Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2020

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 3h

Les matrices de Hessenberg sont des matrices « presque triangulaires », qui permettent d'économiser les calculs lors de la mise en œuvre d'algorithmes d'analyse numérique. L'objet du problème est d'examiner le comportement asymptotique des puissances de certaines de ces matrices.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Dans tout l'énoncé, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 3.

• Le coefficient situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne d'une matrice M est noté $M[i,j]$.

• Les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont nuls sauf un, égal à 1, sont notées $E_{i,j}^{(n)}$. Ainsi a-t-on, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\forall\, (\ell,k) \in [\![1,n]\!]^2, \quad E_{i,j}^{(n)}[\ell,k] = \delta_i^\ell\,\delta_j^k = \begin{cases} 1 & \ell = i \text{ et } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où δ_i^ℓ (respectivement δ_j^k) vaut 1 si $i = \ell$ (respectivement $j = k$), 0 sinon.

• Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note u_M (respectivement v_M) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$) canoniquement associé à M, c'est-à-dire l'endomorphisme dont M est la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$). On appelle *spectre* de M l'ensemble, noté $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(M)$, des valeurs propres de v_M (il s'agit d'une partie non vide de $\mathbb{C}$).

• Lorsque doit être établie la convergence d'une suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il s'agit de la convergence pour l'une quelconque des normes sur cet espace vectoriel, toutes équivalentes puisqu'il est de dimension finie.

Partie I Matrices de Hessenberg

• On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice de Hessenberg* si tous ses coefficients $M[i,j]$ situés en dessous de la « sous-diagonale », c'est-à-dire tels que $i \geq j+2$, sont nuls.

Par exemple, les matrices de Hessenberg de $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} M[1,1] & M[1,2] & M[1,3] & M[1,4] & M[1,5] \\ M[2,1] & M[2,2] & M[2,3] & M[2,4] & M[2,5] \\ 0 & M[3,2] & M[3,3] & M[3,4] & M[3,5] \\ 0 & 0 & M[4,3] & M[4,4] & M[4,5] \\ 0 & 0 & 0 & M[5,4] & M[5,5] \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note $\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de Hessenberg de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   a) Justifier que $\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   b) En donner une base et la dimension.

2. Soit a un réel strictement positif. On note $H_+(a)$ et $H_-(a)$ les deux matrices de Hessenberg de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$H_+(a) = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+\sqrt{a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_-(a) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ -1 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

   a) Trouver les valeurs propres de la matrice $H_+(a)$ et montrer qu'elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

   b) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la suite de matrices $\left(\frac{1}{r^p}\big(H_+(a)\big)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, le réel r est supérieur ou égal à $a+\sqrt{a}$.

   c) Soit $Q(a) = \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{(a+\sqrt{a})^p}\big(H_+(a)\big)^p$.

   Justifier que l'endomorphisme $u_{Q(a)}$ de $\mathbb{R}^n$ est un projecteur, dont on précisera le rang, l'image et le noyau.

   d) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la suite de matrices $\left(\frac{1}{r^p}\big(H_-(a)\big)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, le réel r est strictement supérieur à $\sqrt{a(1+a)}$.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note $J_n = \sum\limits_{j=1}^{n-1} E_{j+1,j}^{(n)}$ et $H_n(a,b) = a\,I_n + bJ_n$.

   a) Calculer les puissances successives de la matrice J_3 et donner, sans démonstration, une expression générale des puissances $(J_n)^q$ $(q \in \mathbb{N})$.

   b) Établir, pour tout entier $p \geq n-1$, l'égalité

$$\big(H_n(a,b)\big)^p = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} \binom{p}{i-j} a^{p-i+j}\, b^{i-j} E_{i,j}^{(n)}$$

   et en déduire que, si a et b sont différents de 0, alors tous les coefficients de la matrice $\big(H_n(a,b)\big)^{n-1}$ situés sur ou en dessous de la diagonale (c'est-à-dire dont l'indice de ligne est supérieur ou égal à l'indice de colonne) sont différents de 0.

   c) Pour quelles valeurs de (a,b) la suite $\left(\big(H_n(a,b)\big)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Partie II Rayon spectral

Dans cette partie, on considère une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $\rho(M)$ le plus grand des modules des éléments du spectre de M, appelé *rayon spectral de M* :

$$\rho(M) = \text{Max}\,\{|\,\lambda\,|\,;\ \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(M)\}\ .$$

