_2) = \frac{a(N-1)}{N^2}.$$

Par ailleurs

$$\mathrm{E}(T_1 T_2) = 1 \times \mathrm{P}(T_1 T_2 = 1) + 0 \times \mathrm{P}(T_1 T_2 = 0) = \mathrm{P}(T_1 = 1, T_2 = 1) = \mathrm{P}(T_2 = 1 | T_1 = 1)\mathrm{P}(T_1 = 1).$$

Soit $\mathrm{E}(T_1 T_2) = \frac{a-1}{N} \times \frac{a}{N}$.

Donc

$$\boxed{\mathrm{cov}(T_1, T_2) = \mathrm{E}(T_1 T_2) - \mathrm{E}(T_1)\mathrm{E}(T_2) = \frac{a-1}{N} \times \frac{a}{N} - \frac{a}{N} \times \frac{a(N-1)}{N^2} = \frac{a(a-N)}{N^3}}$$

2. (a) $X_n = T_1 + T_2, \cdots + T_n$, pour tout entier $n \geq 1$.

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Par le formule des probabilités totales

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(T_{n+1} = 1 | X_n = k)\mathrm{P}(X_n = k),$$

puisque la famille $(\{X_n = k\}, k = 0, ...n)$ est un système complet d'événements (X_n est à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$). Donc

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a-k}{N} \mathrm{P}(X_n = k) =$$

$$\frac{a}{N} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_n = k) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X_n = k) = \frac{a}{N} \times 1 - \frac{1}{N} \mathrm{E}(X_n) = \frac{a - \mathrm{E}(X_n)}{N}.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on note $\mathbf{Q}_n$ la propriété à prouver.

- $\mathbf{Q}_n$ est vraie, cf. 1.(a).
- Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathbf{Q}_k$ vraie pour $k = 1, 2, \dots, m$. D'après (b) et (a) et la linéarité de l'espérance,

$$\mathrm{P}(T_{m+1} = 1) = \frac{a - \sum\limits_{k=1}^{m} E(T_k)}{N}$$

Mais puisque les T_n, $n \in \mathbf{N}^*$, sont des variables de Bernoulli,

$$\mathrm{P}(T_{m+1} = 1) = \frac{a - \sum\limits_{k=1}^{m} \mathrm{P}(T_k = 1)}{N} = \frac{a - \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{a(N-1)^{k-1}}{N^k}}{N},$$

grâce à $\mathbf{Q}_1$,.... $\mathbf{Q}_m$. Calculons grâce à notre science des suites géométriques :

$$\mathrm{P}(T_{m+1} = 1) = \frac{a}{N} - \frac{a}{N^2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} = \frac{a}{N} - \frac{a}{N^2} \frac{1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^m}{1 - \frac{N-1}{N}} = a\frac{(N-1)^m}{N^{m+1}}.$$

D'où $\mathbf{Q}_{m+1}$.

Donc par récurence, La propriété $\mathbf{Q}_n$ est vraie, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\boxed{\mathbf{P}(T_n = 1) = \frac{a(N-1)^{n-1}}{N^n}.}$$

3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ Par (b) et en utilisant le secours de (c),

$$\mathrm{E}(X_n) = a - N\mathrm{P}(T_{n+1} = 1) = a - \frac{a(N-1)^n}{N^n} = a - a\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

Comme $\left(1 - \frac{1}{N}\right) \in]0, 1[$, $\boxed{\mathrm{E}(X_n) \underset{n \to +\infty}{\to} a}$

Partie 3

1. (a) Il y a au total a boules noires, on ne peut en tirer plus que a ! !

$$X_n \leq a.$$

On tire une boule et une seule à chaque tirage, au bout de n tirage on ne peut avoir tiré plus de n boules noires :

$$X_n \leq m.$$

Par ailleurs X_n peut prendre *a priori* toutes les valeurs de 0 à $\min\{a, n\}$.

