Partie I

I.A $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j + b_i$ donc $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = A_{i,j}$: f est donc de classe C^1 et $J_f(x) = A$.

I.B 1)

2) Cours

I.C 1) On a $t_j = te_j$ où e_j désigne le j-ème vecteur de la base canonique. En utilisant le I.B.2 : $f_i(t_j) = f_i(te_j) = f_i(0) + t\mathrm{D}_j f_i(0) + o(t)$

Pour conlure utiliser la n-linÃ©aritÃ© du dÃ©terminant.

2) ImmÃ©diat

3) Donner une interprÃ©tation en terme d'aire ou de volume.

Partie II

II.A D'après le I.A. on a $\mathrm{jac}_f(x) = A$ donc $\mathrm{div}_f(x) = \mathrm{tr}(A)$.

II.B 1) $u_a(t) = (a_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, a_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t})$.

2) $\det(u_a(t), u_b(t)) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathrm{e}^{\lambda_1 t + \lambda_2 t} = \det(a,b)\mathrm{e}^{t\mathrm{div}_f(a)}$ puisque $\mathrm{div}_f(x) = \mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$. De plus on a bien $\det(u_a(0), u_b(0)) = \det(a,b)$.

3) Le parallélogramme de sommets $(0,0)$, $u_a(t)$, $u_b(t)$ et $u_a(t) + u_b(t)$ a pour aire: $|\det(u_a(t), u_b(t)) = |\det(a,b)|\mathrm{e}^{t\mathrm{div}_f(a)}$ ....

II.C 1) $\theta_a(x) = a_2 \left(\dfrac{x}{a_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$.

2) a) $\theta_a(x) = \dfrac{x^2}{3}$.

b) $\theta_a(x) = \dfrac{4}{x^2}$, $\theta_b(x) = \dfrac{2}{x^2}$ et $\theta_{a+b}(x) = \dfrac{27}{x^2}$.

c) $\theta_a(x) = \theta_b(x) = \dfrac{2}{x}$ et $\theta_{a+b}(x) = \dfrac{9}{x}$.

II.D 1) On trouve $u_a(t) = ((a_1 + \mu a_2 t)\mathrm{e}^{\lambda t}, a_2 \mathrm{e}^{\lambda t})$.

$\det(u_a(t), u_b(t)) = ((a_1 + \mu a_2 t)b_2 - a_2(b_1 + \mu b_2 t))\mathrm{e}^{2\lambda t} = \det(a,b)\mathrm{e}^{t\mathrm{div}_f(a)}$ puisque $\mathrm{div}_f(x) = \mathrm{tr}(A) = 2\lambda$.

2) Si A a un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$, elle est soit diagonalisable et donc semblable à la matrice du II.B, soit non diagonalisable et semblable à la matrice triangulaire du II.D.1. etc.

3) Si le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, c'est que A possède deux valeurs propres complexes non réelles λ_1 et $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. A est semblable à la matrice diagonale $A' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ avec une matrice de passage complexe P. On peut donc appliquer la formule obtenue au II.B.2 à la matrice A' puis avec les mêmes calculs qu'au II.D.2 : $\det(u_a(t), u_b(t)) = \det(P)\det(v_a(t), v_b(t)) = \det(P)\det(v_a(0), v_b(0))\mathrm{e}^{t\mathrm{div}_f(a)} = \det(u_a(0), u_b(0))\mathrm{e}^{t\mathrm{div}_f(a)}$ puisque $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}(A) = \mathrm{div}_f(a)$.

Partie III

III.A Cours

III.B 1) Utiliser, pour tout couple (i,j), $\mathrm{D}_j f_i(x) = -\mathrm{D}_i f_j(x)$

2) Si on permute les deux premiers indices dans $f_{i,j,k}(x)$ on ne change rien alors que $f_{i,k,j}(x) = -f_{i,j,k}(x)$. Donc $f_{i,j,k}(x) = -f_{i,k,j}(x) = -f_{k,i,j}(x) = f_{k,j,i}(x) = f_{j,k,i}(x) = -f_{j,i,k}(x) = -f_{i,j,k}(x)$...

3) Les dérivées partielles de $\mathrm{D}_j f_k(x)$ par rapport à toutes les variables x_i étant nulles, $\mathrm{D}_j f_k(x)$ est une constante que l'on peut noter $A_{k,j}$. La matrice $J_f(x) = A$ est donc constante. A est antisymétrique puisque $J_f(x)$ l'est.

Posons $g(x) = f(x) - Ax$. Montrer qu eg est constante...

On vient de montrer que si $J_f(x)$ est antisymétrique pour tout x alors on a $f(x) = Ax + B$ avec A antisymétrique.

Réciproquement, si $f(x) = Ax + B$ avec A antisymétrique, on déduit par le I.A que $J_f(x) = A$ est antisymétrique pour tout x.