Correction du DS n^{o}4

SUJET 1

Étude d'un endomorphisme d'un espace de fonctions numériques

A. Préliminaires

1. L'ensemble $\mathcal{P}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par la famille $(f_n\ :\ I \to \mathbb{C}\,;\ t \mapsto t^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Soit $f \in \mathcal{E}$. Pour tout $x \in I$, et tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $(x) \in I$ donc les intégrandes dans la définition de $u(x)$ et $v(x)$ sont bien défines et continues ce qui assure la définition de $u(x)$ et $v(x)$.
   Alors le résultat admis assure que $u(f) \in \mathcal{E}$ mais aussi que $u(f') \in \mathcal{E}$, puisque $f' \in \mathcal{E}$. Donc l'identité de I étant élément de $\mathcal{E}$, on a par produit $v(u) \in \mathcal{E}$.
   l'application $\mathcal{E} \to \mathcal{E}\,;\ f \mapsto u(f)$ (resp.$v(f)$) est linéaire par linéarité de l'intégration, (resp. par linéarité de la dérivation et de l'intégration). Donc $\boxed{u \in \mathcal{L}(\mathcal{E})}$, $\boxed{v \in \mathcal{L}(\mathcal{E})}$.

3. On reprend la notation de la question 1).
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-a, a]$. On a
   $$u(f_n)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (x \sin t)^n t = \frac{2}{\pi} W_n f_n(x),$$
   et donc $u(f_n) = \dfrac{2W_n}{\pi} f_n \in \mathcal{P}$. Comme $(f_n, n \in \mathbb{N})$ engendre $\mathcal{P}$, $\boxed{\mathcal{P} \text{ est stable par } u}$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} W_n - W_{n+2} =& \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \times \cos(t)\sin^n(t)\ \mathrm{d}t \\ =& \left[\cos t \frac{\sin^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\sin t) \times \frac{\sin^{n+1}(t)}{n+1}\ \mathrm{d}t \\ =& \frac{1}{n+1} W_{n+2}, \end{aligned}$$
   par intégration par parties.
   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n}$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = (n+1)W_n W_{n+1}$, alors d'après la relation précédente,
   $$a_{n+1} - a_n = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} - (n+1)W_n W_{n+1} = 0,$$
   . Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, or $a_0 = W_0 W_1 = \dfrac{\pi}{2} \times \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \times [-\cos t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$.
   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}.}$

5. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$W_n - W_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \times (1-\sin t)\ \mathrm{d}t$ $t \mapsto (\sin t)^n(1-\sin t)$ est une fonction continue, positive sur le segment non trivial $[0, \pi/2]$.
De plus, cette fonction est non nulle car elle vaut $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \times \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en $\dfrac{\pi}{4}$.
Donc $W_n - W_{n+1} > 0$.
Conclusion : $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le point précédent,

$$W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n,$$

or W_n, intégrale d'une fonction continue positive et non nulle, est strictement positive. donc

$$\frac{n+1}{n+2}\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Donc par encadrement $W_n \sim W_{n+1}$. Donc d'après 4.,

$$W_nW_n \sim W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1}.$$

Donc, par positivité de W_n

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}},}$$

et donc, en particulier, $\boxed{(W_n) \text{ converge aussi vers } 0.}$

Vous aurez, bien entendu,hg reconnu les célèbres intégrales de Wallis...

B. Etude de la continuité de u et v

On considère la norme M de $\mathcal{E}$ définie pour tout $f \in \mathcal{E}$ par la formule

$$M(f) = \max_{x\in I} |f(x)|.$$

6. Cours.
7. Soit donc $f \in \mathcal{E}$. L'inégalité triangulaire fournit

$$\forall x \in I,\ |u(f)(x)| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} |f(x\sin t)|\,dt \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} M(f)\,dt = M(f).$$

La borne supérieure étant le *plus petit* des majorants, $\boxed{M(u(f)) \leq 1 \times M(f).}$
Donc u est une application continue de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même.
8. Avec les notations de 1., la question 3 montre que : $v(f_n)(a) = nW_{n-1}a^n$ et donc que $M(v(f_n)) \geq |v(f_n)(a)| = nW_{n-1}a^n$.
De plus, trivialement $M(f_n) = a^n$
Donc la suite $\left(\frac{f_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le boule unité fermée de $(\mathcal{E}, M)$ tandis que

$$M\left(u\left(\frac{f_n}{a_n}\right)\right) \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} +\infty,$$

grâce à l'équivalent de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvé en 5.
Donc u n'est pas bornée sur la boule unité fermé donc non continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans lui même.