Donc $\boxed{X_n(\Omega) = \{0, \dots, \min\{a, n\}\}}$ [2]

2. Une preuve mathématique utilisant le modèle semble inaccessible puisque l'on ne connait pas Ω...

(b) • *Première méthode* :
La formule des probabilités composées dit

$\mathrm{P}(X_n = 0) = \mathrm{P}(T_1 = 0, T_2 = 0, ...T_n = 0) =$

$$\mathrm{P}(T_1 = 0)\mathrm{P}(T_2 = 0|T_1 = 0)\mathrm{P}(T_3 = 0|T_1 = 0, T_2 = 0)......\mathrm{P}(T_n|T_1 = 0, T_2 = 0, ..., T_n = 0).$$

Donc, comme après chaque tirage le nombre de boules noires est inchangé, :

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \underbrace{\frac{b}{N} \times \frac{b}{N} \times \frac{b}{N} \times ... \times \frac{b}{N}}_{n \text{ termes}}.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{P}(X_n = 0) = \left(\frac{b}{N}\right)^n.}$$

• *Seconde méthode* : On peut montrer par récurence sur n ce résultat.
On a vu (cf. II.1.(a)) que $\mathrm{P}(X_1 = 0) = \left(\frac{b}{N}\right)^1$. Si l'on suppose que pour un entier $m \geq 1$, $\mathrm{P}(X_m = 0) = \left(\frac{b}{N}\right)^m$ alors :

$$\mathrm{P}(X_{m+1} = 0) = \mathrm{P}(T_1 = 0)\mathrm{P}(X_{m+1} = 0|T_1 = 0) + \mathrm{P}(T_1 = 1)\mathrm{P}(X_{m+1} = 0|T_1 = 1)$$

D'une part $\mathrm{P}(X_{m+1} = 0|T_1 = 1) = 0$, d'autre part $\mathrm{P}(X_{m+1} = 0|T_1 = 0) = 0 = \mathrm{P}(X_m = 0)$, puisque à l'issue du premier tirage les conditions restent inchangées et que les tirages $2, 3, ...m, ...$ suivent la même loi que les tirages $1, 2, ..., m-1, ...$ Donc $\mathrm{P}(X_{m+1} = 0) = \frac{b}{N} \times \left(\frac{b}{N}\right)^m = \left(\frac{b}{N}\right)^{m+1}$ Et par récurrence on trouve le résultat.

(c) Là encore, deux méthodes.
• *Première méthode* :
La formule des probabilités composées dit :

$\mathrm{P}(X_n = n) = \mathrm{P}(T_1 = 1, T_2 = 1, ...T_n = 1) =$

$$\mathrm{P}(T_1 = 1)\mathrm{P}(T_2 = 1|T_1 = 1)\mathrm{P}(T_3 = 1|T_1 = 1, T_2 = 1)......\mathrm{P}(T_n|T_1 = 1, T_2 = 1, ..., T_n = 1).$$

Comme après chaque tirage le nombre de boules noires diminue de 1,

$$\mathrm{P}(X_n = n) = \underbrace{\frac{a}{N} \times \frac{a-1}{N} \times \frac{a-2}{N} \times ... \times \frac{a-n+1}{N}}_{n \text{ termes}}.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{P}(X_n = n) = \frac{a!}{(a-n)!N^n}}$$

• *Seconde méthode* : On peut montrer par récurence sur n ce résultat.
On a vu (cf. II.1.(a)) que $\mathrm{P}(X_1 = 1) = \left(\frac{a}{N}\right)^1 = \frac{a!}{(a-1)!N^1}$. Si l'on suppose que pour un entier $m \geq 1$, $\mathrm{P}(X_m = m) = \frac{a!}{(a-m)!N^m}$ alors :

$$\mathrm{P}(X_{m+1} = m+1) = \mathrm{P}(T_1 = 0)\mathrm{P}(X_{m+1} = m|T_1 = 0) + \mathrm{P}(T_1 = 1)\mathrm{P}(X_{m+1} = m+1|T_1 = 1).$$

D'une part $\mathrm{P}(X_{m+1} = m|T_1 = 0) = 0$, d'autre part $\mathrm{P}(X_{m+1} = m+1|T_1 = 1) = \mathrm{P}(X'_m = m)$, où l'on définit la suite $(X'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires comme la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mais en faisant partir le protocole de tirage de $a-1$ boules noires et $b+1$ blanches.
Donc par l'hypothèse de récurrence, appliquée à X'_m,

$$\mathrm{P}(X_{m+1} = m+1) = \frac{a}{N} \times \frac{(a-1)!}{((a-1)-m)!N^m} = \frac{a!}{(a-m-1)!N^{m+1}}.$$

