DM n$^{\text{o}}$1 facultatif

Devoir de vacances supplémentaire à l'usage des futurs $\frac{5}{2}$ préparant Centrale ou les Mines. Ce devoir est long et facile, il a le mérite de faire une bonne révision du programme d'algèbre linéaire de MPSI, il est abordable par les plus téméraires des futurs $\frac{3}{2}$.

TRANSVEXIONS, AUTOMORPHISMES DE $\mathcal{L}(\mathbf{E})$

Notations

— Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2,
— $\mathcal{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels,
— Pour tout élément M de $\mathcal{M}_n$ et tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,\ldots,n\}$, on désigne par $m_{i,j}$ le coefficient de M situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne.
— GL_n désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels inversible,
— SL_n désigne l'ensemble des élément de GL_n de déterminant 1.
— $\mathbf{E}$ désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels, de dimension n,
— $\mathbf{E}^*$ désigne le dual de $\mathbf{E}$.
— $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ désigne une base de $\mathbf{E}$ et $(e_1^*,\ldots,e_n^*)$ désigne sa base duale, c'est-à-dire que e_i^* est la i^{e} forme coordonnée dans la base $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$, pour $i=1,\ldots,n$.
— $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ désigne l'algèbre des endomorphismes de $\mathbf{E}$,
— $\mathrm{GL}(\mathbf{E})$ désigne le groupe des automorphismes de $\mathbf{E}$,
— id désigne l'application identité sur $\mathbf{E}$,
— Pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,\ldots,n\}$, $E_{i,j}$ est l'élément de de $\mathcal{M}_n$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui situé sur la i^{e} ligne et j^{e} colonne,
— Pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1,\ldots,n\}$ et tout réel λ non nul, $T_{i,j}(\lambda)$ désigne la matrice de transvection, $I_n+\lambda E_{i,j}$,
— Pour $a_1,a_2,\ldots,a_n$ des réels, $\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$ désigne la matrice diagonale dont le terme sur la i^{e} ligne et la i^{e} colonne est $a_{i,i}$, pour $i=1,\ldots,n$.

Partie I
Générateurs de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$

1. (a) Pour tout élément (i,j,h,k) de $\{1,\ldots,n\}^4$, calculer le produit matriciel $E_{i,j}E_{h,k}$.
   (b) Soient (i,j) et (h,k) des couples d'éléments distincts de $\{1,\ldots,n\}$ et λ et μ des réels non nuls. Calculer le produit matriciel $T_{i,j}(\lambda)T_{h,k}(\lambda)$.
   En déduire l'inversibilité et l'inverse de $T_{i,j}(\lambda)$.
2. Soient (i,j) un couple d'éléments distincts de $\{1,\ldots,n\}$, λ un réel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n$. Pour tout élément k de $\{1,\ldots,n\}$ C_k désigne la k^{e} colonne de A et L_k sa k^{e} ligne.
   (a) Montrer que la matrice $AT_{i,j}(\lambda)$ se déduite de A par une transformation élémentaire portant sur les colonnes de A que l'on précisera.
   (b) Doner un résultat analogue pour $T_{i,j}(\lambda)A$.

3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$. On suppose que la première colonne ou la première ligne de A possède un élément non nul.
   Montrer qu'il existe deux éléments P et Q de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvections tels qu'en posant
   $$B = PAQ,$$
   i. $b_{1,1} = 1$;
   ii. $b_{i,1} = 0$, pour $i = 2, \ldots, n$;
   iii. $b_{1j} = 0$, pour $j = 2, \ldots, n$.
   Indication : On pourra envisager pour commencer le cas où $a_{1,1} = 1$.
4. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$ de rang non nul r. Montrer qu'il existe deux éléments R et S de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvections tels que : RAS soit diagonale égale soit à $\mathrm{diag}(\overbrace{1, 1, \ldots 1}^{r \text{ termes}}, 0 \ldots 0)$, soit à $\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, d)$, avec $d = \mathrm{Det}(A)$, suivant que $r < n$ ou $r = n$.
   Indication : Le candidat a le choix entre démontrer ce résultat par récurrence, ou écrire en français un algorithme qui construit les matrices R et S.
5. (a) Montrer que SL_n est un sous-groupe de GL_n.
   (b) Déduire de la question 4. que l'ensemble $\mathcal{T}$ des matrices de transvection d'ordre n engendre le sous groupe SL_n.
6. Petit théorème de Frobenius Zolotarev —
   On suppose dans cette question et seulement dans cette question que $n \geq 3$. Soit f une application de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbf{R}$ telle que :
   i. Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n$, $f(AB) = f(A)f(B)$;
   ii. Pour tout élément A de $\mathcal{M}_n$ diagonal, $f(A)$ est le produit des termes diagonaux.
   (a) Donner un exemple d'une telle application.
   (b) Soient a un réel non nul et (α, β) un couple d'éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$. Evaluer
   $$(I_n + 1 \cdot E_{\alpha,j})(I_n + aE_{j,\beta})(I_n + 1 \cdot E_{\alpha,j})^{-1}(I_n + aE_{j,\beta})^{-1}.$$
   (c) Calculer l'image par f d'une matrice T de transvection.
   (d) Déterminer f.

