Préambule

Ce problème est consacré à l'étude des spectres de graphes finis. À tout graphe fini – composé de sommets et d'arêtes reliant ces sommets – on associe une matrice dont les valeurs propres sont intimement liées aux propriétés géométriques du graphe. La première partie établit quelques estimations élémentaires des valeurs propres. La deuxième étudie le cas particulier du graphe à 60 sommets reproduisant la structure du Buckminsterfullerène. Dans une troisième partie, on relie la constante de Cheeger – dite aussi constante isopérimétrique – à la deuxième valeur propre du graphe puis on s'intéresse au cas des graphes planaires. Finalement, la quatrième partie étudie les propriétés des graphes découverts par Gabber et Galil en 1980. Ce sont des graphes expanseurs qui possèdent des propriétés de connectivité exceptionnelles. Mathématiquement, cela se traduit par une minoration uniforme de leur deuxième valeur propre.

Notations

On note $|X|$ le cardinal d'un ensemble fini X. On appelle graphe un couple $G = (V, E)$ où V est un ensemble fini non vide et $E \subset V \times V$ est un sous-ensemble vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in E, \quad x \neq y \text{ et } (y, x) \in E$$

On appellera les éléments de V les sommets et ceux de E les arêtes. On dit que deux sommets x et y sont reliés par un chemin de longueur $k \in \mathbb{N}$ s'il existe une suite $(x_i)_{i=0,\ldots,k}$ avec $x_0 = x$, $x_k = y$ et $(x_i, x_{i+1}) \in E$ pour $i = 0, \ldots, k-1$.

Si pour tout $x, y \in V$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que x et y soient reliés par un chemin de longueur k, le graphe G sera dit connexe.

Pour tout sommet $x \in V$, on appelle valence de x et on note $\mathrm{val}(x)$ le cardinal de l'ensemble $\{y \in V \text{ tel que } (x, y) \in E\}$. On dira que G est régulier si pour tout $x, y \in V$, on a $\mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(y)$.

Le graphe G est biparti s'il existe des parties A et B de V telles que $V = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$, et qu'on a $E \subset A \times B \cup B \times A$.

On note $\mathbb{R}^V$ l'espace euclidien des fonctions de V dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \sum_{x \in V} f(x)g(x)$ pour tous $f, g \in \mathbb{R}^V$. On notera $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. On définit l'endomorphisme T_G de $\mathbb{R}^V$ par la formule suivante :

$$(T_G f)(x) = \sum_{y \in V \text{ tel que } (x,y) \in E} (f(x) - f(y)) \text{ pour tout } x \in E$$

pour toute application $f \in \mathbb{R}^V$. On notera q_G la fonction définie par : $q_G(f) = \langle T_G f, f\rangle$ pour tout $f \in \mathbb{R}^V$.

On rappelle que si A est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien de dimension n, il existe une seule suite finie de nombres réels $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ tels que la matrice de A dans une base orthonormée soit une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ on appellera λ_k la k-ième valeur propre de A. On appelle multiplicité d'une valeur propre de A la dimension de l'espace propre correspondant.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers modulo n, $M_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients réels, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ et $O(n)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices orthogonales. Enfin on notera $\mathrm{End}(V)$ l'espace des endomorphismes d'un espace vectoriel V.

Les parties ??, ?? et ?? sont indépendantes entre elles.

1

Fixons un graphe $G = (V, E)$ et posons $n = |V|$. On supposera dans tout le sujet que l'on a $n \geqslant 2$.

1. Montrer que T_G est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^V$ et que pour tout $f \in \mathbb{R}^V$, on a :

$$q_G(f) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} (f(x) - f(y))^2.$$

Dans le reste de cette partie, on note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de T_G.