9. Vu en cours.
10. Les normes N et M ne sont pas équivalentes car v est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$ et non continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans $(\mathcal{E}, M)$. En effet si ces normes étaient équivalente il existerait un réel $k > 0$ tel que $M \leq kN$ et donc l'identité, application linéaire, serait continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$ et donc par composition $\mathrm{id}_{\mathcal{E}} \circ v$, autant dire v, le serait de $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même.
11. Soit $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$. La fonction f' étant continue sur le segment I, la proposition 2. dit qu'il existe une fonction polynomiale $q : I \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in I, \ |f'(x) - q(x)| \leq \varepsilon.$$

Soit p l'unique primitive de q telle que $p(0) = f(0)$ (l'application q est continue). Alors p est polynomiale et répond à la question.
Alors, pour tout $x \in I$, grâce à l'inégalité des accroissements finis, appliquée à $f - p$ entre 0 et x,

$$|f(x) - p(x)| = |f(x) - p(x) - (f(0) - p(0))| \leq \varepsilon |x - 0| \leq a\varepsilon.$$

Donc $N(f - p) \leq (|a| + 1)\varepsilon$: la boule de centre f et de rayon $(1 + |a|)\varepsilon$ rencontre $\mathcal{P}$.

Comme f et ε sont quelconques, $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, N)$.

C. Etude de l'inversibilité de u et v

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reprends la notation de 1., $f_n \ : \ I \to \mathbb{C} \, ; \ t \mapsto t^n$.
$(u \circ v)(f_n) = u\left(nW_{n-1} f_n\right) = nW_{n-1} u(f_n) = nW_{n-1} \dfrac{2}{\pi} W_n f_n = f_n$ d'après la question 4).
$(u \circ v)(f_0) = u(v(f_0)) = u(f_0) = \dfrac{2}{\pi} W_0 f_0 = f_0.$

Donc $(u \circ v)$ et $id_{\mathcal{E}}$ sont linéaires et coïncident sur une partie génératrice de $\mathcal{P}$.
Conclusion : $\boxed{\forall f \in \mathcal{P}, (u \circ v)(f) = f}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$(v \circ u)(f_n) = v(u(f_n)) = v(\dfrac{2}{\pi} W_n f_n) = \dfrac{2}{\pi} W_n v(f_n) = \dfrac{2}{\pi} W_n n W_{n-1} f_n = f_n.$
$(v \circ u)(f_0) = v(u(f_0)) = v(f_0) = f_0.$
Comme précédemment, : $\boxed{\forall f \in \mathcal{P}, (v \circ u)(f) = f}$
13. Par 8. et 9. l'application $u \circ v$ est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$, $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ itou, et ces deux applications coïncident sur $\mathcal{P}$, partie dense de $(\mathcal{E}, N)$, donc sont égales. Donc

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{E}, (u \circ v)(f) = f}$$

L'application $u \circ v$ est donc injective et par suite, v est également injective.
Donc $\boxed{0 \text{ n'est pas valeur propre de } v}$
14. Soit $h \in \mathcal{E}$ D'après la question 6), $M(u(h)) \leq M(h)$. De plus

$$\forall x \in [-a, a] \, , (u(h))'(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \times h'(x \sin t) \ \mathrm{d}t \leq M(h').$$

Donc $M((u(h))') \leq M(h')$. Par sommation, $N(u(h)) \leq N(h)$.
L'application u est ainsi continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans lui même et donc $v \circ u$ est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$. On conclut comme à la question précédente puisque $v \circ u$ et $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ coïncident sur $\mathcal{P}$, partie dense de $(\mathcal{E}, N)$.

$\boxed{u \text{ et } v \text{ sont inversibles dans } L(\mathcal{E}) \text{ et bijection réciproque l'une de l'autre}}$

Applications.