   Une forme forte du théorème de Frobenius-Zolotarev est la détermination des morphismes de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})\circ)$ *dans* $(\mathbf{C}^*, \times)$, *voir exercices d'algèbre linéaire.*

Partie II
Caractérisation de la Trace

1. Vérifier que l'application trace
   $$\mathrm{Tr} \; : \; \mathcal{M}_n \to \mathbf{R}, ; \; M \mapsto \mathrm{Tr(M)}$$
   est une forme linéaire, et que pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n$,
   $$\mathrm{Tr(AB)} = \mathrm{Tr(BA)}.$$
2. Soit σ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$ telle que pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n$, $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.
   (a) Montrer que pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \ldots n\}$, $\sigma(E_{i,j}) = 0$.

(b) Montrer que pour tout élément i de $\{1, \dots n\}$, $\sigma(E_{i,i}) = \sigma(E_{1,1})$.

(c) Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\sigma = \lambda \mathrm{Tr}$.

3. Soient $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ engendré par les matrices de la forme $AB - BA$, avec A et B des éléments de $\mathcal{M}_n$,

$$\mathcal{C} = \mathrm{vect}\big((AB - BA)_{(A,B) \in \mathcal{M}_n^2}\big),$$

et $\mathcal{H}$ la droite vectorielle de $\mathcal{M}_n$ engendré par id.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est inclus dans le noyau de Tr.

(b) Exhiber une famille libre de $\mathcal{C}$ de cardinal $n^2 - 1$.

Indication : on pourra considérer la base canonique de $\mathcal{M}_n$.

(c) Montrer que $\mathcal{C} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et que $\mathcal{M}_n = \mathcal{C} \oplus \mathcal{H}$.

4. Pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1, \dots n\}$, on pose $F_{i,j} = I_n + E_{i,j}$. Soient (i,j) un couple d'éléments de $\{1, \dots n\}$ et (h,k) un couple d'éléments distincts de $\{1, \dots n\}$, calculer le produit matriciel $F_{h,k}^{-1} F_{i,j} F_{h,k}$.

5. Soit θ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$ tel que pour tout élément A de $\mathcal{M}_n$ et tout élément B de GL_n,

$$\theta(AB) = \theta(BA).$$

Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\theta = \lambda \mathrm{Tr}$.

Partie III

Automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$

On appelle automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$, tout morphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ dans elle-même qui est bijectif. L'ensemble des automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ sera noté $\mathcal{AUT}(E)$, on admet, fait trivial, que $\mathcal{AUT}(E)$ est un sous-groupe du groupe des permutations de $\mathcal{L}(E)$. Pour tout élément g de GL_n, on désigne par A_g l'application de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ dans $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ qui à un élément u associe $g \circ u \circ g^{-1}$,

$$A_g \ : \ \mathcal{L}(\mathbf{E}) \to \mathcal{L}(\mathbf{E}), ; \ u \mapsto g \circ u \circ g^{-1}.$$

1. (a) Montrer que pour tout élément g de GL_n, A_g est un automorphisme de $\mathcal{L}(E)$, un tel automorphisme est dit intérieur.

Montrer que

$$\chi \ : \ \mathrm{GL}_n \to \mathcal{AUT}(\mathbf{E}) \, ; \ g \mapsto A_g$$

est un morphisme du groupe $\mathcal{GL}(E)$ dans le groupe $\mathcal{AUT}(E)$. L'application χ est elle injective ?

2. (a) Soit g un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, la famille $(x, g(x))$ soit liée. Montrer que g est élément de $\mathcal{H}$.

(b) Déduire de la sous-question précédente le noyau de χ.

3. Soit $(\phi, \vec{x})$ un élément de $\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}$, on définit l'application

$$u_{\phi,\vec{x}} \ : \ \mathbf{E} \to \mathbf{E} \, ; \ \vec{y} \mapsto \phi(\vec{y})\vec{x}.$$

On admettra, résultat évident, qu'une telle application est un endomorphisme.

(a) Déterminer l'image et le noyau de $u_{\phi,\vec{x}}$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(\phi, \vec{x})$ pour que $u_{\phi,\vec{x}}$ soit un projecteur non nul.

4. Pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,\ldots,n\}$, on pose $u_{i,j} = u_{e_j^*\vec{e}_i}$.
   (a) Soient i,j,h,k des éléments de $\{1,\ldots,n\}$. Calculer $u_{i,j} \circ u_{h,k}$.
   (b) Que peut-on dire de la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\{1,n\}^2}$
5. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs non nuls de $\mathbf{E}$. On définit sur $\mathcal{P}$ la relation $\prec$ par, pour tout p et tout q éléments de $\mathcal{P}$, $p \prec q$ si $p = p \circ q = q \circ p$.
   (a) Montrer que la relation $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$. Est-ce une relation d'ordre totale ?
   (b) On appelle élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\prec$, tout élément p de $\mathcal{P}$ tel que pour tout élément q de $\mathcal{P}$, si $q \prec p$ alors $q = p$.
   Soit p un élément de $\mathcal{P}$. Etablir l'équivalence des énoncés suivants :
      i. p est de rang 1 ;
      ii. p est un élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\prec$;
      iii. Il existe un élément $(\phi, \vec{x})$ de $\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}$ tel que : $p = u_{\phi,\vec{x}}$ et $\phi(\vec{x}) = 1$.
6. Soient A un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ et p un élément de $\mathcal{P}$.
   (a) Montrer que $A(p)$ est un projecteur.
   (b) On suppose que p est un élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\prec$. Montrer $A(p)$ est encore un élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\prec$.
   (c) En déduire qu'il existe une famille $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2 \ldots \vec{\epsilon}_n)$ d'éléments de $\mathbf{E}$ et une famille $(\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n)$ d'éléments de $\mathbf{E}^*$ telle que, pour tout élément i de $\{1,\ldots,n\}$:
      i. $\phi_i(\vec{\epsilon}_i) = 1$;
      ii. $A(u_{i,i}) = u_{\phi_i,\vec{\epsilon}_i}$.
   (d) Calculer pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,\ldots,n\}$, $\phi_i(\vec{\epsilon}_j)$.
   Que peut-on en déduire sur les familles $(\vec{\epsilon}_1, \ldots \vec{\epsilon}_n)$ et $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$?
7. Soit un couple (i,j) d'éléments de $\{1,\ldots,n\}$.
   (a) pour tout élément k de $\{1,\ldots n\}$ distinct de j calculer $A(u_{i,j}) \circ u_{\phi_k,\vec{\epsilon}_k}$.
   En déduire le rang et le noyau de $A(u_{i,j})$.
   (b) Calculer $A(u_{i,j}) \circ A_(u_{j,i})$. En déduire l'image de $A(u_{i,i})$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel non nul $\lambda_{i,j}$ tel que : $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j} u_{\phi_j,\vec{\epsilon}_i}$
8. Soient i, j et k des éléments de $\{1,\ldots,n\}$. Montrer que $\lambda_{i,j}\lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$.
   En déduire que $\lambda_{i,j} = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}$.
9. (a) Montrer qu'il existe une base $(\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n)$ de $\mathbf{E}$, telle que si $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$ désigne sa base duale, alors, pour tout élément (i,j) de $\{1,\ldots,n\}$,

$$A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*,\vec{\alpha}_i}.$$

   (b) Posons g l'automorphisme de $\mathbf{E}$ qui envoie la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ sur la base $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$, alors A et A_g coïncident sur la base $(u_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}$, d'après (a), donc $A = A_g$.
   (c) Tout automorphisme de $\mathcal{L}$ est intérieur.

⋆ ⋆

⋆

Correction du DM bis n°2

TRANSVEXIONS, AUTOMORPHISMES DE $\mathcal{L}(\mathbf{E})$

Partie I

Générateurs de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$

1. (a) Soit un élément (i,j,h,k) de $\{1,\dots,n\}^4$. $E_{i,j}E_{h,k}\delta_{j,h}E_{i,k}$. (Voir cours.)

   (b) Soient

   (i,j) et (h,k) des couples d'éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$ et λ et μ des réels non nuls.

   $T_{i,j}(\lambda)T_{h,k}(\lambda) = I_n + \mu E_{h,k} + \lambda E_{i,j} + \lambda\mu E_{i,j}E_{h,k} = \underline{I_n + \mu E_{h,k} + \lambda E_{i,j} + \lambda\mu\delta_{j,h}E_{i,k}.}$

   En particulier $T_{i,j}(\lambda)T_{ij}(-\lambda) = I_n$ et donc $\underline{T_{i,j} \text{ est inversible d'inverse } T_{ij}(-\lambda).}$

2. *Cette question a été traitée en cours, en raisonnant sur les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associés, on peut bien sûr faire un calcul matriciel.*

   (a) La matrice $AT_{i,j}(\lambda)$ se déduite de A par la transformation $\boxed{C_j \longleftarrow C_j + \lambda C_i}$, ($C_k$ désigne la k^{e} colonne de M pour $k = 1,\dots,n$).

   (b) La matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ se déduite de A par la transformation $\boxed{L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j}$, ($L_k$ désigne la k^{e} colonne de M pour $k = 1,\dots,n$).

3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$.

   Nous allons transformer la matrice A grâce à des transformations élémentaires successives en une matrice B satisfaisant les conditions i., ii.,iii. Pour ne pas allourdir les notations à chaque étape $a_{i,j}$ désignera pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,\dots,n\}$ le terme d'indice (i,j) de la matrice obtenue.