2. (a) Soit k un entier naturel, tel que $1 \leq k \leq \min\{a, n\}$. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{\mathrm{P}} (X_{n+1} = k | X_n = i)\mathrm{P}(X_n = i).$$

Or on a :

• pour $i = 0, 1, \dots, n-1$, $p(X_{n+1} = k | X_n = i) = 0$, puisque $0 \leq T_{n+1=} \leq X_{n+1} - X_n \leq 1$ (on ne tire qu'une boule à la fois) ;

• $\mathrm{P}(X_{n+1} = k | X_n = k) = \mathrm{P}(T_n = 0) = \frac{b+k}{N}$, (si k boules noires on été prélevées pendant les n premiers tirage, l'urne contient $b + k$ boules blanches) ;

• $\mathrm{P}(X_{n+1} = k | X_n = k - 1) = \mathrm{P}(T_n = 1) = \frac{a-(k-1)}{N}$.

Donc :

$$\boxed{\mathrm{P}(X_{n+1} = k) = \frac{b+k}{N}\mathrm{P}(X_n = k) + \frac{a+1-k}{N} P(X_n = k-1).}$$

(b) D'après 1.(b),

$$\frac{b+0}{N}\mathrm{P}(X_n = 0) + \frac{a+1-0}{N} P(X_n = 0-1) = \frac{b}{N}\frac{b^n}{N^n} + \frac{a+1}{N} \times 0 = \frac{b^{n+1}}{N^{n+1}} = \mathrm{P}(X_{n+1} = 0).$$

Donc (2) est encore valable pour $k = 0$.

(c) On suppose que $n + 1 \leq a$.

Par 1.(c),

$$\frac{b+n+1}{N}\mathrm{P}(X_n = n+1) + \frac{a+1-(n+1)}{N}\mathrm{P}(X_n = n) = \frac{b+n+1}{N} \times 0 + \frac{a-n}{N}\frac{a!}{(a-n)!N^n}$$

$$= \frac{a!}{(a-(n+1))!N^{n+1}} = \mathrm{P}(X_n + 1 = n+1).$$

Donc (2) est vérifier pour $k = n + 1$.

(d) D'après b et c appliquée avec $n = a - 1$, on a que (2) est vérifiée pour tout entier naturel k inférieur ou égal à a

3. Soit $n \in \mathbf{N}$, d'après 1.

$$G_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{P}(X_{n+1} = k)X^k = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{b+k}{N}\mathrm{P}(X_n = k) + \frac{a+1-k}{N}\mathrm{P}(X_n = k-1) \right) X^k.$$

Donc

$$G_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \big(\frac{b}{N}\mathrm{P}(X_n = k) + \frac{a}{N}\mathrm{P}(X_n = k-1) \big) X^k + \sum_{k=0}^{n+1} \big(\frac{k}{N}\mathrm{P}(X_n = k) + \frac{1-k}{N}\mathrm{P}(X_n = k-1) \big) X^k.$$

D'une part :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \big(\frac{b}{N}\mathrm{P}(X_n = k) + \frac{a}{N}\mathrm{P}(X_n = k-1) \big) X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{b}{N}\mathrm{P}(X_n = k)X^k + X \sum_{j=0}^{n} \frac{a}{N}\mathrm{P}(X_n = j) \big) X^j,$$

puisque $\mathrm{P}(X_n = n + 1) = 0$ et que $\mathrm{P}(X_n = -1) = 0$. Soit

$$\sum_{k=0}^{n+1} \big(\frac{b}{N}\mathrm{P}(X_n = k) + \frac{a}{N}\mathrm{P}(X_n = k-1) \big) X^k = \frac{aX + b}{N} G_n.$$

