

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2020

Épreuve de mathématiques

Durée : 3h

En dehors de sa dernière question, la partie II est indépendante de la partie I.

Partie I - Intégrales généralisées de Dirichlet

1. Les sous-questions sont indépendantes.

(a) On considère la fonction

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0; \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(b) i. Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

On **admet** l'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

ii. Déterminer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt$.

(c) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $t \mapsto \ln g(t)$.

(d) On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donner, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, un équivalent de $\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt$.

2. Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

(a) Vérifier que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} dt$ est convergente.

(b) Quelle est la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$?

3. On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t > 0$, $h_n(t) = \sin^n t$.

Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

(a) Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Justifier l'existence d'un réel $K > 0$ pour lequel, pour tout réel t , on a : $|h_n^{(k)}(t)| \leq K$.

(b) i. Quel est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n ?

ii. Établir l'égalité : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(c) Justifier, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt$.

(d) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$ et établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Établir, pour tout réel t , l'égalité

$$h_{2n}(t) = \sin^{2n} t = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}.$$

(b) En déduire, pour tout réel t , l'égalité

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin(2jt).$$

(c) En déduire l'égalité : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}.$

5. Étude asymptotique de la suite de terme général $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt$

(a) Prouver, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$

(b) i. Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$.

ii. En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation asymptotique :

$$\int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

On pourra, en utilisant le résultat de la question 1-c), donner un équivalent de $\ln\left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)$ où $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

(c) i. Justifier l'existence de $a > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, a]$, on a : $|e^{-u} - 1| \leq 2u$.
ii. Justifier l'existence d'un réel $b > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b]$,

$$-t^3 \leq \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leq 0.$$

On utilisera le résultat de la question 1-c).

iii. En déduire, pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3}) dt,$$

puis, toujours quand l'entier n est assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq 2 \frac{\ln^4 n}{n}.$$

(d) En déduire, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, l'équivalence :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}.$$

On se souviendra du résultat de 1-d).

Partie II Montées d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$

On appelle, pour tout entier naturel n non nul, **montée** d'une liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ d'entiers naturels **distincts deux à deux** toute sous-liste $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_q)$ (avec $p \leq q$) vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} p = 1 \text{ ou } a_{p-1} > a_p \\ \text{et } a_p < a_{p+1} < \dots < a_q \text{ (si } p < q) \\ \text{et } q = n \text{ ou } a_q > a_{q+1} \end{cases}$$

On note $M(a)$ le nombre de montées de la liste a . Par exemple, les montées de la liste $a = (2, 5, 7, 6, 1, 4, 3, 8)$ sont $(2, 5, 7)$, (6) , $(1, 4)$ et $(3, 8)$, et donc $M(a) = 4$.

On définit de même la notion de descente d'une liste a d'entiers naturels distincts deux à deux et son nombre de descentes $D(a)$. Par exemple, les descentes de la liste $a = (2, 5, 7, 6, 1, 4, 3, 8)$ sont (2) , (5) , $(7, 6, 1)$, $(4, 3)$ et (8) , et donc $D(a) = 5$.

On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n l'ensemble des n -listes d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ **distincts deux à deux**.

Il est clair que, pour toute liste a de S_n , on a $1 \leq M(a) \leq n$ et $1 \leq D(a) \leq n$.

Enfin, pour tout entier naturel k , on note $E_n(k)$ le nombre de listes a de S_n ayant exactement k montées. Autrement dit, $E_n(k) = \text{card} \{ a \in S_n; M(a) = k \}$. On a donc, $E_n(0) = 0$ ainsi que $E_n(k) = 0$ pour tout entier $k > n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer les valeurs de $E_n(1)$ et $E_n(n)$.

(b) Soit k un entier fixé compris entre 1 et n .

Donner un exemple de liste a de S_n pour laquelle $M(a) = k$.

2. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul et pour toute liste a de S_n , la valeur de $M(a) + D(a)$.

En notant, pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, s_i la somme du nombre de montées et du nombre de descentes de $(a_1, a_2, \dots, a_i)$, on évaluera, en fonction du nombre s_i , la somme s_{i+1} des nombres de montées et de descentes de $(a_1, a_2, \dots, a_{i+1})$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On associe, à toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de S_n , la liste

$$\Psi(a) = (n+1-a_1, n+1-a_2, \dots, n+1-a_n).$$

- (a) Vérifier que l'application Ψ est une bijection de S_n sur S_n .
- (b) En déduire, pour tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité : $E_n(k) = E_n(n+1-k)$.

4. Calcul de $E_n(2)$

Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

- (a) Quel est le nombre de couples (A, B) de parties **non vides** de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que

$$A \cup B = \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

- (b) Établir l'égalité : $E_n(2) = 2^n - (n+1)$.

5. Une relation de récurrence

Soit n un entier naturel non nul. À toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ de S_{n+1} , on associe la liste $\varphi_n(a)$ de S_n obtenue en ôtant l'élément $(n+1)$ de la liste a . Par exemple, dans le cas particulier où $n = 5$, si $a = (3, 4, 1, 5, 6, 2)$, alors $\varphi_5(a) = (3, 4, 1, 5, 2)$, et si $a = (6, 3, 4, 1, 5, 2)$ alors $\varphi_5(a) = (3, 4, 1, 5, 2)$.

- (a) Soit $b = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de S_n . Comment s'écrivent les éléments de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?
- (b) Soit k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et soit b dans S_n tels que $M(b) = k$. Quelles sont les valeurs possibles de $M(a)$ pour un élément a de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?
- (c) Établir, pour tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité :

$$E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k).$$

Vérifier que cette formule tient également pour $k = 0$ et pour tout entier $k > n$.

- (d) Donner, en détaillant le calcul de $E_5(3)$, les valeurs de $E_n(k)$ pour tous les couples d'entiers (n, k) tels que $1 \leq k \leq n \leq 5$. On consignera les résultats dans un tableau, n étant l'indice de ligne et k l'indice de colonne.

6. La formule de Worpitzky

Établir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité

$$E_n(k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n.$$

On raisonnera par récurrence sur l'entier n .

7. Une égalité miraculeuse !

Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$E_{2n-1}(n) = \frac{2}{\pi} (2n-1)! \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{2n} dt.$$