   A. Si $a_{1,1} = 1$, On effectue les transformations :
   Pour $i = 2,\dots,n$, $L_i \longleftarrow L_i - a_{i,1}L_1$.
   Pour $j = 2,\dots,n$, $C_j \longleftarrow C_j - a_{j,1}C_1$.

   On obtient alors une matrice B de la forme voulue.

   B. Sinon,

      a. Si il existe $j \in \{2,\dots,n\}$ tel que $a_{1,j} \neq 0$, On effectue la transformation :
      $C_1 \longleftarrow C_1 + \frac{1-a_{1,1}}{a_{1,j}}$.
      On est ramené au cas A.

      b Sinon,

         α. Si il existe $i \in \{2,\dots,n\}$ tel que $a_{i,1} \neq 0$, On effectue la transformation :
         $L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{1-a_{1,1}}{a_{i,1}}$. *On est ramené au cas A.*

         β. Sinon, comme la première ligne ou la première colonne est non nulle, c'est que $a_{11} \neq 0$ et les autres termes de la la première ligne et la première colonne sont

nuls. On effectue la transformation :
$C_2 \longleftarrow C_2 + C_1$
On est ramené au cas α.

Dans tous les cas on obtient une matrice B satisfaisant les conditions i., ii.,iii., les transformations effectuées s'obtiennent par multiplication à droite ou à gauche par des matrices de transvections, c'est-à-dire qu'il existe deux éléments P et Q de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvections tels que $\boxed{B = PAQ}$

4. Notons $\mathbf{H}_n$ la propriété à prouver.
   - $\mathbf{H}_2$ est vraie.
     En effet, soit A un élément de $\mathcal{M}_2$ (de rang) non nul. Si sa première ligne et sa première colonne sont nulles, alors la seconde ligne n'est pas nulle et en ajoutant la seconde ligne à la première (ce qui revient d'après 3. à multiplier par une matrice de transvection à gauche) on obtient une matrice dont la première ligne est non nulle, la question 3. assure qu'en multipliant à gauche et à droite par des matrices de transvections on obtient une matrice $\mathrm{diag}(1, d)$. Si le rang de A est 1, $\mathrm{diag}(1, d)$ qui lui est équivalente est de rang 1 et donc $d = 0$, sinon elle est de trang 2 et comme le déterminant d'une transvection est 1, alors A et $\mathrm{diag}(1, d)$ ont même déterminant et donc $d = \mathrm{Det}(A)$.
   - Soit un entier $m \geq 2$. On suppose $\mathbf{H}_m$.
     Soit $A \in \mathcal{M}_{m+1}$ non nulle. Comme d ans le point précédent quitte à ajouter une autre ligne à la première (multiplication à gauche par une transvection) on obtient que la première ligne ou la première colonne de M est non nulle. La question 3 assure alors qu'il existe deux éléments P et Q de $\mathcal{M}_{n+1}$, produits de matrices de transvections tels que $PAQ = \mathrm{diag}(1, A')$ Avec $A' \in \mathcal{M}_m$.

     Notons que $\mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A) - 1$.
     Donc si $\mathrm{rg}(A) = 1$ alors A' est nulle et $PAQ = \mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0)$.
     Sinon $\mathrm{rg}(A') \neq 0$ et $\mathbf{H}_m$ assure qu'il existe des éléments R' et Q' de $\mathcal{M}_m$ produits de matrices de transvections d'ordre m tels que : $R'A'S'$ vaille soit $\mathrm{diag}(\overbrace{1, 1, \dots 1}^{r' \text{ termes}}, 0 \dots 0)$, soit $\mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1, d)$, avec $d = \mathrm{Det}(A')$, suivant que le rang r' de A' vérifie $r' < m$ ou $r' = m$.
     Donc si $r < m + 1$ c'est-à-dire si $r' < m$ alors :

     $$\mathrm{diag}(1, R')PAQ\mathrm{diag}(1, S') = \mathrm{diag}(\overbrace{1, 1, \dots 1}^{r \text{ termes}}, 0 \dots 0.)$$

     Si $r = m + 1$ c'est-à-dire si $r = m$ alors :

     $$\mathrm{diag}(1, R')PAQ\mathrm{diag}(1, S') = \mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1, d)$$

     et puisque $\mathrm{diag}(1, R')$, P, Q, et $\mathrm{diag}(1, S')$ sont de déterminants 1, $d = \mathrm{Det}(A)$.
     Il reste à remarquer que puisque pour une transvection T' d'ordre m, $\mathrm{diag}(1, T')$ est une transvection d'ordre $m + 1$ pour affirmer que $\mathrm{diag}(1, R')P$ et $Q\mathrm{diag}(1, S')$ sont des produits de transvections et avoir ainsi prouvé $\mathbf{H}_{m+1}$.

