# DS n°3

## CORRECTION DU SUJET 2

**Type CCP**

## EXERCICE 1

On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

.

On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**1)** Voir exercices de colles.

**2)** Voir exercices de colles.

**3)** Voir exercices de colles.

**4)** Application :
Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Voir exercices de colles.

(b) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Les applications $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}\,;\ M \mapsto \chi_{MB}(\lambda)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}\,;\ M \mapsto \chi_{BM}(\lambda)$ sont **continues** car elles sont polynomiales en les coefficients de la variable qui sont ses coordonnées dans la base canonique. Ces deux applications par (a) coïncident sur l'ensemble **dense** $\mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ donc sont égales. Donc $\lambda$ étant quelconque :

$$\underline{\chi_{AB} = \chi_{BA}}$$

**Remarque.** *Il est plus élégant de passer par la polynomialité de $t \mapsto \chi_{(A-tIn)B}$ et $t \mapsto \chi_{B(A-tIn)}$ et le fait que ces applications coïncident sur un ensemble infini cf. exercices de colles, mais ce n'est pas demandé.*

**5)** Voir exercices de colles.

## EXERCICE 2

**1)** On a immédiatement

$$g'\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Par ailleurs

$$u_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{-x}} = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_0^1 g'(x)\mathrm{d}x = g(1) - g(0) = \underline{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}.$$

**2)** Comme $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$ on a :

$$u_1 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = \underline{\ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)}.$$

**3)** • Pour tout $n \in \mathbf{N}$, et tout $t \in [0,1]$,

$$u_{n+1}(t) - u_n(t) = \frac{e^{-(n+1)x} - e^{-nx}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-(n+1)x} - e^{-nx}}{1+e^{-x}} \leq 0,$$

par croissance de l'exponentielle. La positivité de l'intégrale assure alors que : $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *décroît.*

• La positivité de l'application $x \mapsto \dfrac{e^{-(n+1)x} - e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ sur $[0,1]$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ assure la positivité de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui est donc *minorée* par 0.

De ces deux points vient que $\underline{(u_n)_{n\in N} \text{ converge.}}$

**4)** Pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n + u_{n-1} = \int -0^1 e^{-nx} = -\frac{1}{n}(e^{-n} - 1).$$

En laissant $n$ tendre vers $+\infty$, il vient

$$\ell + \ell = 0 \times (0-1) = 0.$$

Soit $\boxed{\ell = 0}$.

# PROBLÈME

**Partie I : Le théorème du point fixe de** Picard

Vue en TD. intégralement.

**Partie II : Exemples et contre exemples**

**1) De la nécessité d'avoir une contraction stricte**

On considère l'application $g$ définie par :

$$g\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto t + \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$

(a) Pour tout réel $t$, $|g'(t)| = |1 - \dfrac{1}{1+t^2}| = \dfrac{t^2}{1+t^2} < 1$.

Soient $(x,y)$ un couple de réels distincts comme $g$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ l'égalité des accroissements finis fournit un réel $c$ compris entre $x$ et $y$ tel que

$$\frac{g(x) - g(y)}{x-y} = g'(c).$$

Donc $\underline{|g(x) - g(y)| = |g'(c)|| - y| < |x-y|,}$

(b) Exercice, (on pouvait signaler que le graphe de $f$ admet la droite $y = x$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$ et est au dessus de son asymptote, au voisinage de $+\infty$ et même sur $\mathbf{R}$ entier.)

(c) Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $g(x) > x$ puisque $\arctan(\mathbf{R}) = \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Donc $g$ n'a pas de point fixe ; donc, par contraposition du théorème du point fixe de Picard $\underline{g \text{ n'est pas une contraction stricte de } (\mathbf{R}, |\cdot|).}$

**2)** Soit $g$ une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout réel $x$, $|g'(x)| < \dfrac{1}{2}$. Soit $f$ une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout réel $x$,

$$f(x) = f \circ g(x).$$

(a) L'inégalité des accroissements finis assure que pour tout couple $(x,y)$ de réels :

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$

Donc par la partie I., il existe un réel $\ell$ (l'unique point fixe de $g$) tel que pour tout réel $a$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell$.