4. Soit ε un nombre réel strictement positif et P_ε la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont donnés par :

$$\forall\, i \in [[1,n]],\ P_\varepsilon[i,i] = \varepsilon^i\ .$$

a) Calculer, pour toute matrice triangulaire supérieure T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les coefficients de la matrice $P_\varepsilon^{-1}\,T P_\varepsilon$.

b) En déduire que, pour tout réel $\alpha > 0$, il existe une matrice triangulaire semblable à T dont tous les coefficients non diagonaux sont de modules inférieurs ou égaux à α.

c) Démontrer que pour tout réel $r > \rho(M)$, il existe une matrice inversible P à coefficients complexes pour laquelle la matrice $M' = P^{-1}MP$ est triangulaire et le module de chacun de ses coefficients au plus égal à r, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [[1,n]]^2,\ |\,M'[i,j]\,| \le r\ .$$

5. Justifier, pour tout réel $r > \rho(M)$, la convergence de la suite $\left(\dfrac{1}{r^p}M^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ vers la matrice nulle.

6. On suppose dans cette question que le polynôme caractéristique de M possède au moins une racine réelle simple, que l'on note λ.
On note u_M^* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de u_M, dont la matrice dans la base canonique est la transposée ${}^tM$ de la matrice M.

a) Justifier l'existence de deux éléments non nuls x et y de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$u_M(x) = \lambda\, x \qquad \text{et} \qquad u_M^*(y) = \lambda\, y.$$

b) Démontrer que l'orthogonal $\text{Vect}\{y\}^\perp$ de la droite vectorielle engendrée par le vecteur y, pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, est stable par l'endomorphisme u_M et que λ n'est pas une valeur propre de l'endomorphisme de $\text{Vect}\{y\}^\perp$ induit par u_M.

c) En déduire que $\text{Vect}\{y\}^\perp$ et $\text{Vect}\{x\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

d) On note Q la matrice dans la base canonique du projecteur de $\mathbb{R}^n$ d'image $\text{Vect}\{x\}$ et de noyau $\text{Vect}\{y\}^\perp$.
Démontrer que, si λ est égal au rayon spectral $\rho(M)$ et si tous les éléments de $\text{sp}_{\mathbb{C}}(M)$ distincts de λ ont un module strictement inférieur à $\rho(M)$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{\rho(M)^p}M^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite Q.

Partie III Matrices irréductibles

Pour toute partie J de $[\![1,n]\!]$, on note F_J le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs e_j de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dont l'indice j appartient à J :

$$F_J = \mathrm{Vect}\{e_j\,;\ j \in J\}$$

(qui est réduit au vecteur nul lorsque J est vide).

• On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *J-réduite* si F_J est stable par l'endomorphisme u_M et on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})[J]$ l'ensemble des matrices J-réduites de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})[J] = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,;\ u_M(F_J) \subseteq F_J\}\ .$$

• On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *irréductible* s'il n'existe aucune partie J de $[\![1,n]\!]$, non vide et distincte de $[\![1,n]\!]$, pour laquelle M est J-réduite.

7. Exemples

   a) Pour quelles parties non vides J de $\{1,2,3\}$ les matrices $H_+(a)$ et $H_-(a)$ de la question 2 sont-elles J-réduites ?

   b) Démontrer qu'aucune des matrices $H_n(a,b)$ de la question 3 n'est irréductible.

8. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   Démontrer que, pour que M soit irréductible, il suffit qu'il existe un entier naturel p pour lequel tous les coefficients de la matrice M^p sont différents de 0.

Pour traiter la dernière question du problème, on admettra les deux résultats suivants (théorèmes de Perron-Frobenius).

• Si une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients positifs ou nuls, alors $\rho(N)$ appartient au spectre de N.

• Si une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients strictement positifs, alors $\rho(N)$ en est la seule valeur propre de module maximal et la dimension du sous-espace propre qui lui est associé est égale à 1.

9. Soit H une matrice de $\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients situés sur et au dessus de la sous-diagonale sont strictement positifs :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \leq j+1 \Longrightarrow H[i,j] > 0\ .$$

   a) Justifier l'existence de deux réels strictement positifs a et b pour lesquels tous les coefficients de $H - H_n(a,b)$ sont positifs ou nuls.

   b) En déduire que H est irréductible.

   c) Démontrer que la suite $\left(\dfrac{1}{\rho(H)^p}H^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice qui est canoniquement associée à un projecteur de rang 1.