     Donc $\underline{\mathbf{H}_n \text{ est vrai, pour tout entier } n \geq 2.}$

5. (a) L'application $\mathrm{GL}_n \to \mathbf{R}\,;\ M \mapsto \mathrm{Det}(M)$ est un morphisme de groupes. Donc son noyau, $\underline{\mathcal{S}_n, \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}_n.}$
   (b) Soit A un élément de $\mathcal{S}_n$, d'après 4 on peut construire des éléments R et Q de $\mathcal{M}_n$ produits de matrices de transvections tels que : $RAQ = \mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1, 1 = I_n$, donc

tels que $A = R^{-1}Q^{-1}$. A est donc un produit d'inverses de matrices transvections (qui du reste sont encore des matrices de transvections d'après 1.(a)) et donc $A \in \langle \mathcal{T} \rangle$.
Conclusion : $\underline{\text{l'ensemble } \mathcal{T} \text{ engendre le sous-groupe } \mathcal{S}_n.}$

6. (a) L'application Det de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbf{R}$ qui à une matrice associe son déterminant vérifie *i.* et *ii.*.

   (b) Soit j est un élément $\{1, \dots, n\}$ distinct de α et de β, qui existe bien puis que $n \geq 3$. Grâce à 1.(b), un calcul matriciel, ou un raisonnement portant sur les transformations sur les colonnes de I_n obtenu en multipiant I_n à droite par le produit de matrices à évaluer donne :

$$(I_n + \lambda E_{\alpha,j})(I_n + \mu E_{j,\beta})(I_n + \lambda E_{\alpha,j})^{-1}(I_n + \mu E_{j,\beta})^{-1} = I_n + \lambda\mu E_{\alpha,\beta}.$$

   Donc par exemple,

$$\underline{I_n + aE_{\alpha,\beta} = (I_n + 1 \cdot E_{\alpha,j})(I_n + aE_{j,\beta})(I_n + 1 \cdot E_{\alpha,j})^{-1}(I_n + aE_{j,\beta})^{-1}.}$$

   (c) Soit T une matrice de transvection. D'après la sous-question précédente, on peut choisir deux matrices de transvections T_1 et T_2 telle que $T = T_1T_2T_1^{-1}T_2^{-1}$. Donc d'après *i.*,

$$f(T) = f(T_1)f(T_2)f(T_1^{-1})f(T_2^{-1}) = f(T_1)f(T_1^{-1})f(T_2)f(T_2^{-1}) = f(T_1T_1^{-1}T_2T_2^{-1}) = f(I_n).$$

   Et donc d'après ii., $\boxed{f(T) = 1}$.

   (d) Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$.

   - Premier cas : A est de rang n. Soient R et S des produits de matrices de transvections, fournis par 4. et tels que $RAS = \text{diag}(0, 0, 0, \dots, 0, \text{Det}(A))$, D'après i., $f(A) = f(R)f(\text{diag}(1, 1, \dots, 1, \text{Det}(A)))f(S)$. D'une part toujours d'après i, comme l'image par f d'une transvection vaut 1, $f(R) = f(S) = 1$. D'autre part d'après ii., $f(\text{diag}(1, 1, \dots, 1, \text{Det}(A))) = \text{Det}(A)$
   - Second cas : A est de rang r strictement inférieur à n. En raisonnant comme dans le premiuer cas on montre que $f(A) = f(\text{diag}(\overbrace{1, 1, \dots 1}^{r \text{ termes}}, 0 \dots 0)) = 0$.

   Dans les deux cas $f(A) = \text{Det}(A)$. Conclusion : $\boxed{f = \text{Det}}$

Partie II

Caractérisation de la Trace

1. C'est du cours !
2. Soit σ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$ telle que pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n$, $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

   (a) Soit un couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \dots n\}$. $\sigma(E_{i,j}) = \sigma(E_{i,i}E_{i,j}) = \sigma(E_{i,j}E_{j,i}) = \sigma(O_n)$, d'après I.1. La linéarité de σ donne alors : $\boxed{\sigma(E_{i,j}) = 0}$.

   (b) Soit un élément i de $\{1, \dots n\}$. D'après I.1. ; $\underline{\sigma(E_{i,i}) = \sigma(E_{i,1}E_{1,i}) = \sigma(E_{1,i}E_{i,1}) = \sigma(E_{1,1}).}$

   (c) Posons$\lambda := \sigma(E_{1,1})$. Alors σ et λTr coïncident sur la *base* canonique de $\mathcal{M}_n$ donc $\boxed{\sigma = \lambda\text{Tr}}$.

3. (a) Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n$, d'après II.1., $\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0$. La trace étant linéaire, elle est donc nulle sur toute combinaison linéaire d'éléments de la forme précédente, Donc $\underline{\mathcal{C} \text{ est inclus dans le noyau de Tr.}}$

(b) Pour tout i et tout j éléments distincts de $1, n$, $E_{i,1}E_{1,j} - E_{1,j}E_{i,1} = E_{i,j}$, et donc $E_{i,j} \in \mathcal{C}$.

Pour tout élément k de $\{2, \dots, n\}$, $E_{1,k}E_{k,1} - E_{k,1}E_{1,k} = E_{1,1} - E_{k,k}$ et donc $E_{1,1} - E_{k,k} \in \mathcal{C}$.