D'autre part :

$$\sum_{k=0}^{n+1}\big(\frac{k}{N}\mathrm{P}(X_n=k)+\frac{1-k}{N}\mathrm{P}(X_n=k-1)\big)X^k = X\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{N}\mathrm{P}(X_n=k)X^{k-1}-X^2\sum_{j=0}^{n}\frac{j}{N}\mathrm{P}(X_n=j)X^{j-1}$$

toujourscar $\mathrm{P}(X_n=n+1)=0$ et $\mathrm{P}(X_n=-1)=0$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n+1}\big(\frac{k}{N}\mathrm{P}(X_n=k)+\frac{1-k}{N}\mathrm{P}(X_n=k-1)\big)X^k=\frac{X(1-X)}{N}G_n'.$$

Finalement

$$\boxed{G_{n+1}=\frac{aX+b}{N}G_n+\frac{X(1-X)}{N}G_n'}$$

4. (a) $G_n'(1)=\sum\limits_{k=0}^{n}k\mathrm{P}(X_n=k)1^{k-1}=\mathrm{E}(X_n)$, car X_n à ses valeurs incluses dans $\{0,...n\}$

   Donc $\underline{G_n'(1)\text{ est l'espérance de }X_n.}$

   (b) Soit un entier $n\geq 1$. Grâce à de (3),

   $$\mathrm{E}(X_{n+1})=G_{n+1}'(1)=\frac{a}{N}G_n(1)+\frac{a\times 1+b}{N}G_n'(1)+\frac{0}{N}G_n''(1)+\frac{1-2\times 1}{N}G_n'(1).$$

   Or $G_n(1)=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{P}(X_n=k)=\mathrm{P}(X_n\in\{0,...n\}=1$, puisque les événements $(X_n=k)$, $k=0,...n$, sont deux à deux disjoints et que X_n est à valeurs dans $\{0,..,n\}$. Donc $\mathrm{E}(X_{n+1})=\frac{a}{N}+\left(\frac{N-1}{N}\right)\mathrm{E}(X_n)$.

   (c) $(\mathrm{E}(X_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est donc une suite arithméticogéométrique. Une bonne connaissance du cours de première nous enseigne, puisque

   $$a=\frac{a}{N}+a\left(\frac{N-1}{N}\right),$$

   qu'il existe un réel λ, tel que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$,

   $$\mathrm{E}(X_n)=a+\lambda\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}.$$

   Mais I.1.a nous dit que $\mathrm{E}(X_1)=\mathrm{E}(T_1)=\frac{a}{N}$ et donc $\lambda=\frac{a(1-N}{N}$ et l'on retrouve ainsi la formule du II.3., $\mathrm{E}(X_n)=a-a\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$.

5. Par convention $G_0=1=Q_0$ et la question 3. montre que $N^{n+1}G_{n+1}=\Phi(N^nG_n)$, pour tout $n\in\mathbf{N}$ si bien que :

$$N^nG_n=Q_n.$$

Soit alors $j\in\{0,...,a\}$. Par la formule de Taylor, $\mathrm{P}(X_n=j)=\frac{G_n^{(j)}(0)}{j!}$ et donc, d'après I.4.(b),

$$\mathrm{P}(X_n=j)=\frac{1}{N^n}\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}(b+k)^n\frac{H_k^{(j)}(0)}{j!}.$$

Soit $k\in\{0,...,a\}$, la formule de Leipnitz affirme :

$$H_k^{(j)}=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}k(k-1)...(k-i+1)X^{k-i}(-1)^{j-i}(a-k)(a-k-1).....(a-k-j+i-1)(1-X)^{a-k-j+i},$$

(formule écrite dans $\mathbf{R}(X)$).
Donc si $k > j$ alors $H_k^j(0) = 0$ et si $k \leq j$ alors il reste dans la somme un seut terme, celui correspondant à $i = k$:

$$H_k^{(j)}(0) = \binom{j}{k} k!(-1)^{j-k}(a-k)(a-k-1).....(a-j-1) = (-1)^{j-k}\frac{j!k!(a-k)!}{k!(j-k)!(a-j)!}.$$

Donc finalement :

$$\boxed{\mathrm{P}(X_n = j) = \sum_{k=0}^{j} \binom{a}{k} \binom{a-k}{j-k} (-1)^{j-k} \left(\frac{b+k}{N}\right)^n.}$$

PREMIER PROBLÈME

Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue.

