Indications pour programme de colles n°8

1. Déjà donné
2. (a) Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $F+K$ qui converge vers un élément z de $\mathbf{E}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on peut choisir un élément f_n de F et un élément k_n de K tels que

$$z_n = f_n + k_n.$$

La suite $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$, à valeurs dans K admet une suite extraite, disons $(k_{\phi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$, qui converge vers un élément k de K. Comme $(k_{\phi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers z (sous-suite),

$$f_\phi(p) \underset{p\to+\infty}{\to} z-k.$$

Le caractère fermé de F nous dit que $z-k$ est élément de F. Or $z=(z-k)+k$, donc $z \in F+K$. Donc $F+K$ est fermé.

(b) Déjà donné

(c) $\star$*Soient* $\mathbf{F}$ *et* $\mathbf{G}$ *des sous-espaces vectoriels de* $\mathbf{E}$. *On suppose que* $\mathbf{F}$ *est fermé et* $\mathbf{G}$ *de dimension finie. Montrer que* $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ *est fermé.*

Cas particulier : $\mathbf{G}$ est une droite.

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathbf{G}$. Soit $(\vec{z}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ qui converge vers un élément $\vec{z}$ de $\mathbf{E}$. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on peut choisir un élément $\vec{f_n}$ de $\mathbf{F}$ et un élément x_n de $\mathbf{K}$ tels que

$$\vec{z_n} = \vec{f_n} + x_n\vec{u}.$$

Premier cas . La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. On conclut comme dans (a).
Second cas. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est non bornée. On dispose donc d'une suite extraite $(x_{\phi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ qui tend vers $\pm\infty$, prenons $+\infty$ quitte à considérer $-(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (les sous-espaces vectoriels son stables par passage à l'opposé). Quitte à extraire encore il est loisible de supposer que la suite $(x_{\phi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ ne s'annule pas et on a pour tout $p\in\mathbf{N}$:

$$\frac{\vec{f}_{\phi(p)})}{x_{\phi(p)}} = \frac{\vec{z}_{\phi(p)}}{x_{\phi(p)}} + \vec{u}.$$

La suite $(\vec{z}_{\phi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ étant bornée, puisque convergente,

$$\frac{\vec{f}_{\phi(p)}}{x_{\phi(p)}} \underset{p\to+\infty}{\to} \vec{0}_{\mathbf{E}} + \vec{u} = \vec{u}.$$

Comme $\mathbf{F}$ est fermé on que $\vec{u}\in\mathbf{F}$ donc que $\mathbf{G}$ est inclus dans $\mathbf{F}$ et donc $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ qui vaut $\mathbf{F}$ est fermé. Dans tous les cas $\mathbf{F}$ est fermé.

Cas général Comme $\mathbf{G}$ est de dimension finie, il s'écrit $\mathbf{G} = \mathrm{vect}(\vec{u}_1)+\ldots+\mathrm{vect}(\vec{u}_k)$, où $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k)$ est une famille génératrice de $\mathbf{G}$. On applique alors k fois le résultat précédent : $\mathbf{F}+\mathrm{vect}(\vec{u}_1)$ est fermé, $\mathbf{F}+\mathrm{vect}(\vec{u}_1)+\mathrm{vect}(\vec{u}_2)$ est fermé, $\mathbf{F}+\mathrm{vect}(\vec{u}_1)+\ldots+\mathrm{vect}(\vec{u}_k)$ est fermé.

3. Traité en TD.
4. Déjà traité en partie en cours. En effet, $\mathbf{H}$ est le noyau de la forme linéaire sur $\mathbf{E}$, valeur en 0, c'est donc un hyperplan. On a vu en exercice de colle que $\bar{H}$ est un espace vectoriel, qui contient H. C'est donc soit $\mathbf{H}$, et alors H est fermé soit un espace contenant strictement $\mathbf{H}$, or le cours d'algèbre linéaire (cf. polycopié) affirme que toute droite non incluse dans un hyperplan en est un supplémentaire, donc dans le second cas $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{E}$, autant dire H est dense.

   On a déjà vu (cf. exercices de colles) que lorsque ν est la norme N_∞, $\mathbf{H}$ est fermé tandis que dans le cas $\nu = N_1$, $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{E}$.
5. $\star$ Soit f une application d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ continue.

   (a) Corrigé de deux manières dans le document *Raisonnements classiques en analyse*.

