DM n$^{\text{o}}$3

Exercice

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réels non nuls , nous dirons que le produit infini associé à la suite, noté $\prod a_n$ converge si par définition la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout entier naturel n, $P_n := \prod_{k=0}^{n} a_k$, converge vers une limite *non nulle*.

1. Montrer que si le produit converge alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1.

   On suppose dans la suite cette condition réalisée. On pose pour tout entier naturel n, $u_n = a_n - 1$ et l'on suppose que : $u_n \neq -1$, pour tout entier naturel n.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geq n_0$, la quantité $\ln(1+u_n)$ est définie. Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(1+u_n)$ converge.

   Dans la suite, on supposera que $\ln(1+u_n)$ est défini pour tout $n \geq 0$.

   Attention ! *Nous insistons sur le fait que $\prod a_n$ n'est pas un réel et que des expressions du type $\ln\left(\prod_{n\geq n_0} a_n\right)$ n'ont rigoureusement aucun sens.*

3. On suppose en outre, dans cette question, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de signe fixe à partir d'un certain rang. Montrer que le produit $\prod a_n$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature.

4. On ne suppose plus que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de signe fixe à partir d'un certain rang, mais que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que le produit converge si et seulemement si la série $\sum u_n^2$ converge.

5. Déterminer la nature des produits infinis suivants :

   (a) $\prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

   (b) $\prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$, où x est un élément de $]-\pi,\pi[$.

   (c) $\prod_{n\geq 1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)\exp\left(-\frac{x}{n}\right)$, où x est un élément de $\mathbf{R}_+^*$.

6. Pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par p_n le n-ième nombre premier. On se propose démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge[1].

   On note $(p_n)_{n\geq 1}$, la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant :

   $$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11 \dots$$

   (a) Soit un entier $p \geq 2$. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k}$.

---

1. Cela signifie qu'il y a pas mal de nombres premiers ! A titre de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ converge.

(b) Soient une entier $N \geq 2$ et un entier $M \geq 1$. Déduire de la sous question précédente que :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_N)\in\{0,1,\ldots,M\}^N} \frac{1}{p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_N^{k_N}}.$$

(c) Montrer que le produit $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ diverge.

(d) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$ diverge.

Problème

Notations

On désigne par K le corps des nombres réels $\mathbf{R}$ ou des complexes $\mathbf{C}$.

— les élément de K^n sont notés en colonne. pour $j = 1, 2, \ldots, n$.

— $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ les matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K ; et $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_{n,n}(K)$.

— Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, on note $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$, le coefficient d'indice (i,j) peut aussi être noté $A(i,j)$.
Pour $X \in K^n$, D_X est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ceux de X.

— Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, σ_A désigne le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A et $\rho(A) = \max\{|\lambda|\,;\lambda\in\sigma_A\}$.

— Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $A^\top$ est la transposée de A ; et pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $A^\star = \overline{A}^\top$ (c'est-à-dire $A^\star(i,j) = \overline{a_{j,i}}$).

Partie I -

Dans cette partie, on munit $\mathbf{C}^n$ de la norme $\| \,\|_\infty$: pour tout $Z \in \mathbf{C}^n$, $\|Z\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |z_j|$.
On définit l'application

$$N_\infty(A)\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}_+\,; A \mapsto \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j\in[1,2,\ldots,n]} |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que $A \mapsto N_\infty(A)$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
2. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que pour tout $Z \in \mathbf{C}^n$

$$\|A(z)\|_\infty \leq N_\infty(A)\,\|Z\|_\infty\,.$$

(b) Montrer l'égalité

$$N_\infty(A) = \max_{Z\in(\mathbf{C}^n\setminus\{0\})} \frac{\|A(Z)\|_\infty}{\|Z\|_\infty}.$$

(c) Montrer que $\rho(A) \leq N_\infty(A)$.

3. Montrer que N_∞ est une norme matricielle c'est-à-dire qu'elle vérifie :
$\forall A$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), N_\infty(AB) \leq N_\infty(A)\ N_\infty(B)$.
4. Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice inversible. On définit
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mapsto N_Q(A) = N_\infty(Q^{-1}AQ)$.