L'objet de ce problème est d'étudier, dans certains cas, l'ensemble $\mathcal{S}_g$ des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continues telles que pour tout réel x,

$$f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = g(x).$$

Partie 1

On suppose dans cette partie que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Soit f un éventuel élément de $\mathcal{S}_g$.

$$f(x) = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + g(x),$$

L'application f étant continue, donc aussi $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$, le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant de sa borne supérieure dit que $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ de dérivées respectives : f et $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}f$. Comme g et $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, on a que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et :

$$f' \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) + g'(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + g'(x). \qquad (4)$$

En applicant encore une fois le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant de sa borne, et grâce au caractère $\mathcal{C}^2$ de g, f est $\mathcal{C}^2$ et

$$f'' \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto f(x) + g''(x).$$

Donc f est solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - y(x) = g''(x).$$

2. Prenons g l'application associé au polynôme $aX+b$, où a et b sont des réels.

Soit f un éventuel élément de $\mathcal{S}_g$. D'après 1., il existe des réel A et B tels que : $f = A\exp + B\exp(-\cdot)$.

Réciproquement soient A et B des réels, posons $g_{A,B} = A\exp + B\exp(-\cdot)$.

Une primitive de $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}\exp$ est $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}\exp - \exp$ une de $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}\exp(-\cdot)$ [3] est $-\mathrm{id}_R\exp(-\cdot) - \exp(-\cdot)$, donc pour tout réel x,

$$x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = A(e^x - x - 1) + B(e^{-x} + x - 1) = g_{A,B} + (-A+B)x - (A+B).$$

Donc $g_{a,b} \in \mathcal{S}_g$ si et seulement si :

$$\begin{cases} A - B = a, \\ A + B = b \end{cases}$$

On trouve donc que $\mathcal{S}_g$ est réduit à un et un seul élément :

$$\boxed{\mathcal{S}_g = \left\{ g_{\frac{b+a}{2},\frac{b-a}{2}} \right\}}$$

3. Résoudre $y' = 0y + xe^x$ avec les techniques du cours de MPSI.

(a) $\mathcal{S}_{0_{\mathbf{R}\to\mathbf{R}}} = \{0_{\mathbf{R}\to\mathbf{R}}\}$.

(b)

$$\mathcal{S}_b = \left\{\frac{b}{2}\mathrm{ch}\right\}.$$

(c)

$$\mathcal{S}_{aX+b} = \left\{\ \frac{b+a}{2}\exp + \frac{b-a}{2}\exp(-\cdot)\right\}.$$

3. Soit f et $\tilde{f}$ des éléments de $\mathcal{S}_g$ alors $f-\tilde{f}$ est par linéarité de l'intégrale élément de $\mathcal{S}_{0_{\mathbf{R}\to\mathbf{R}}}$, ce que g soit ou non $\mathcal{C}^2$. Donc d'après 2. (a) $f-\tilde{f}$ est nulle et donc :
$\mathcal{S}_g$ admet au plus une solution, que g soit ou non $\mathcal{C}^2$.

4. **5/2** *il s'agit ici d'une utilisation directe du cours ....*

5. **3/2** Montrer que pour tout couple (k,k') de réels l'application : La formule de Leibnitz donne :

$$f''_{k,k'}\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}\,;\ x\mapsto x\mapsto \frac{e^x}{2}\left(\int_0^x e^{-t}g''(t)\mathrm{d}t+k\right)-\frac{e^{-x}}{2}\left(\int_0^x e^{t}g''(t)\mathrm{d}t+k'\right)+$$
$$2\left(\frac{e^x}{2}(e^{-x}g''(x))-(\frac{-e^{-x}}{2})(e^xg(x)\right)+$$
$$\frac{e^x}{2}(e^{-x}g'''(x)-e^{-x}g''(x))-\frac{e^x}{2}(e^xg'''(x)+e^xg''(x)).$$

Donc $f''_{k,k'}=f_{k,k'}+2g''-g''$
$f_{k,k'}$ est solution de (1).