(b) ⋆⋆ Pour toute valeurs maximale y de f, on choisit un antécédent x de y, en lequel f admet un maximum local et grâce à la densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, deux *rationnels* x_n^-, x_n^+ tels que $x_n^- < x < x_n^+$ et pour tout $t \in [x_n^-, x_n^+]$, $f(t) \leq f(x) = y$. On construit ainsi une application f de l'ensemble $\mathcal{M}^+$ des valeurs maximales de f dans $\mathbf{Q}^2$. On laisse le plaisir au lecteur de montrer l'injectivité de cette application et de conclure par la dénombrabilité de $\mathbf{Q}^2$ que $\mathcal{M}^+$ est au plus dénombrable.

En appliquant à $-f$ ce qui précède, on a que l'ensemble des valeurs minimales de f est au plus dénombrable. Au total l'ensemble des valeurs extrémales est au plus dénombrable.

Si f admet en tout point de $[a, b]$ un extremum local alors $f([a, b])$ est par continuité de f un intervalle, dénombrable par ce qui précède, donc un singleton. Donc f est constante.

6. — PROJECTION SUR UN CONVEXE —
7. Vu en TD.
8. ⋆ Vu en TD.
9. ⋆ ⋆ *On garde le cadre de la question précédente.*

Un point a de C est dit extrémal si $C - \{a\}$ est convexe, autrement dit si a n'est pas le milieu de deux points distincts de C.

Montrer que C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (Théorème de Krein-Milman).

En anticipant sur les nécessités de la preuve à venir, nous élargirons le cadre de l'exercice à un convexe d'un espace affine euclidien $\mathbf{E}$ de dimension n. Les résultats de l'exercice 8 demeurent évidement vrais dans ce cadre.

ÉTAPE 1. *Tout point de C est le barycentre à coefficients positifs de deux points de la frontière de* $\mathbf{C}$.

Soit p un point de C et D une droite affine passant par p. L'ensemble $C \cap D$ est convexe fermé comme intersection de deux tels ensembles, et borné car C est borné. L'application

$$\Phi \;:\; \mathbf{R} \to D\,;\; t \mapsto a + t\vec{u},,$$

où $\vec{u}$ est un vecteur directeur unitaire de D, est un homéomorphisme et une isométrie. Notons Ψ l'homéomorphime réciproque de Φ. Donc l'ensemble $\Psi(C \cap D)$ est
— connexe par arcs par continuité de Ψ, donc un intervalle ;
— fermé comme image réciproque du fermé $(C \cap D)$ par l'application continue Φ ;
— borné car Ψ est une isométrie.

Finalement $\Psi(C \cap D)$ est segment de $\mathbf{R}$ et donc $C \cap D$ qui en est l'image par le paramétrqge Φ est un segment porté par D. Notons le $[p_1, p_2]$.

On n'est pas obligé de détailler autant, l'affirmation péremptoire D est homéomorphe à $\mathbf{R}$ devrait suffir à conclure que $C \cap D$ est un segment.

Clairement pour $i = 1, 2$, le point p_i n'est pas intérieur à C, sinon des points de D extérieurs à $[p_1, p_2]$ seraient éléments de C, donc, C étant fermé, il est un point de la frontière de C. Le point a est comme point de ce segment barycentre à coefficients positifs de p_1 et p_2.

Faire un dessin

ÉTAPE 2. *Soit H un hyperplan d'appui de C en un point f de la frontière de C. Alors $C \cap H$ est un convexe fermé borné et ses point extrémaux sont exactement les points extrémaux de C éléments de H.*

L'hyperplan H s'écrit $H = \{m \in \mathbf{E} | \langle m - f | \vec{n}\rangle = 0\}$, avec $\vec{n}$ un vecteur unitaire, on a pour tout $c \in C$ que $\langle c - f | \vec{n}\rangle \leq 0$.

Faire un dessin d'un polyèdre et prendre pour H un plan contenant une face.

L'ensemble $C \cap H$ est un convexe fermé, comme intersection de deux tels ensembles et borné car C l'est.

Tout point extrémal de C inclus dans H est *a fortiori* un point extrémal de $C \cap H$.

Soit e un point extrémal de $C \cap H$. Supposons e milieux de deux points a et b de C. alors

$$0 = \langle e - f | \vec{n}\rangle = \frac{1}{2}\langle a - f | \vec{n}\rangle + \frac{1}{2}\langle b - f | \vec{n}\rangle \leq 0 + 0 = 0$$

Donc nécessairement l'inégalité est une égalité et comme les réels $\langle a - f | \vec{n}\rangle$ et $\langle b - f | \vec{n}\rangle$ sont négatifs ou nuls, ils sont nuls : a et b sont élément de $H \cap C$, donc par définition d'un point extrémal de $H \cap C$, $a = b = e$. Donc e est un point extrémal de C.