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^V$ vérifiant $T_G(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in \{1, \dots n\}$.

   a) Montrer que pour tout $f \in \mathbb{R}^V$ on a :

   $$q_G(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^2$$

   où $(f_1, \dots, f_n)$ sont les coordonnées de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.
   En déduire que $\lambda_1 \leqslant 0$.

   b) Notons S la sphère unité de $\mathbb{R}^V$ et pour tout $k \in \{1, \dots n\}$ notons F_k l'orthogonal de $\Re_1 + \dots \Re_{k-1}$ dans $\mathbb{R}^V$. Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a :

   $$\lambda_k = \inf_{f \in F_k \cap S} q_G(f)$$

   et en déduire que $q_G(f) \geqslant \lambda_k \|f\|^2$ pour tout $f \in F_k$.

   c) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, notons $\mathcal{W}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^V$. Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a :

   $$\lambda_k = \inf_{W \in \mathcal{W}_k} \left(\sup_{f \in W \cap S} q_G(f) \right).$$

Dans le reste de cette partie on suppose que le graphe G est connexe.

3. a) Montrer que le noyau de T_G est engendré par la fonction constante égale à 1.

   b) Calculer λ_1 et montrer l'inégalité $\lambda_2 > 0$.

4. Posons $d_G = \max\{\mathrm{val}(x), x \in V\}$.

   a) Montrer que toutes les valeurs propres de T_G sont inférieures ou égales à $2d_G$ *(si f est un vecteur propre de T_G, on pourra considérer un sommet $x \in V$ tel que $|f(x)|$ est maximal).*

   b) Montrer que si G est biparti et régulier alors $2d_G$ est valeur propre de T_G.

   c) Prouver réciproquement que si $2d_G$ est valeur propre de T_G alors G est régulier et biparti.

5. Soit $G' = (V, E')$ un graphe vérifiant $E' \subset E$ et soient $\lambda'_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda'_n$ les valeurs propres de $T_{G'}$.

   a) Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\lambda'_k \leqslant \lambda_k$.

   b) Soit K_n le graphe $(\{1, \ldots, n\}, \{(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \text{ tels que } i \neq j\})$. Calculer les valeurs propres de T_{K_n}. En déduire que pour tout graphe $G = (V, E)$, les valeurs propres de T_G sont inférieures ou égales à $|V|$.

2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{A}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ de signature $+1$.

1. a) Montrer que $\mathcal{A}_3$ est engendré par le cycle (123).

   b) Montrer que $\mathcal{A}_4$ est engendré par les éléments (123) et $(12)(34)$ *(on pourra se ramener au cas des permutations $\sigma \in \mathcal{A}_4$ vérifiant $\sigma(4) = 4$).*

   c) Montrer que $\mathcal{A}_4$ est engendré par les éléments $a = (12345)$ et $b = (12)(34)$.

   Dans le reste de cette partie, on pose $G = (\mathcal{A}_5, E)$ où

$$E = \{(g, h) \in \mathcal{A}_4, g^{-1}h \in \{a, a^{-1}, b\}\}.$$

2. Pour $g \in \mathcal{A}_5$, on note L_g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^V$ défini par $(L_g f)(x) = f(g^{-1}x)$ pour tout $f \in \mathbb{R}^V$ et pour tout $x \in \mathcal{A}_5$.

   a) Montrer que G est un graphe connexe et régulier.

   b) Montrer que L_g est une isométrie de $\mathbb{R}^V$ qui vérifie les identités suivantes :

$$\forall g, h \in \mathcal{A}_5, L_g \circ L_h = L_{gh} \text{ et } T_G \circ L_g = L_g \circ T_G.$$

c) En déduire que toute valeur propre non nulle de T_G est de multiplicité au moins 3 *(on montrera qu'il n'y a pas de morphisme non trivial de $\mathcal{A}_5$ vers les groupes $O(1)$ et $O(2)$).*

3. Soit $\rho : \mathcal{A}_5 \to \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ le morphisme défini par

$$\rho(g)(x) = \big(x_{g^{-1}(1)}, \dots, x_{g^{-1}(5)}\big)$$

pour tout $g \in \mathcal{A}_5$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5$.

a) Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^5$ d'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$. Montrer que pour tout $g \in \mathcal{A}_5$, l'espace F est stable par $\rho(g)$: on note $\tilde{\rho}(g) \in \mathrm{End}(F)$ l'endomorphisme défini par $\tilde{\rho}(g)(x) = \rho(g)(x)$ pour tout $x \in F$. Montrer que la famille $(\tilde{\rho}(g))_{g \in \mathcal{A}_5}$ engendre linéairement $\mathrm{End}(F)$.

b) Déterminer à quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $M \in \mathrm{End}(F)$ tel que la fonction $f \in \mathbb{R}^V$ définie par $f(g) = \mathrm{Tr}(\tilde{\rho}(g)M)$ soit une fonction propre de T_G pour la valeur propre λ. On pourra introduire la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont on admettra que le polynôme caractéristique vérifie : $P(x) = \det(xI_5 - A) = x(x-2)(x-5)(x^2 - 7x + 8)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que chacune des valeurs propres de la question précédente est de multiplicité au moins 4.

3

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Pour une partie A de V, on note $\partial A = \{(x, y) \in E \text{ tels que } x \in A \text{ et } y \in V \backslash A\}$. On appelle constante de Cheeger la quantité

$$h_G = \inf \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|}, A \subset V \text{ tel que } 0 < |A| \leqslant \frac{|V|}{2} \right\}.$$

Pour tout $x, y \in V$, il existe un chemin de longueur $k \in \mathbb{N}$ reliant x à y (avec $k = 0$ si $x = y$). On note $d(x, y)$ la plus petite longueur d'un tel chemin et on pose :

$$\Delta_G = \max_{(x,y) \in V^2} d(x, y).$$

0. Montrer que pour tous $x, y, z \in V$ on a : $d(x, y) = d(y, x)$ et $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

1. Pour toute partie A de V et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$B(A,k) = \{x \in V, \exists y \in A, d(x,y) \leqslant k\}$$

et on rappelle que $d_G = \max\{\mathrm{val}(x), x \in V\}$.

   a) Montrer que $B(A,0) = A$ pour toute partie A de V, et que si $|A| \leqslant |V|/2$, on a :

$$|B(A,1)| \geqslant (1 + \frac{h_G}{d_G})|A|.$$

   b) En déduire l'inégalité suivante :

$$\Delta_G \leqslant \frac{2\ln(|V|/2)}{\ln(1 + h_G/d_G)} + 2.$$

2. Notons λ_2 la deuxième valeur propre de T_G.

   a) Soit A et B deux parties de V non vides telles que $A \cup B = V$ et $A \cap B = \emptyset$. Notons $a = |A|$ et $b = |B|$ et soit $f : V \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_{|A} = b$ et $f_{|B} = -a$. Montrer que f est orthogonale au noyau de T_G et vérifie :

$$q_G(f) = \frac{(a+b)|\partial A|}{ab}\|f\|^2.$$

   b) En déduire l'inégalité $\lambda_2 \leqslant 2h_G$.

3. On établit cette fois une minoration de la valeur propre λ_2.

   a) Pour $f \in \mathbb{R}^V$, on note $S(f) = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E} |f(x)^2 - f(y)^2|$. Montrer l'inégalité $S(f) \leqslant \sqrt{2d_G q_G(f)}\|f\|$.

   b) Soit $f : V \to [0,+\infty[$ une fonction vérifiant $|f^{-1}(]0,+\infty[)| \leqslant |V|/2$. Montrer l'inégalité $S(f) \geqslant h_G\|f\|^2$ *(on pourra écrire $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $f(x_1) \geqslant f(x_2) \cdots \geqslant f(x_n)$ et appliquer l'inégalité définissant h_G à $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ pour tout k vérifiant $k \leqslant n/2$).*

   c) En déduire l'inégalité $\lambda_2 \leqslant \frac{h_G^2}{2d_G}$.

4. Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien non nul. Dans cette partie, les notations $\|\cdot\|$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ feront référence au produit scalaire de $\mathcal{E}$.

   a) Soit $Q : \mathcal{E}^V \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $Q(f) = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E} \|f(x) - f(y)\|^2$ pour tout $f \in \mathcal{E}^V$. Montrer qu'on a l'égalité suivante :

$$\lambda_2 = \inf_{f\in S} Q(f) \text{ avec } S = \{f : V \to \mathcal{E}, \sum_{x\in V} \|f(x)\|^2 = 1, \sum_{x\in V} f(x) = 0\}.$$

   b) On appelle plongement sphérique de G dans $\mathcal{E}$ une application $u : V \to \mathcal{E}$ vérifiant les propriétés suivantes où on a posé $D(x) = \{w \in \mathcal{E}, \|w\| = 1, \langle u(x), w - u(x)\rangle > 0\}$ pour tout $x \in V$:

i) pour tout $x \in V, 0 < \|u(x)\| < 1$.

ii) $\sum_{x\in V} \frac{u(x)}{\|u(x)\|} = 0$.

iii) pour tout $x, y \in V$ tels que $x \neq y$ on a $D(x) \cap D(y) = \emptyset$ et $(\overline{D(x)} \cap \overline{D(y)} \neq \emptyset) \Leftrightarrow ((x, y) \in E)$.

Montrer qu'il existe un plongement sphérique du graphe K_4 défini en I.5.b dans un espace euclidien de dimension 3.

c) Montrer que si G admet un plongement sphérique dans un espace euclidien de dimension 3 alors on a l'inégalité $\lambda_2 \leqslant 8\frac{d_G}{|V|}$. *(Les arguments géométriques même incomplets seront valorisés).*

4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et posons H_n le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. On note $x\cdot y$ le produit scalaire usuel de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{Z}^2$ et on pose $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$. On notera ω^k la puissance k-ième de ω que k désigne un entier ou une classe modulo n. De même, si $x, y \in H_n$, on note aussi $x \cdot y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ le groupe des matrices carrées de taille 2 à coefficients entiers de déterminant ± 1 et A^T la transposée de $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

1) Notons $\mathcal{H}_n$ l'espace vectoriel des fonctions de H_n dans $\mathbb{C}$ et on note $\langle f, g\rangle = \sum_{x\in H_n} \overline{f(x)}g(x)$ pour f et g dans $\mathcal{H}_n$.

   a) Pour $f \in \mathcal{H}_n$ on définit $\hat{f} \in \mathcal{H}_n$ par $\hat{f}(x) = \sum_{y\in H_n} f(y)\omega^{-x\cdot y}$. Montrer que pour tout $f, g \in \mathcal{H}_n$ on a $\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = n^2\langle f, g\rangle$. En déduire que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_n$ dans lui-même.

   b) Soit f un élément de $\mathcal{H}_n$. Si $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et $b \in \mathbb{Z}^2$, notons $g(x) = f(Ax + b)$ pour tout $x \in H_n$. Montrer qu'on a

   $$\hat{g}(x) = \omega^{(A^{-1}b)\cdot x}\hat{f}((A^{-1})^T x).$$

   c) Soit $G = (H_n, E)$ où

   $$E = \{(x, y) \in H_n^2, x - y \in \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}\}.$$

   Montrer que G est un graphe connexe et régulier et déterminer la deuxième valeur propre λ_2 de T_G en fonction de n *(on pourra considérer les fonctions $\chi_y \in \mathcal{H}_n$ définies par $\chi_y(x) = \omega^{y\cdot x}$ pour tous $x, y \in H_n$).*

2) Soit $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On définit l'endomorphisme T de $\mathcal{H}_n$ par la formule suivante où $f \in \mathcal{H}_n$:

   $$(Tf)(x) = 4f(x) - f(T_1x) - f(T_2x) - f(T_1x + e_1) - f(T_2x + e_2), \forall x \in H_n.$$