15. Remarquons que $\underline{\forall f \in \mathcal{E}, v(f) = f(0) + \frac{\pi \mathrm{id}_{\mathcal{E}}}{2} u(f').}$

la fonction $\arctan'$ est de classe C^∞ sur $[-a, a]$ donc on peut calculer $u(\arctan')$.
Soit $x \in [-a, a]$.
$u(\arctan')(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + x^2 \sin^2(t)} \,\mathrm{d}t$
$t \mapsto \tan(t)$ est une bijection de classe C^1, strictement croissante de $[0, \pi/2[$ vers $[0, +\infty[$. le théorème de changement de variable pour l'intégrale généralisée dit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (1 + x^2) z^2} \,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + x^2 \sin^2(t)} \,\mathrm{d}t.$$

Donc $u(\arctan')(x) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \arctan(\sqrt{x^2 + 1} z) \right]_0^\infty = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$
Conclusion : $\boxed{u(\arctan') = \mathrm{argsh}'.}$

Composons cette dernière égalité par v,

$$\arctan' = v \circ u(\arctan') = v(\mathrm{argsh}') = \mathrm{argsh}'(0) + \frac{\pi \mathrm{Id}_I}{2} u(\mathrm{argsh}'').$$

Donc pour tout $x \in I$, on a $\boxed{u(\mathrm{argsh}'')(x) = \frac{2}{\pi(x(1 + x^2))}}$

16. • Supposons f paire.
Soit $x \in [-a, a]$.

$$\begin{aligned} u(f)(-x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(-x \sin t) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin t) \,\mathrm{d}t \qquad \text{par parité de } f \\ &= u(f)(x). \end{aligned}$$

Donc $u(f)$ est paire.
On démontre de la même façon que si f est impaire, alors $u(f)$ est également impaire.

• Supposons $u(f)$ paire.
D'après ce qui précède, on peut écrire que

$$\forall x \in [-a, a], f(x) = v(u(f))(x) = u(f)(0) + \frac{\pi}{2} x u(u(f)')(x).$$

Comme dérivée d'une fonction paire, $u(f)'$ est impaire donc $u(u(f)')$ est impaire également donc

$$x \mapsto x \times u(u(f)')(x)$$

est paire.
Conclusion : f est paire.
Supposons $u(f)$ impaire.
Alors $u(f)(0) = 0$.

Comme dérivée d'une fonction impaire, $u(f)'$ est paire donc $u(u(f)')$ est paire également.
De plus,
$$\forall x \in [-a, a]\,, f(x) = u(f)(0) + \frac{\pi}{2} x \times u(u(f)')(x) = \frac{\pi}{2} x \times u(u(f)')(x).$$
Comme produit d'une fonction impaire ($x \mapsto x$) et d'une fonction paire, f est impaire.
Conclusion : $\boxed{\text{Les deux équivalences souhaitées sont démontrées}}$
Supposons $v(f)$ paire.
D'après ce qui précède, $u(v(f))$ est paire donc f est paire.
Supposons $v(f)$ impaire. Alors, de même, f est impaire.
Supposons f paire (resp impaire).
$f = u(v(f))$ donc d'après ce qui précède, $v(f)$ est paire (resp impaire).
Conclusion : $\boxed{\text{Les deux équivalences envisagées sont démontrées pour } v}$

D. Etude des valeurs propres de u et v

17. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour que la question ait un sens, on est obligé de supposer que $\lambda \neq 0$ (de toute façon, on a prouvé que 0 n'était pas valeur propre de v).
    - Supposons que λ soit une valeur propre de v, et soit $f \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors on a
$$f = u(v(f)) = u(\lambda f) = \lambda u(f).$$
    Il vient ensuite $\boxed{u(f) = \frac{1}{\lambda} \times f}$
    Donc $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de u, et f est un vecteur propre associé.
    - Réciproquement, supposons que $\frac{1}{\lambda}$ soit une valeur propre de u, et soit $f \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors
$$f = v(u(f)) = v\left(\frac{1}{\lambda} \times f\right) = \frac{1}{\lambda} \times v(f).$$
    Donc $\boxed{v(f) = \lambda f}$
    Donc λ est valeur propre de v, et f est un vecteur propre associé.

On considère une valeur propre λ de u, de vecteur propre associé $f \in \mathcal{E}$.