6. Soit une solution f de (1)
• On suppose que f est élément de $\mathcal{S}_g$, Alors $f(0)=g(0)$ par définition de $\mathcal{S}_g$ et $f'(0)=g'(0)$, par (4).
• On suppose que $f(0)=g(0), f'(0)=g'(0)$. Nous avons : $f''-f=g''$
Intégrons cette égalité entre 0 et un réel x quelconque $f'(x)-f'(0)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = g'(x)-g'(0)$, Soit, compte tenu de l'hypothèse :

$$f'(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = g'(x).$$

Intégrons de nouveau entre 0 et x :

$$f(x)-f(0)-\int_0^x\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = g(x)-g(0)$$

Donc par intégration par parties (la primitive nulle en 0 de f et $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ sont $\mathcal{C}^1$),

$$f(x)-f(0)-\left(\left[\int_0^t f(s)\mathrm{d}st\right]_0^x-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right)=g(x)-g(0)$$

soit, compte tenue de l'hypothèse,

$$f(x)-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = g(x)$$

Donc f est élément de $\mathcal{S}_g$.
Finalement f est élément de $\mathcal{S}_g$. si et seulement si elle vérifie : $f(0)=g(0), f'(0)=g'(0)$. .

7. D'après 1. et 6. $\mathcal{S}_g$ a pour unique élément LA solution sur $\mathbf{R}$ du problème de Cauchy linéaire :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - y(x) = g(x), \\ y(0) = e^0, \\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(0) = e^0. \end{cases}$$

c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S}_g = \left\{ \frac{3}{4}\exp + \frac{1}{4}\exp(-\cdot) + \frac{1}{2}\mathrm{id}_{\mathbf{R}}\exp \right\}}$.

Remarque : l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy linéaire dans le cas général (cf. cours de MP), donne le fait que $\mathcal{S}_g$ est un singleton.

Partie 2

1. Soit $f \in E$. Par définition f est continue et on a montrer en I.1. que $x \mapsto \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ donc *a fortiori* élément de E : $\underline{A(f) \text{ est élément de } \mathbf{E}}$.
2. Notons que la linéarité de l'intégrale fait de A une application linéaire. Soit f un élément du noyau de A, $A(f)$ est nulle par I.1. on déduit par dérivation que :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$$

pour tout réel x, donc en dérivant encore (continuité de f), f est nulle. Le noyau de A est réduit à $O_{\mathbf{R}\to\mathbf{R}}$.

Donc $\underline{A \text{ est injectif.}}$

3. Soient f un élément de $\mathbf{E}$ et x un réel,

$$A_2(f)(x) = \int_0^x (x-t)A(f)(t)\mathrm{d}t,$$

On a vu dans I.1. que $A(f)$ est $\mathcal{C}^2$ et

$$A(f)(0) = A(f)'(0) = 0, A(f)'' = f.$$

on peut donc procéder à deux intégrations par parties successives :

$$A_2(f)(x) = \left[-\frac{(x-t)^2}{2}A(f)(t) - \frac{(x-t)^3}{2\times 2}A(f)'(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{2\times 3}A(f)''(t)\mathrm{d}t$$

et finalement

$$A_2(f)(x) = \int_0^x \frac{1}{3!}(x-t)^3 f(t)\mathrm{d}t.$$

Plus généralement on montre pour tout entier $n \geq 1$ la propriété $(\mathbf{P}_n)$:

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R},\ A_n(f)(x) = \int_0^x \frac{1}{2n-1!}(x-t)^{2n-1}f(t)\mathrm{d}t}$$

- $(\mathbf{P}_1)$ est par définition vraie.
- Soit $m \in \mathbf{N}^*$, tel que $(\mathbf{P}_m)$ soit vraie. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$A_{m+1}(f)(x) = A_m(A(f))(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2m-1}}{(2m-1)!}A(f)(t)\mathrm{d}t.$$

Deux intégrations par parties identiquesà aux précedentes donnent :

$$A_{m+1}(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2m+1}}{(2m+1)!} A(f)''(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{(2(m+1)-1)!}(x-t)^{2(m+1)-1} f(t)\mathrm{d}t.$$

D'où $(\mathbf{P}_{m+1})$.

Par récurence voilà prouvée $(\mathbf{P}_n)$, pour tout entier $n \geq 1$.

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $U_n = A + A_2 + ... + A_n$ et soit U l'application de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ définie par

$$U(f) \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,;\ x \mapsto \int_0^x \mathrm{sh}(x-t) f(t)\mathrm{d}t,$$

pour tout élément f de $\mathbf{E}$.

