

Les trois parties sont indépendantes.

### Notations

Dans tout le sujet,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On notera  $P[A]$  la probabilité d'un événement  $A \subset \Omega$  et  $E[X]$  l'espérance d'une variable aléatoire  $X$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  à valeurs réelles.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant :

*Si  $Y_1, \dots, Y_n$  sont des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes et intégrables, alors*

$$E[Y_1 \cdots Y_n] = E[Y_1] \cdots E[Y_n].$$

On note  $\log$  la fonction logarithme népérien. Par convention, on pose  $\log 0 = -\infty$ .

### Première partie

Soit  $n \geq 1$  un entier naturel, et soient  $(X_1, \dots, X_n)$  des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes telles que, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$P[X_k = 1] = P[X_k = -1] = \frac{1}{2}.$$

On définit

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

ainsi que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\psi(\lambda) = \log \left( \frac{1}{2} e^\lambda + \frac{1}{2} e^{-\lambda} \right).$$

**1.** Soit  $Z$  une variable aléatoire réelle discrète telle que  $\exp(\lambda Z)$  est d'espérance finie pour tout  $\lambda > 0$ . Montrer que pour tout  $\lambda > 0$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$P[Z \geq t] \leq \exp(-\lambda t) E[\exp(\lambda Z)].$$

**2.** Montrer que  $P[S_n \geq 0] \geq \frac{1}{2}$ .

**3.** Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\frac{1}{n} \log P[S_n \geq t] \leq \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t).$$

Pour chaque  $\lambda \geq 0$ , on pose

$$m(\lambda) = \frac{E[X_1 \exp(\lambda X_1)]}{E[\exp(\lambda X_1)]},$$

ainsi que

$$D_n(\lambda) = \exp(\lambda n S_n - n \psi(\lambda)).$$

4. Montrer que la fonction  $m$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , et que pour tout  $t \in [0, 1[$ , il existe un unique  $\lambda \geq 0$  tel que  $m(\lambda) = t$ .

5a. Pour  $n \geq 2$  et  $\lambda \geq 0$ , montrer que

$$E[(X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda))D_n(\lambda)] = 0.$$

5b. En déduire que, pour  $n \geq 1$  et  $\lambda \geq 0$ ,

$$E[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] \leq \frac{4}{n}.$$

Pour tous  $n \geq 1$ ,  $\lambda \geq 0$  et  $\varepsilon > 0$ , on note  $I_n(\lambda, \varepsilon)$  la variable aléatoire définie par

$$I_n(\lambda, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Montrer que

$$P[|S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon] \geq E[I_n(\lambda, \varepsilon) \exp(\lambda n(S_n - m(\lambda) - \varepsilon))],$$

7. Montrer que

$$E[I_n(\lambda, \varepsilon) D_n(\lambda)] \geq 1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}.$$

8a. En déduire, pour chaque  $\lambda \geq 0$  et  $\varepsilon > 0$ , l'existence d'une suite  $(u_n(\varepsilon))_{n \geq 1}$  qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini et telle que

$$\frac{1}{n} \log P[S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon] \geq \psi(\lambda) - \lambda m(\lambda) - \lambda \varepsilon + u_n(\varepsilon).$$

8b. Conclure que pour tout  $t \in [0, 1[$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P[S_n \geq t] = \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t).$$

8c. La formule précédente est-elle encore valide pour  $t = 1$  ?

## Deuxième partie

On admet l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}.$$

Soient  $a < b$  deux réels et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction infiniment dérivable. Appelons (H) l'hypothèse suivante : il existe un unique point  $x_0 \in [a, b]$  où  $f$  atteint son maximum, on a  $a < x_0 < b$ , et  $f''(x_0) \neq 0$ .

9. Montrer que sous l'hypothèse (H), on a  $f''(x_0) < 0$ .

**10.** Sous l'hypothèse (H), montrer que pour tout  $\delta > 0$  tel que  $\delta < \min(x_0 - a, b - x_0)$ , on a l'équivalent, quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_a^b e^{tf(x)} dx \sim \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)} dx.$$

**11.** Sous l'hypothèse (H), montrer l'équivalent, quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_a^b e^{tf(x)} dx \sim e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}}.$$

**12a.** Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$n! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt.$$

**12b.** En utilisant les résultats précédents, retrouver la formule de Stirling donnant un équivalent asymptotique de  $n!$ .

### Troisième partie

**13.** Montrer que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a |\sin(x^2)| dx = +\infty.$$

**14.** Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_0^a \sin(x^2) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}.$$

**15.** Montrer que les limites

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \sin(x^2) dx \quad \text{et} \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \cos(x^2) dx$$

existent et sont finies.

On admet les identités :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \sin(x^2) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

**16.** Montrer qu'il existe des nombres réels  $c, c' \in \mathbb{R}$  tels que, pour  $a \rightarrow +\infty$ , on a

$$\int_0^a \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{c}{a} \cos(a^2) + \frac{c'}{a^3} \sin(a^2) + O\left(\frac{1}{a^5}\right).$$

On admettra qu'il existe des nombres réels  $d, d' \in \mathbb{R}$  tels que, pour  $a \rightarrow +\infty$ , on a

$$\int_0^a \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{d}{a} \sin(a^2) + \frac{d'}{a^3} \cos(a^2) + O\left(\frac{1}{a^5}\right).$$

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de l'énoncé,  $f$  désigne une fonction infiniment dérivable de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe un unique point  $x_0 \in [0, 1[$  où  $f'$  s'annule. On suppose également que  $f''(x_0) > 0$ . On se donne également une fonction  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  infiniment dérivable.

17. Montrer qu'on a, pour  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_{x_0}^1 g(x) \sin(tf(x)) \, dx = g(x_0) \int_{x_0}^1 \sin(tf(x)) \, dx + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Pour tout  $x \in [x_0, 1]$ , on définit

$$h(x) = \sqrt{|f(x) - f(x_0)|}.$$

18a. Montrer que la fonction  $h$  définit une bijection de  $[x_0, 1]$  sur  $[0, h(1)]$ .

18b. Montrer que l'application  $h$  est dérivable en  $x_0$  à droite, et que  $h'(x_0) = \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}$ .

On admet que la bijection

$$h : \begin{cases} [x_0, 1] & \rightarrow [0, h(1)] \\ x & \mapsto h(x) \end{cases}$$

admet une application réciproque  $h^{-1} : [0, h(1)] \rightarrow [x_0, 1]$  qui est infiniment dérivable.

19. Montrer que, pour  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_{x_0}^1 \sin(tf(x)) \, dx = \sin\left(tf(x_0) + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2tf''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

20. On suppose que  $x_0 \in ]0, 1[$ . Montrer que, pour  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_0^1 g(x) \sin(tf(x)) \, dx = g(x_0) \sin\left(tf(x_0) + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{tf''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$