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}|$ est continue sur le segment I, donc le réel m_n est bien défini. Soit $x \in I$. On a
$$\lambda f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin t)\, dt.$$
En utilisant la proposition 1. , on en déduit pour tout entier $n \geq 0$,
$$\lambda f^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) f^{(n)}(x \sin t)\, dt,$$
et donc en passant au module $\boxed{|\lambda| \cdot |f^{(n)}(x)| \leq \frac{2m_n W_n}{\pi}.}$ Puis en passant à la borne supérieure,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda| \cdot m_n \leq \frac{2m_n W_n}{\pi}, \tag{1}$$
De plus on a $\lambda \neq 0$ (sans quoi u ne serait pas injective), donc $|\lambda| > 0$. Puisque $W_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on peut dispose de N entier naturel, tel que pour tout $n \in [\![N, +\infty[\![$,
$$\frac{2W_n}{\pi} < |\lambda|.$$

Donc par (1), pour tout $n \in [\![N, +\infty[\![$ $m_n = 0$, et donc $\boxed{f^{(n)} = 0}$
Donc f est donc polynomiale.

19. La question 15. permet de se ramener à l'étude des éléments propres de u. On garde les notations de la question 1.
    - Analyse.
      Soit λ une valeur propre de u, et $f \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors f est polynomiale et non nulle. Notons $n \in \mathbb{N}$ son degré, et décomposons-la sur la base $(f_0, \ldots, f_n)$:
      $$f = \alpha_0 f_0 + \ldots + \alpha_n f_n.$$
      En appliquant u et en réutilisant la question 3), on a par unicité d'écriture (I est une partie infinie de $\mathbb{R}$) que
      $$\forall k \in \{0, ..., n\},\ \lambda \alpha_k = \frac{2W_k}{\pi} \alpha_k.$$
      Puisque $f \neq 0$, on peut fixer k_0 tel que $\alpha_{k_0} \neq 0$. On en tire $\boxed{\lambda = \frac{2W_{k_0}}{\pi}}$
      Puis, par stricte monotonie de la suite (W_k) on a
      $$\forall k \neq k_0,\ \alpha_k = 0.$$
      Donc $\boxed{f \in \mathrm{vect} f_{k_0}}$
    - Synthèse.
      La réciproque a déjà été effectuée à la question 3).

    Conclusion
    - Les valeurs propres de u sont exactement les $\lambda_n = \frac{2W_n}{\pi}$, et les sous-espaces propres associés sont les vect$t f_n$.
    - Les valeurs propres de v sont exactement les $\mu_n = \frac{\pi}{2W_n}$, et les sous-espaces propres associés sont les vectf_n.

20. - On a $\mathrm{vect}(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = \mathcal{P}$, et $\boxed{\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{E}}$
      En effet, par exemple, la fonction cos vérifie
      $$\forall n \in \mathbb{N},\ \cos^{(4n)}(0) = 1,$$
      donc elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ \cos^{(4n)} \neq 0$. Donc elle n'est pas polynomiale. Pourtant, elle appartient clairement à $\mathcal{E}$.
      Donc $\mathcal{E}$ n'admet pas de base de vecteurs propres (qu'ils soient de u ou de v).
    - L'ensemble $\{\lambda_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas fermé, car 0 lui est adhérent.
    - Montrons que l'ensemble $F = \{\mu_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est fermé.
      - Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans F qui converge vers un complexe x. Pour $k \in \mathbb{N}$, écrivons $x_k = \mu_{\phi(k)}$. Puisque la suite (x_k) converge, elle est bornée. Soit M un majorant de $|x_k|$. On a donc
        $$\forall k \in \mathbb{N},\ |\mu_{\phi(k)}| \leq M.$$
      - Or on a $\mu_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
        $$\forall n > N,\ |\mu_n| > M.$$
        On en déduit que la suite x_k est à valeurs dans $\{\mu_0, \ldots, \mu_N\}$.
      - Cet ensemble est fini donc compact (ne serait-ce que parce qu'il est fermé et borné dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$, qui est de dimension finie). Ainsi, la suite (x_k) admet une valeur d'adhérence μ_n, avec $n \in \{0, ..., N\}$. Par unicité de la limite on obtient $x = \mu_n$, donc $\boxed{x \in F}$

E. THÉORÈME DE WEIERSTRASS

Bientôt vu en TD.