(a) Soit un réel u. L'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre $2n$ (corollaire immédiat de la formule de Taylor intégralle) dit

$$\left| \mathrm{sh}(u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| \leq \frac{M|u|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

où $M = \sup\limits_{t\in[0,u]} |\mathrm{sh}^{(2n+1)}(t)|$ (nous écrivons $[0,u]$ sans présager que $u \geq 0$). Or $\mathrm{sh}^{(2n+1)} =$ sh et $|\mathrm{sh}| \leq \mathrm{ch}$, donc $M \leq \mathrm{ch}(u)$ par croissance de ch sur $\mathbf{R}_+$ et parité. Donc :

$$\left| \mathrm{sh}(u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| \leq \frac{\mathrm{ch}(u)|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Remarque : en nous limitant dans la formule de Taylor à l'ordre $2n-1$ on obtient la majoration plus faible par $\frac{\mathrm{ch}(u)|u|^{2n}}{(2n)!}$ mieux adaptée à la question suivante. Erreur d'énoncé ?

(b) Soient $f \in E$ et x un réel. D'après 3.

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| = \left| \int_0^x \left(\mathrm{sh}(x-t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-t)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) f(t)\mathrm{d}t \right|.$$

Donc

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \left| \int_0^x \left| \mathrm{sh}(x-t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-t)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| |f(t)|\mathrm{d}t \right|.$$

Donc d'après (a)

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \int_0^x \frac{\mathrm{ch}(x-t)|x-t|^{2n}}{(2n)!} |f(t)|\mathrm{d}t \leq \frac{\mathrm{ch}(x)|x|^{2n}}{(2n)!} \left| \int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t \right|,$$

Par parité et croissance de ch sur $\mathbf{R}_+$.

5. Soient $f \in E$ et $x \in \mathbf{R}$. La convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ de somme $\mathrm{ch}|x| - 1$ (ou la croissance comparée de la suite des factorielles et d'une suite géométrique) assure que : $\frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc $|U(f)(x) - U_n((f))(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et en remplaçant f par $A(f)$ $|U(A(f))(x) - U_n(A(f))(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Par ailleurs,

$$|A(U(f)(x) - A(U_n)(f)(x)| \leq \left| \int_0^x |x-t||U(f)(t) - U_n((f))(t)|\mathrm{d}t \right| \leq$$

$$\left| \int_0^x |x-t| \frac{\mathrm{ch}(t)|t|^{2n}}{(2n)!} \int_0^t |f(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_0^x |x| \frac{\mathrm{ch}(x)|x|^{2n}}{(2n)!} \int_0^x |f(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \right| \leq$$

$$\frac{\mathrm{ch}(x)|x|^{2n+2}}{(2n)!} \left| \int_0^x |f(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \right|$$

Donc $|A(U(f))(x) - A(U_n(f))(x)| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

Or pour tout entier $n \geq 1$, $A(U_n(f))(x) = A_2(f)(x) + A_3(f)(x) + ...A_{n+1}(f)(x) = U_n(A(f))(x)$, donc par passage à la limite : $A(U(f))(x) = U(A(f))(x)$ et comme f et x sont quelconques :

$$\boxed{U \circ A = A \circ U = U - A}$$

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $A(U_n(f))(x) - A(f)(x) = U_{n+1}(A(f))(x)$ on a en laissant tendre n vers $+\infty$,

$$A(U(f))(x) - A(f)(x) = U + (A(f))(x).$$

Donc $\boxed{U \circ A = A \circ U = U - A = U}$.

6. D'après 5. $(I - A) \circ (I + U) = I = (I + U) \circ (I - A)$ [4],

   donc les applications $I - A$ et $I + U$ sont des bijections de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ réciproques l'une de l'autre.

   Concluons : Soit $f \in \mathbf{E}$. $f \in \mathcal{S}_g$ si et seulement si $(I - A)(f) = g$ soit si et seulement si : $f = (I + U)g$. Donc

$$\boxed{S_g = \left\{ \mathbf{R} \to \mathbf{R}, ;\ x \mapsto \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)g(t)\mathrm{d}t + g(x) \right\}}$$

4. Attention il faut les deux égalités car E n'est pas de dimension finie.