ÉTAPE 3. *Dénouement*

Le résultat se prouve par récurence sur n.

• Un convexe fermé borné d'une droite affine est un segment $[a, b]$ (cf raisonnement dans l'étape 1) ; Les points a et b sont extrémaux et tout point de C est barycentre (par définition même d'un segment) de a et b à coefficients positifs. D'où le résultat pour $n = 1$.

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que tout convexe d'un espace affine euclidien de dimension n, fermé et borné, soit l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Soit alors C un convexe compact de $\mathbf{E}$ espace affine euclidien de dimension $n+1$.

  Soit q un point de C. Par la première étape q est barycentre à coefficients positifs de deux points a et a' de la frontière de C. On dispose par 8.(c) d'un hyperplan d'appui H en a. Par l'hypothèse de récurrence pour l'espace euclidien $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ de dimension n, le point a est barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de $C \cap H$, donc par l'étape 2 de points extrémaux de C, notons les $p_1, p_2, ..., p_k$. De même a' est-il barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de de C, notons les $p'_1, p'_2, ..., p'_h$. Donc au total q est barycentre à coefficients positifs des points extrémaux de C, que sont $p_1, p_2, ...p_k, p'_1, ..., p'_h$. Donc q est élément de l'enveloppe convexe de des point extrémaux de C.

  Donc C est inclus dans l'enveloppe convexe de ses point extrémaux et même égal à cette dernière puisque C est convexe.

10. $\star$ Corrigé par Ewen.
11. Vu en TD.
12. Déjà tombé en colle.
13. Déjà tombé en colle.

Indications pour programme de colles n°15

Question 3 $\star\star$.

Soit G un sous groupe compact de $(\mathbf{C}^*, \times)$.

D'abord G est inclus dans le cercle unité $\mathbf{U}$. En effet soit g un élément de G la suite $(g^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeur dans le *groupe* G, donc elle est *bornée* ce qui impose $|g \leq 1|$, puis dans le cas où l'on aurait $|g| < 1$, elle tendrait vers 0 ce qui contredirait le caractère *fermé* de G.

Si G est distinct de $\mathbf{U}$ (qui est un sous-groupe célèbre de $(\mathbf{C}^*, \times)$, alors il est *fini*. En effet, dans le cas contraire on peut construire une suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ injective d'éléments de G. Quitte à extraire, il est loisible de supposer que cette suite converge vers un élément w de G, puis quitte à diviser tous ses termes par w, on peut supposer que $w = 1$. Alors on montre sans mal que G est dense dans $\mathbf{U}$ (cf. sous-groupes dense de $\mathbf{R}$, mais le caractère fermé de G affirme que G est $\mathbf{U}$, ce qui est contradictoire.

Mais alors, dans le cas où G n'est pas $\mathbf{U}$, l'ordre de tout élément de G divise le cardinal, disons n, de G autrement dit $G \subset \mathbf{U}_n$ et , par égalité des cardinaux $G = \mathbf{U}_n$.

Conclusion : G est soit $\mathbf{U}$, qui est bien un groupe, soit le groupe $\mathbf{U}_n$, pour une quelconque valeur de l'entier naturel non nul n.

Remarque.

Si l'on ne veut pas utiliser le théorème de Lagrange on peut procéder comme pour étudier la structure des sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans le cas non dense :

Suposons G fini et non trivial. Alors $G \setminus \{1\}$ est non vide et il est donc possible de choisir l'élément z_0 de cet ensemble fini d'argument minimal, en prenant l'argument d'un complexe dans $[0, 2\pi]$, etc. etc., etc...

Indications pour programme de colles n°17

- Soit un élément k de $\mathbf{Z}^*$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta = 0$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}0\theta}\mathrm{d}\theta = 1$.
- Soit $n \in \mathbf{N}$, Pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$,

$$|S_n(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 = \sum_{\substack{k=0,\dots,n\\ h=0,\dots,n}} a_k \bar{a}_h r^{k+h} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-h)\theta}$$

Compte tenu de 1 et par linéarité de l'intégrale,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_n(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k}.$$

- Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\,\theta}| \leq |a_n| r^n$$

or comme $r < R$ la série numérique $\sum a_n r^n$ converge absolument, donc la série d'applications $\sum a_n r^n \exp(\mathrm{i}n\,\cdot)$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$ de somme $f(\exp(\mathrm{i}\,\cdot))$. Donc par produit, $\left(|S_n(r\exp(\mathrm{i}\,\cdot)|^2\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $|f(\exp(\mathrm{i}\,\cdot))|^2$ sur le *segment* $[0, 2\pi]$ et donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_n(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2 \mathrm{d}\theta \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2 \mathrm{d}\theta.$$

La question précédente assure donc la convergence de la série $\sum |a_n|^2 r^{2n}$ converge et que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Donc pour tout entier $n \geq 0$,

$$(|a_n| r^n)^2 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2 \mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M(r)^2 \mathrm{d}\theta = M(r)^2.$$

Donc pour tout entier $n \geq 0$, $|a_n| r^n \leq M(r)$.

- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et tout $r \in \mathbf{R}$,

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \leq \frac{\|f\|_\infty}{r^n},$$

et en laissant tendre r vers $= \infty$, il vient que $a_n = 0$.
Donc f est constante.

10. ⋆⋆

1. Supposons la série de Taylors nulle à partir du rang 1. Alors f est constante au voisinage de a_0 et quitte à prendre $f - a_0$ en place de f elle est nulle au voisinage a_0.
   Notons alors Z l'ensemble des points u de C tels que f soit nulle au voisinage de u.
   Par construction presque, Z est ouvert. C'est aussi un fermé relativement à C. Soit en effet une suite $(u_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de point de Z et qui convereg vers un élément w de C. La forme intégrale des coefficients de la série de MacLaurin de f en tout point u_p de la suite assure la nullité de celle-ci donc de toute les dérivées de f en u_p, donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, et par continuité de $f^{(n)}$ en w on a la nullité de $f^{(n)}(w)$. Par analycité, f est donc nulle au voisinage de w faisant de w un point de Z.
   Comme C est convexe, donc connexe par arcs $Z = C$ et f est nulle ce qu'exclut l'hypothèse.
   Finalement il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $a_n \neq 0$.
2. On dispose donc, en prenant toujours a_0 nul, de $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tout complexe x tel que $|x[< R$,

$$f(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n X^n.,$$

Notons pour $i = 1, ..., k$, r_i le module et θ_i un argument de a_i. Pour tout réel θ et tout élément r de $\mathbf{R}_+^*$,

$$|f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \geq |r_k r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_k + k\theta)}| - r^k \left(|a_{k+1}|r + ...|a_n|r^{n-k} + ...\right)$$

Prenons $\theta = \frac{\theta_0 - \theta_k}{k}$ de sorte que $\theta_k + k\theta = \theta_0$. Maintenant, pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$,

$$|r_k r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_k + k\theta)}| = r_k r^k$$

Comme $\left(|a_{k+1}|r + ...|a_n|r^{n-k} + ...\right)$ tend vers 0, lorsque r tend vers 0 par valeurs strictement supérieures, pour r suffisamment petit,

$$0 \leq r^k \left(|a_{k+1}|r + ...|a_n|r^{n-k}\right) \leq \frac{1}{2} r_k r^k,$$

et donc pour tout réel strictement positif r suffisamment petit,

$$|f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \geq \frac{1}{2} r_k r^k > 0 = |f(z_0)|.$$

Donc f n'admet pas en z_0 de maximum local.

3. Supposons $f(z_0)$ non nul, donc le module de $|a_0|$, noté r_0 non nul aussi. Pour tout réel θ et tout élément r de $\mathbf{R}_+^*$ suffisamment petit,

$$|f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \leq |a_0 + r_k r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_k + k\theta)}| + r^k \left(|a_{k+1}|r + ...|a_n|r^{n-k} + ...\right)$$

Prenons $\theta = \frac{\theta_0 - \theta_k + \pi}{k}$ de sorte que $\theta_k + k\theta = \theta_0 + \pi$. Maintenant, pour tout $r \in \left]0, \left(\frac{r_0}{r_k}\right)^{\frac{1}{k}}\right[\cap]0, R[$,

$$|a_0 + r_k r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_k + k\theta)}| = |r_0 - r_k r^k| = r_0 - r_k r^k$$

Comme $\left(|a_{k+1}|r + ...|a_n|r^{n-k} + ...\right)$ tend vers 0, lorsque r tend vers 0 par valeurs strictement supérieures, pour r suffisamment petit,

$$0 \leq r^k \left(|a_{k+1}|r + ...|a_n|r^{n-k} + ...\right) \leq \frac{1}{2} r_k r^k$$

Et donc pour tout réel strictement positif r suffisamment petit,

$$|f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \leq r_0 - \frac{1}{2} r_k r^k < r_0 = |a_0| = |f(z_0)|.$$

Donc f n'admet pas en z_0 de minimum local.
Si $f(z_0) = 0$, alors $|f|$ admet évidemment en z_0 un minimum absolu.