(a) Vérifier que N_Q est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

(b) Montrer qu'il existe une constante C_Q telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \quad \frac{1}{C_Q} N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq C_Q N_\infty(A).$$

5. Soient $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice triangulaire supérieure et un réel $\varepsilon > 0$.
   Montrer que l'on peut choisir un réel s strictement positif telle que, en posant $S = (s, s^2, s^3, \ldots, s^n)$ on ait :

$$N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon.$$

   Étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, montrer qu'il existe une norme matricielle N_ε telle que

$$N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon.$$

6. En déduire l'équivalence des deux propositions suivantes
   i. $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$.
   ii. $\rho(A) < 1$.

Partie II -

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$; pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on pose : $\quad L_i = \sum\limits_{j\in[1,2,\ldots,n]\ j\neq i} |a_{i,j}|$

$C_i = \sum\limits_{j\in[1,2,\ldots,n]\ j\neq i} |a_{j,i}|$.

On définit :

— le sous-ensemble du plan complexe $G_L(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i(A)$, où $D_i(A) = \{z \in \mathbf{C}, |z - a_{i,i}| \leq L_i\}$(disque fermé de centre $a_{i,i}$ de rayon L_i ;

— le sous-ensemble du plan complexe $G_C(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D'_i(A)$ et $D'_i(A) = \{z \in \mathbf{C}, |z - a_{i,i}| \leq C_i\}$.

On désigne, pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, par $C_i(A)$ le cercle bordant le disque $D_i(A)$.

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4+3i & i & 2 & -1 \\ i & -1+i & 0 & 0 \\ 1+i & -i & 5+6i & 2i \\ 1 & -2i & 2i & -5-5i \end{pmatrix}.$$

   Représenter dans le plan complexe $G_L(A)$ et $G_C(A)$.

2. On se propose de montrer l'inclusion $\sigma_A \subset G_L(A) \cap G_C(A)$.

   (a) Soit $M = (\mathcal{M}_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que le système linéaire $MZ = 0$ ait une solution non nulle.
   Montrer qu'il existe $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que :

$$|\mathcal{M}_{p,p}| \leq L_p.$$

   (b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $\lambda \in \sigma_A$. Montrer que $\lambda \in G_L(A)$.

   (c) Conclure en justifiant l'inclusion $\sigma_A \subset G_C(A)$.

3. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ a une valeur propre μ sur le bord de $G_L(A)$ [2] et soit x un vecteur propre associé à μ.
   (a) Montrer que si pour $k \in [1, 2, \ldots, n]$ on a $|x_k| = \|x\|_\infty$, alors $\mu \in C_k(A)$.
   (b) On suppose de plus que que pour tout $(i, j) \in \{1, 2, ...N\}^2$ on a : $a_{i,j} \neq 0$. Montrer que $\mu \in \bigcap_{j=1}^{n} C_j(A)$.
4. Soit $P \in \mathbf{R}^n$. On suppose que $p_j > 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$.
   Déterminer $G_L(D_P^{-1} A D_P)$.
5. (a) II.A.5.a) Déduire de 2. et 4. l'inégalité
$$\rho(A) \leq \inf_{p>0} \left(\max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} p_j \, |a_{i,j}| \right).$$
   (b) Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & 8 \\ -16 & 7 & -8 \\ 8 & -8 & -5 \end{pmatrix}.$$
      i) Montrer que le majorant de $\rho(A)$ donné par 5.a est supérieur ou égal à $\dfrac{83}{3}$.
      ii) Donner une valeur approchée de $\rho(A)$ (on pourra utiliser la calculatrice).

2. Un point z appartient au bord de $G_L(A)$ si et seulement si $z \in G_L(A)$ et $|z - a_{i,i}| \geq L_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Indications pour DM n°3

Exercice 1

1. Noter pour commencer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant à valeurs *non nulles*, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n = \prod_{p=0}^{n} a_p \neq 0$ et donc $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ est bien défini. Reste à laisser tendre n vers $+\infty$.

2. — $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ donc, en particulier, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in \mathbf{N}$, si $n \geq n_0$, alors $|a_n - 1| < 1$. Pour tout $n \geq n_0$ on a $a_n > 0$.
   D'abord on montre que les produits $\prod_{n\geq 0} a_n$ et $\prod_{n\geq n_0} a_n$ sont de même nature.