Notons $F = \mathrm{vect}(E_{k,k})_{k=1,\dots,n})$ La famille $(E_{1,1} - E_{k,k})_{k=2,\dots,n}$ est clairement une famille libre de H.

La sous-famille de la base canonique (donc libre) $(E_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\},i\neq j}$ engendre un supplémentaire de F. Donc la famille

$$\boxed{\Big((E_{1,1} - E_{k,k})_{k=2,\dots,n}, (E_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\},i\neq j})\Big)}$$

est libre, de cardinal $n^2 - 1$ et constituée d'éléments de $\mathcal{C}$.

(c) Le noyau de la forme linéaire non nulle Tr est un hyperplan de $\mathcal{M}_n$ donc de dimension $n^2 - 2$, $\mathcal{C}$ en est un sous-espace (cf (a)) qui est de dimension au moins $n^2 - 1$ donc

$$\boxed{\mathcal{C} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})}.$$

Or $\mathcal{C} + \mathcal{H}. = \mathcal{C} \oplus \mathcal{H}$. Puisque $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$ est clairement réduit à $\{0_n\}$ ($\mathrm{Tr}(\lambda I_n) = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$), de plus :

$$\dim(\mathcal{C}) + \dim(H) = (n^2 - 1) + 1 = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n),$$

donc :

$$\boxed{\mathcal{M}_n = \mathcal{C} \oplus \mathcal{H}.}$$

4. D'après I.1.(a),

$$F_{h,k}^{-1}F_{i,j}F_{h,k} = (I_n - E_{h,k})(I_n + E_{i,j})(I_n + E_{h,k}).$$

Soit après calcul :

$$\boxed{F_{h,k}^{-1}F_{i,j}F_{h,k} = I_n + E_{i,j} - \delta_{k,i}E_{h,j} + \delta_{j,h}E_{i,k} - \delta_{k,i}\delta_{j,h}E_{h,k}} \quad (1)$$

5.
- En prenant dans (1), $k = i = j \neq h$, on a : $F_{h,i}^{-1}F_{i,j}F_{h,i} = F_{i,i} - E_{h,i}$.
  D'une part $\theta(F_{h,i}^{-1}F_{i,i}F_{h,i}) = \theta(F_{i,i}F_{h,i}F_{h,i}^{-1}) = \theta(F_{i,i})$. D'autre part par linéarité de θ : $\theta(F_{i,i} - E_{h,i}) = \theta(F_{i,i}) - \theta(E_{h,i})$. et donc :

  $$\theta(E_{h,i}) = 0.$$

- En prenant dans (1), $h = j = 1$ et $i = k \neq 1$, on a $F_{1,i}^{-1}F_{i,j}F_{1,i} = F_{i,j} - E_{1,1} + E(i,i) - E_{1,i}$. En raisonnant comme dans le premier point et en utilis ant le résulktat qui y est prouvé :

  $$0 = \theta(-E_{1,1} + E(i,i)) - \theta(E_{1,i} = \theta(-E_{1,1} + E(i,i))_0 = \theta(-E_{1,1} + E(i,i)).$$

Il résulte de ces deux points que θ est nulle sur la base de Ker(Tr) exhibée 3. donc sur Ker(Tr). La forme linéaire θ étant nulle sur le noyau de Ker(Tr), forme linéaire non nul, elle est d'après le cours de dualité, proportionnelle à Tr.

Ou bien : si θ est non nul son noyau contient l'hyperplan Ker(Tr) donc est égal à Ker(Tr), par égalité des dimensions, et donc θ est proportionnelle à Tr, ce qui est encore vrai de façon triviale si $\theta = 0$.

Ou bien encore : posons $\lambda = \frac{1}{n}\theta(I_n)$ alors θ et Tr coïncident sur la base de $\mathcal{M}_n = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus H$,

$$\Big((E_{1,1} - E_{k,k})_{k=2,\dots,n}, (E_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\},i\neq j}), I_n\Big),$$

et donc $\boxed{\theta = \lambda \mathrm{Tr}}$.

Indications pour la orrection du DS n°4
Ceci n'est plus une correction !

Partie III

Automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$

On appelle automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$, tout morphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ dans elle-même qui est bijectif. L'ensemble des automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ sera noté $\mathcal{AUT}(E)$, on admet, fait trivial, que $\mathcal{AUT}(E)$ est un sous-groupe du groupe des permutations de $\mathcal{L}(E)$. Pour tout élément g de GL_n, on désigne par A_g l'application de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ dans $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ qui à un élément u associe $g \circ u \circ g^{-1}$,

$$A_g \ : \ \mathcal{L}(\mathbf{E}) \to \mathcal{L}(\mathbf{E}), ; \ u \mapsto g \circ u \circ g^{-1}.$$