Indications pour programme de colles n°21

9.(a) seconde partie.

Soit f un élément de SO($\mathbf{E}$) distinct de l'identité de $\mathbf{E}$. Soit $\vec{k}$ un vecteur dirigeant son axe. L'orthogonal de l'axe est un plan P sur lequel f induit une rotation r. Cette dernière est le produit de deux symétries orthogonales du plan P par rapport à des droites d_1 et d_2 :

$$r = s_{d_2} \circ s_{d_1}$$

Considérons S_{d_i} le retournement de $\mathbf{E}$ par rapport à d_i, pour $i = 1, 2$; notons que S_{d_i} induit sur P, l'endomorphisme s_{d_i}.

- Soit $\vec{u}$ un vecteur de P,
$$S_{d_2} \circ S_{d_1}(\vec{u}) = s_{d_2} \circ s_{d_1}(\vec{u}) = r(\vec{u}) = f(\vec{u}).$$
-
$$S_{d_2} \circ S_{d_1}(\vec{k}) = S_{d_2}(-\vec{k}) = \vec{k} = f(\vec{k}).$$

Comme P et vec($\vec{k}$) sont supplémentaires :

$$S_{d_2} \circ S_{d_1}$$

Donc $\mathcal{R}$ engendre SO($\mathbf{E}$).

10. — Simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ —

Un sous groupe d'un groupe est dit *distingué* s'il est stable par conjugaison par tout élément du groupe. Un groupe est dit *simple* si par définition il n'a d'autres sous-groupes distingués que le sous-groupe trivial et lui-même.

Indications.

Les n-uplets de réels sont notés en colonne et (E_1, E_2, E_3) sera la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Un peu de géométrie.

Supposons l'espace orienté tout élément M de $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ autre que I_n est alors caractérisé par un vecteur K de $\mathbf{R}^n$ dirigeant son axe et, une fois celui ci orienté par Kk, un réel θ, mesure de son angle ; on note r dans la suite, $[K, \theta]$

Soit $M = [K, \pi]$ une matrice de retournement. Pour tout élément Φ de $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$,

$$\Phi M \Phi^{-1} = [\Phi K, \pi]$$

La preuve est simple et se calque sur l'étude d'une « vraie » matrice orthogonale, à savoir :

— appartenance de $\Phi M \Phi^{-1}$ à $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$;
— détermination des vecteurs invariants ;
— détermination du cosinus de l'angle de $\Phi M \Phi^{-1}$ par sa trace, qui ici, dans le cas d'un retournement, donne la mesure de l'angle, sans avoir besoin de la détermination du signe de son sinus, puisque π et $-\pi$ diffèrent de 2π.

Ceci étant comme — et c'est l'objet d'une précédente question — les retournements engendrent $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$, si un sous groupe distingué contient un retournement, alors il les contient tous par conjugaison, et donc est égale à $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ en entier.

Zest de topologie

On a vu que $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ est connexe par arcs, la preuve reposant sur la décompositions des éléments de ce groupe est la plus rapide, celle qui utilise la connexité par arcs de la sphère et la génération de $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ par les réflexions la plus jolie.

On a vu que $\mathrm{O}_3(\mathbf{R})$ est compact on déduit sans mal de la continuité du déterminant que $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ l'est aussi.

Le moteur de la preuve

Soient H un sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ non trivial, A un élément de H distinct de I_3 et l'application

$$\phi \;:\; \mathrm{SO}_3(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}\,;\; M \mapsto \mathrm{Tr}\left(MAM^{-1}A^{-1}\right).$$

Les considérations topologiques précédentes montrent $\phi(\mathrm{SO}_3(\mathbf{R}))$ est un segment, un raisonnement algébrique, que ce segment est de la forme $[\alpha, 3]$, où α est un réel strictement inférieur à 3.

Le dénoument heureux

$1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 3_-$ il est donc loisible de choisir $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\alpha < 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n_0}\right) < 3$$

puis un antécédent M_0 de $1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n_0}\right)$ par ϕ.

La preuve s'achève en remarquant que $(M_0 A M_0^{-1} A^{-1})^{n_0}$ est élément de H....