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$\prod_{p=n_0}^{n} a_p = \exp\left(\sum_{p=n_0}^{n} \ln(a_p)\right), \tag{1}$$
   ou de façon équivalente,
$$\ln\left(\prod_{p=n_0}^{n} a_p\right) = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(a_p). \tag{2}$$

   — *Supposer que la série* $\sum_{n\geq n_0} \ln(a_n)$ *converge.*
   Utiliser l'égalité (1) et la continuité de la fonction exponentielle en $\sum_{p=n_0}^{+\infty} \ln(a_p)$

   — *Supposons que le produit* $\prod_{n\geq 0} a_n$ *converge.*
   Alors $\prod_{n\geq n_0} a_n$ converge, cf. remarque et Utiliser (2) et la continuité du logarithme

   Conclusion :
   la série $\sum_{n\geq n_0} a_n$ converge si et seulement si le produit $\prod_{n\geq 0} \ln(a_n)$ converge.

3. — *Supposer que le produit infini* $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ *converge.*
   Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1+u_n > 0$, la question 1.a. dit que $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge.
   Par ailleurs la convergence du produit assure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (cf. 1.), donc
$$0 \leq \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n, \tag{3}$$
   Utiliser le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

   — *Supposer que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*
   Utiliser encore le théorème.

   — Pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\ln(a_n) = u_n - b_n$, ou $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}u_n^2$. Par comparaison de séries positives $\sum b_n$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge. Donc, puisque $\sum u_n$ converge, $\sum \ln(a_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.

4.

Deuxième partie

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < \frac{1}{n}$, donc compte tenu de 3 (et de la remarque préliminaire faite au 5), la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et le produit $\displaystyle\prod_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sont de même nature. Or pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \prod_{p=1}^{n} \frac{p+1}{p} = \text{........}$$

2. a. La série géométrique $\displaystyle\sum_{k=0} \frac{1}{p^k}$ converge puisque sa raison $\frac{1}{p}$ est élément de $[0, 1[$ et sa somme vaut :

$$\underline{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}}.$$

   b. Soient N un entier supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathbf{N}^*$.

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{p_1^k} \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{p_2^k} \dots \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{p_N^k} \dots$$

   soit

   c. Soit n un élément de $\{1, \dots N\}$. Puisque $P_N \geq N \geq 2$, les facteurs premiers de n sont éléments de $\{p_1, \dots p_N\}$; de plus si l'on choisit M pour que $2^M \geq N$, dans la décomposition de n en facteurs premiers aucun des exposants des facteurs n'excédera strictement M. Donc l'ensemble $\{1, \dots, N\}$ est inclus dans l'ensemble des éléments de la forme $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_N^{k_N}$ avec $(k_1, k_2, \dots, k_N) \in \{0, 1, \dots, M\}^N$.....
   Pour ce choix de M on a donc, grâce à la dernière inégalité,

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m}. \tag{4}$$

   La suite est asinitrotante

   d. Utiliser 3.

PROBLÈME

Partie I -

1. Soient $A \in M_n(\mathbf{C})$, $B \in M_n(\mathbf{C})$, et $\lambda \in \mathbf{C}$.
   - Supposons $N_\infty(A) = 0$. Alors pour tout $(i,k) \in, \{1,\dots,n\}^2$,

     $$0 \leq |a_{i,k}| \leq \sum_{j=1,\dots,n} |a_{i,j}| \leq N_\infty(A) = 0,$$

     et donc $a_{i,k} = 0$. Donc $\underline{A = 0_n.}$
   - Soit i_0 un élément de $\{1,\dots,n\}$ tel que :

     $$\max\left\{\sum_{j=1,\dots,n} |a_{i,j}|, i = 1,\dots,n\right\} = \sum_{j=1,\dots,n} |a_{i_0,j}|.$$

     Pour $i = 1,\dots,n$,

     $$\sum_{j=1,\dots,n} |a_{i,j}| \leq \sum_{j=1,\dots,n} |a_{i_0,j}|$$

     Par multiplication par le réel positif $|\lambda|$,

     $$\sum_{j=1,\dots,n} |\lambda a_{i,j}| \leq \sum_{j=1,\dots,n} |\lambda a_{i_0,j}|.$$