(b) Pour tout entier $n \geq 0$ désignons par $(P_n)$ la propriété :

Pour tout réel $x$, $f(g^n(x)) = f(x)$.

• La propriété $(P_0)$ est désespérément triviale. Notons que $(P_1)$ est l'hypothèse même faite sur $f$ et $g$.

• Soit $q \in \mathbf{N}$. Supposons $(P_q)$ vraie. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, en appliquant $(P_1)$, puis $(P_q)$, il vient

$$f(g^{q+1}(x)) = f \circ g(g^q(x)) = f(g^q(x)) = f(x).$$

D'où $(P_{q+1})$.

Ainsi par récurrence a-t-on prouvé que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\boxed{f(g^n(x)) = f(x)}$, pour tout réel $x$.

(c) Soit $a$ un réel par (a), on a que $(g^n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell$, mais par (c),

$$\forall n \in \mathbf{N}, f(a) = f(g^n(a)),$$

et donc, en laissant $n$ tendre vers $+\infty$, a-t-on : $f(a) = f(\ell)$, par *continuité* de $f$.

Donc $f$ est constante.

**3) Un système non linéaire dans $\mathbf{R}^2$**

(a)

(b) Cours.

(c) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes car définies sur un espace de dimension finie.

(d) On a $|\sin'| = |\cos| \leq 1$ et $|\arctan'| = \left|\dfrac{1}{1+\mathrm{id}_{\mathbf{R}}^2}\right| \leq 1$. Donc par l'inégalité des accroissements finis pour tout couple $(a, b)$ de réels,

$$|\sin b - \sin a| \leq 1 \times |b-a| \text{ et } |\arctan b - \arctan a| \leq 1 \times |b-a|.$$

(e) Soient $(a, b)$ et $(x, y)$ des points de $\mathbf{R}^2$. Notons $\psi = (\psi_1, \psi_2)$. D'une part par (d),

$$|\psi_1(x,y) - \psi_1(a,b)| = \frac{1}{4}|\sin(x+y) - \sin(a+b))| \leq \frac{1}{4}|(x+y)-(a+b)| \leq \frac{1}{4}|x-a| + |y-b| = \frac{\|(x,y)-(a,b)\|_1}{4}.$$

D'autre part on a de même

$$|\psi_2(x,y) - \psi_2(a,b)| = \frac{2}{3}|\arctan(x-y) - \arctan(a-b))| \leq \frac{2}{3}|x-a| + |y-b| = \frac{2\|(x,y)-(a,b)\|_1}{3}.$$

Donc

$$\|\psi(x,y) - \psi_(a,b)\|_1 = |\psi_1(x,y) - \psi_1(a,b)| + |\psi_2(x,y) - \psi_2(a,b)| \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)\|(x,y)-(a,b)\|_1 = \frac{3}{4}\|(x,y)-(a,b)\|_1$$

Prouver que $\psi$ est donc une contraction stricte de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_1)$ de rapport $\dfrac{3}{4}$.

(f) Par le théorème de Picard, l'application $\psi$ admet un et un seule point fixe. Or un élément de $\mathbf{R}^2$ est solution de (†) si et seulement si il est point fixe de $\psi$.
Donc le système (†) admet une et une seule solution dans $\mathbf{R}^2$.

(g) On a immédiatement $\left\|\psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \psi(0,0)\right\|_\infty = \left\|\left(0, \frac{\pi}{6}\right)\right\|_\infty = \boxed{\frac{\pi}{6}}$.

(h) L'application $\psi$ n'est pas une contraction stricte de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, en effet

$$\left\|\psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \psi(0,0)\right\|_\infty = \frac{\pi}{3}\left\|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - (0,0)\right\|_\infty$$

et $\dfrac{\pi}{3} > 1$.
Le choix de la norme, bien que celles si soient toutes équivalentes est important pour prouver l'existence d'un point fixe par le théorème de Picard.