1. (a) Le caractère morphique de A_g résulte des règles de calcul dans une algèbre sa bijectivité provient de $A_g \circ A_{g^{-1}} = A_{g^{-1}} \circ A_g = \mathrm{id}_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$.
   On montre facilement que χ est morphisme du groupe $\mathcal{GL}(E)$ dans le groupe $\mathcal{AUT}(E)$. L'application χ est non injective puisque son noyau contient les homothétie de rapport non nul.
2. (a) Vu en exercice.
   (b) $\mathrm{Ker}\chi = \mathcal{H} \cap \mathrm{GL}_n = \{\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{E}}, \lambda \in \mathbf{R}_+^*\}$.
3. Soit $(\phi, \vec{x})$ un élément de $\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}$, on définit l'application

$$u_{\phi,\vec{x}} \ : \ \mathbf{E} \to \mathbf{E} \, ; \ \vec{y} \mapsto \phi(\vec{y})\vec{x}.$$

   On admettra, résultat évident, qu'une telle application est un endomorphisme.
   (a) Si ϕ ou $\vec{x}$ est nul, alors le noyau de $u_{\phi,\vec{x}}$ est $\mathbf{E}$ son image $\{\vec{0}\}$. Sinon le noyau de $u_{\phi,\vec{x}}$ est $\mathrm{Ker}(\phi)$ son image la droite $\mathrm{vect}(\vec{x})$.
   (b) Pour tout vecteur $\vec{y}$ de $\mathbf{E}$, $u^2_{(\phi,\vec{x})}(\vec{y}) = \phi(\vec{y})\phi(\vec{x})\vec{x}$. Donc $u_{\phi,\vec{x}}$ soit un projecteur non nul si et seulement si ϕ est non nul et $\phi(\vec{x}) = 1$.
4. (a) L'étude des image des vecteurs de $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ donne $u_{i,j} \circ u_{h,k} = \delta_{j,h} u(i,k)$.
   (b) C'est une base de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ comme image réciproque de la base canonique de $\mathcal{M}_n$ par l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.
5. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs non nuls de $\mathbf{E}$. On définit sur $\mathcal{P}$ la relation $\prec$ par, pour tout p et tout q éléments de $\mathcal{P}$, $p \prec q$ si $p = p \circ q = q \circ p$.
   (a) $\prec$ est une relation d'ordre : l'*antisymétrie* et la *reflexivité* coulent de source, la *transitivité* résulte de ce que pour tout p tout q et tout r élément de $\mathcal{P}$, si $p \prec q$ et si $r \prec p$ alors :

$$\underline{r \circ q} = r \circ p \circ q = r \circ p = \underline{r} = r \circ p = p \circ r = q \circ p \circ r = \underline{q \circ r}.$$

   Cette une relation d'ordre non totale, si p est le projecteur sur $\mathrm{vect}(\vec{e}_1)$ suivant $\mathrm{vect}(\vec{e}_2, \dots \vec{e}_n)$ et q est le projecteur sur $\mathrm{vect}(\vec{e}_n)$ suivant $\mathrm{vect}(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_{n-1})$, $p \circ q(\vec{e}_1) = \vec{0} \neq p(\vec{e}_1)$ et $q \circ p(\vec{e}_n) = \vec{0} \neq q(\vec{e}_n)$.

   (b) Supposons i. Soit $q \prec p$.
   De $p \circ q = q$ on déduit $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}p$, donc $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}p$ (puisque q est non nul et $\dim(\mathrm{Im}p) = 1$).
   De $q \circ p = q$ on déduit $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}q$ et donc $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}q$ (par la formule du rang). Finalement $q = p$, d'où ii.

Supossons ii. Si p n'était pas de rang 1, en notant $\mathbf{F}$ son image $\mathbf{G}$ son noyau et $\mathbf{D}$ une droite de $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ un supplémentaire de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{F}$, le projecteur q sur $\mathbf{D}$ suivant $\mathbf{F}' \oplus \mathbf{G}$ vérifirait $q \prec p$ et $q \neq p$ contredisant ii. Donc i. est vrai.

Voila prouvé l'équivalence de i. et ii.

Passons à celle de ii. et de iii. un projecteur non nul de la forme $u_{\phi,\vec{x}}$ est de rang 1 (cf. 3.(a)), si p est un projecteur de rang 1, en notant $\vec{x}$ un vecteur directeur de son image et $\mathbf{G}$ son noyau, $p = u_{\phi,\vec{x}}$, avec ϕ LA forme linéaire nulle sur $\mathbf{G}$ et valant 1 en $\vec{x}$.

6. (a) $A(p) \circ A(p) = A(p \circ p) = A(p)$, donc $A(p)$ est un projecteur.

(b) On suppose que p est un élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\prec$. Soit q' un élément de $\mathcal{P}$ telque $q' \prec A(p)$. On pose $q = A^{-1}(q')$. De $A(q) \circ A(p) = A(q \circ p) = A(q)$ on déduit $A(q \circ p) = A(p \circ q) = A(q)$ puis $q \circ p = p \circ q = q$ et par la minimalité de p, $q = p$, donc $q' = A(p)$.

$A(p)$ est encore un élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\prec$.