On prendra garde qu'il ne s'agit pas d'un endomorphisme associé à un graphe.

a) Montrer que si f est un vecteur propre de T associé à une valeur propre non nulle alors on a : $\sum_{x\in H_n} f(x) = 0$.

b) Pour tout $F \in \mathcal{H}_n$ et tout $x = (x_1, x_2) \in H_n$ on pose :

$$(UF)(x) = F(T_2^{-1}x)(1 + \omega^{-x_1}) + F(T_1^{-1}x)(1 + \omega^{-x_2}).$$

Montrer que si la propriété :

(T1) $\forall F \in \mathcal{H}_n$ tel que $F(0,0) = 0$ on a $|\langle F, UF\rangle| \leqslant \dfrac{73}{20}\langle F, F\rangle$

est satisfaite alors toute valeur propre non nulle λ de T vérifie $|\lambda| \geqslant \frac{7}{20}$ *(on pourra considérer l'endomorphisme $\hat{T}$ de $\mathcal{H}_n$ défini par $\hat{T}\hat{f} = \widehat{Tf}$ pour tout $f \in \mathcal{H}_n$).*

c) Posons pour $x = (x_1, x_2) \in H_n$

$$(U'G)(x) = G(T_2^{-1}(x))|\cos(\frac{\pi x_1}{n})| + G(T_1^{-1}(x))|\cos(\frac{\pi x_2}{n})|.$$

Montrer que la propriété suivante implique la propriété (**??**).

(T2) $\forall G : H_n \to \mathbb{R}$ positive avec $G(0,0) = 0$ on a $\langle G, U'G\rangle \leqslant \dfrac{73}{40}\langle G, G\rangle$.

d) Si $x \in \mathbb{Z}$, notons $\overline{x}$ l'unique représentant de x modulo n dans l'intervalle $[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}[$. On notera $(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$ ou $(y_1, y_2) \succ (x_1, x_2)$ si $|\overline{x_1}| \leqslant |\overline{y_1}|$ et $|\overline{x_2}| \leqslant |\overline{y_2}|$ et que l'une des inégalités est stricte. Si on n'a ni $(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$ ni $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$, on dira que (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont incomparables.

Soit $D_n = \{(x_1, x_2) \in [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}[^2, |x_1| + |x_2| < \frac{n}{2}\}$. Montrer que pour tout $x \in D_n \backslash \{(0,0)\}$ on a :

- soit trois points parmi $T_1x, T_2x, T_1^{-1}x, T_2^{-1}x$ sont $\succ x$ et l'un est $\prec x$.
- soit deux points parmi $T_1x, T_2x, T_1^{-1}x, T_2^{-1}x$ sont $\succ x$ et deux sont incomparables à x.

e) Notons $\gamma : H_n^2 \to \{\frac{4}{5}, 1, \frac{5}{4}\}$ la fonction définie par $\gamma(x,y) = \frac{5}{4}$ si $x \succ y$, $\gamma(x,y) = \frac{4}{5}$ si $x \prec y$ et $\gamma(x,y) = 1$ sinon. Montrer pour tout $x = (x_1, x_2) \in H_n \backslash \{(0,0)\}$ l'inégalité

$$|\cos(\frac{\pi x_1}{n})|(\gamma(x, T_2x) + \gamma(x, T_2^{-1}x)) \\ + |\cos(\frac{\pi x_2}{n})|(\gamma(x, T_1x + \gamma(x, T_1^{-1}x)) \leqslant \frac{73}{20}^{\cdot}$$

f) Montrer que pour toute fonction $G : H_n \to \mathbb{R}_+$ et tous $x, y \in H_n$ on a :

$$2G(x)G(y) \leqslant \gamma(x,y)G^2(x) + \gamma(y,x)G^2(y)$$

et en déduire que la propriété (**??**) est vérifiée.