     Donc $\sum\limits_{j=1,\dots,n} |\lambda a_{i_0,j}|$ est majorant et élément de $\left\{\sum\limits_{j=1,\dots,n} |\lambda a_{i,j}|, i = 1,\dots,n\right\}$ s'en est donc le plus grand élément, finalement

     $$\underline{N_\infty(\lambda A) = \sum_{j=1,\dots,n} |\lambda a_{i_0,j}| = |\lambda| \sum_{j=1,\dots,n} |a_{i_0,j}| = |\lambda| N_\infty(A).}$$

   - Pour $i = 1,\dots,n$,

     $$\sum_{j=1,\dots,n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq ....$$

     Donc

   De ces trois points il vient que N_∞ est une norme.
2. (a) Soit A un élément de $M_n(\mathbf{C})$ et soit $z \in \mathbf{C}^n$. Posons $y := Az$.
   Pour $i = 1,\dots,p$,

   $$|y_i| = \left|\sum_{j=1,\dots,n} a_{i,j} y_j\right| \leq ...$$

   Donc $\underline{\|Az\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} |y_i| \leq \|z\|_\infty N_\infty(A).}$

   (b) Par I.A.2)b), pour tout $z \in \mathbf{C}^n \setminus \{0_{n,1}\}$, $\dfrac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leq N_\infty(A)$, donc

   $$\max_{z \in (\mathbf{C}^n \setminus \{0\})} \frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leq N_\infty(A). \tag{5}$$

   Soit i_0 un élément de $\{1,\dots,n\}$ tel que $N_\infty(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$. Posons pour $j = 1,\dots,n$,

   $$\varepsilon_j = \begin{cases} 1, & \text{si } a_{i_0,j} = 0, \\ ?, & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et } Z^* = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n).$$

D'abord $\|Z^*\|_\infty = 1$.
Ensuite $|(AZ^*)_{i_0}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = N_\infty(A)$.

Etc.,etc.,etc...

(c) Soient λ_0 une valeur propre de A tel que $\rho(A) = |\lambda_0|$, et u_0 un vecteur propre associé. Comme vecteur propre, u_0 est non nul et donc :

$$N_\infty(A) = \max_{z\in(\mathbf{C}^n\setminus\{0\})} \frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \geq \frac{\|A(u_0)\|_\infty}{\|u_0\|_\infty} = \ldots.$$

3. Soient A et B des éléments de $M_n(\mathbf{C})$. Soit w un élément non nul de C^n. D'après I.A.2.b) si Bw n'est pas nul alors

$$\|AB(w)\|_\infty \leq N_\infty(A)\|B(w)\|_\infty$$

inégalité trivialement vraie si il est nul. Utiliser encore par I.A.2.b),

4. (a) Élémentaire

5. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. Donc en posant $C(Q) := N_\infty(Q^{-1})N_\infty(Q)$, quantité non nulle, on montre sans mal :

$$\boxed{\frac{1}{C_Q}N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq C_Q N_\infty(A)}$$

Remarque : on peut aussi utiliser l'équivalence des normes en dimension finie et jouer sur les coefficients qui la caractérise.

Prenons s un élément de $]0,1]$. On a $D_S^{-1}TD_S = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2}s & t_{1,3}s^2 & \cdots & t_{1,n}s^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-2,n}s^2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n}s \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$ D'où $N_{D_S}(T) = N_\infty(D_S^{-1}TD_S) = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}}(|t_{i,i}| + \sum_{j=i+1}^n |t_{i,j}||s|^{j-i})$,

Pour s choisi suffisamment petit on montre :

$$\boxed{N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ alors A est trigonalisable (car son polynôme caractéristique est scindé) donc il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible Q tel que $A = QTQ^{-1}$. D'autre part il existe $s \in \mathbf{R}$ tel que $N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon$. Poser donc $N_\varepsilon = N_{QD_S}$ et conclure

- Hypothèse : $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$

Soit $\lambda_0 \in \sigma_A$ tel que $\rho(A) = |\lambda_0|$ et z_0 un vecteur propre associé à λ_0, on a alors pour tout entier $k \geq 0$: $\|A^k(z_0)\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$, cf. I.A.2.(a). D'où $\|\lambda_0^k z_0\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$ et donc $|\lambda_0|^k\|z_0\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$. On conclut sans mal. $\rho_A = |\lambda_0| < 1$.

- Hypothèse : $\rho(A) < 1$

Posons $\varepsilon := \frac{1-\rho(A)}{2}$. Considérer $N_\varepsilon(A^k$.