(c) $u_{i,i}$ vérifie 5.(b) iii. donc est un élément minimal de $\mathcal{P}$, donc $A(p)$ en est un aussi (6.(b)) et donc, d'après 5.(b), il existe une famille $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2 \dots \vec{\epsilon}_n)$ d'éléments de $\mathbf{E}$ et une famille $(\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n)$ d'éléments de $\mathbf{E}^*$ telle que, pour tout élément i de $\{1, \dots, n\}$:

i. $\phi_i(\vec{\epsilon}_i) = 1$;

ii. $A(u_{i,i}) = u_{\phi,\vec{\epsilon}_i}$.

(d) soit (i,j) un couple d'éléments de $\{1, \dots, n\}$,

$$A(u_{i,i}) \circ A(u_{j,j}) = A(u_{i,i} \circ u_{j,j}) = \delta_{i,j} A(u_{i,i})$$

. en appliquant à $\vec{\epsilon}_j$:

$$\phi_i(\vec{\epsilon}_j)\vec{\epsilon}_i = \delta_{i,j}\phi_i(\vec{\epsilon}_j)\vec{\epsilon}_i = \delta_{i,j}\phi_i(\vec{\epsilon}_i)\vec{\epsilon}_i = \delta_{i,j}\vec{\epsilon}_i.$$

On en déduit que la famille $(\vec{\epsilon}_1, \dots \vec{\epsilon}_n)$ est libre, donc que c'est une base et que $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est sa base duale.

7. Soit un couple (i,j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$.

(a) $A(u_{i,j}) \circ u_{\phi_k,\vec{\epsilon}_k} = A(u_{i,j}) \circ A(u_{k,k}) = \delta_{j,k} A(u_{i,k})$. Donc pour tout élément k de $\{1, \dots n\}$ distinct de j, $A(u_{i,j})(\vec{\epsilon}_k) = A(u_{i,j}) \circ u_{\phi_k,\vec{\epsilon}_k}(\vec{\epsilon}_k) = \vec{0}$

Le noyau de $A(u_{i,j})$ contient l'hyperplan $\text{vect}(\vec{\epsilon}_k)_{k=1,\dots,n;k\neq j}$, c'est même cet hyperplan puisque $u_{i,j}$ étant non nul et A un automorphisme $A(u_{i,j})$ est non nul. La formule du rang donne que $\text{rg}(A) = 1$

(b) $A(u_{i,j}) \circ A_(u_{j,i}) = A(u_{i,j} \circ u_{j,i}) = A(u_{i,i}) = u_{\phi_i,\vec{\epsilon}_i}$. On en déduire l'image de $A(u_{i,j})$ contient $\vec{\epsilon}_i$ (en appliquant à ce vecteur l'égalité précédente) et donc l'image de $A(u_{i,j})$, de dimension 1, est la droite engendrée par $\vec{\epsilon}_i$.

(c) $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j} u_{\phi_j,\vec{\epsilon}_i}$, où $\lambda_{i,j} = A(u_{i,j})(\vec{\epsilon}_j)$. Se vérifie sur les vecteurs de la base $(\vec{\epsilon}_1, \dots \vec{\epsilon}_n)$.

8. D'une part :

$$A(u_{i,j}) \circ A(u_{j,k}) = A(u_{i,k}) = \lambda_{i,k} u_{\phi_k,\vec{\epsilon}_i}$$

D'autre part

$$A(u_{i,j}) \circ A(u_{j,k}) = \lambda_{i,j}\lambda_{j,k} u_{\phi_j,\vec{\epsilon}_i} \circ u_{\phi_k,\vec{\epsilon}_j}$$

Or $u_{\phi_j,\vec{\epsilon}_i} \circ u_{\phi_k,\vec{\epsilon}_j}$ vaut $u_{\phi_k,\vec{\epsilon}_j}$ (les images des vecteurs de la base$(\vec{\epsilon}_1, \dots \vec{\epsilon}_n)$ par ces deux endomorphismes sont égales). Donc $\lambda_{i,j}\lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$ D'où $\lambda_{i,j} = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}$.

9. (a) on pose pour $i = 1, \ldots, n$ $\vec{\alpha}_i = \lambda_{1,i}\vec{\epsilon}_i$, $(\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n)$ est alors une base de $\mathbf{E}$ dont la base duale $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$ est donnée par $\alpha_j^* = \frac{1}{\lambda_{1,j}}\phi_j$, pour $j = 1, \ldots, n$ (cf 6.(d)). Donc d'après 8.,

$$A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*, \vec{\alpha}_i}.$$

   (b) En déduire qu'il existe un élément g de GL_n tel que, pour tout élément (i,j) de $\{1, \ldots, n\}$, $A = A_g$

   (c) Conclure...

10. Quelles sont les formes linéaires ϕ sur $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ telles que pour tout automorphisme A de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$, on ait, pour tout élément u de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$:

$$\phi(A(u)) = \phi(u)\,?$$

$\star \quad \star$

$\star$