Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2018

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. On rappelle qu'un nombre entier naturel, au moins égal à 2, est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et lui-même (donc 1 n'est pas premier).

On note $\mathscr{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle aussi que tout entier naturel n, au moins égal à 2, se décompose, de façon unique à l'ordre des facteurs près, comme produit de nombres premiers c'est-à-dire qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $(p_1, p_2, \ldots, p_r) \in \mathscr{P}^r$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que :

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}.$$

Si a et b sont deux entiers naturels tels que $a \leqslant b$, la notation $\displaystyle\sum_{\substack{a \leqslant p \leqslant b \\ p \in \mathscr{P}}} \alpha_p$ désigne la somme des nombres α_p pour tous les entiers **premiers** p de l'intervalle entier $[\![a, b]\!]$. On définit de la même façon $\displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant b \\ p \in \mathscr{P}}} \alpha_p$, $\displaystyle\prod_{\substack{a \leqslant p \leqslant b \\ p \in \mathscr{P}}} \alpha_p$, *etc.*

Par exemple, $\displaystyle\sum_{\substack{4 \leqslant p \leqslant 10 \\ p \in \mathscr{P}}} \alpha_p = \alpha_5 + \alpha_7$, ou $\displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant 8 \\ p \in \mathscr{P}}} \alpha_p = \alpha_2 \times \alpha_3 \times \alpha_5 \times \alpha_7$.

Partie I - Préliminaires

On établit, dans cette partie, quelques résultats préliminaires, indépendants les uns des autres, qui seront utilisés par la suite.

1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction continue, décroissante et positive de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$.

   (a) Montrer que la suite $\left(\gamma_n\right)_{n \geqslant n_0}$ de terme général $\gamma_n = S_n - \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ est monotone et convergente.

   (b) En déduire, l'existence d'un réel, noté C, pour lesquels on a, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$:
   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + C + o(1).$$

   (c) Établir la convergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t}\mathrm{d}t$ et en déduire la convergence de la série $\sum \frac{1}{k\ln^2 k}$.

2. Montrer que la série de terme général $\frac{\ln k}{k(k-1)}$ est convergente.

   On note $K = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k(k-1)}$ *sa somme.*

3. (a) Prouver, pour tout entier naturel n au moins égal à 2, l'inégalité :
   $$\sum_{k=2}^{n} \ln k \geqslant n\ln n - n + 1\,.$$

   (b) En déduire, quand n tend vers $+\infty$, l'estimation : $\ln n! = n\ln n + O(n)$.

4. (a) Soit λ un réel strictement positif. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence et l'unicité d'un réel $x > 0$ tel que $x\ln x - \lambda x = \ln n$. On note r_n cet unique réel.

   (b) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} r_n = +\infty$ puis établir l'équivalence $r_n \sim \frac{\ln n}{\ln\ln n}$.

5. On note, pour toute partie E de $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_n l'ensemble des éléments de E inférieurs ou égaux à n, c'est-à-dire que $E_n = E \cap [\![1, n]\!]$, et l'on pose, pour tout entier naturel n non nul, $d_n(E) = \frac{1}{n}\operatorname{card}\left(E_n\right)$.

   Si la suite $\left(d_n(E)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, on note $d(E)$ sa limite et on dit que la partie E de $\mathbb{N}^*$ admet une densité égale à $d(E)$.

   (a) Montrer que les ensembles suivants possèdent une densité dont on donnera la valeur :

   i. Une partie F finie de $\mathbb{N}^*$.

   ii. L'ensemble $a\mathbb{N}^* := \{ka\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$ des multiples non nuls de l'entier $a \in \mathbb{N}^*$.

iii. L'ensemble $C := \{k^2\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$ des entiers non nuls qui sont des carrés.

(b) Soit E_1, E_2 deux parties **disjointes** de $\mathbb{N}^*$ possédant une densité. Les parties $\mathbb{N}^* \setminus E_1$ et $E_1 \cup E_2$ possèdent-elles une densité ? Et, si oui, que valent-elles ?

(c) L'application d est-elle une probabilité sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ muni de la tribu formée de toutes ses parties ?

6. (a) Justifier, pour tout entier naturel m non nul, l'inégalité : $2\binom{2m+1}{m} \leqslant 2^{2m+1}$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel r non nul, l'entier $\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2r+1\\ p\in\mathscr{P}}} p$ divise l'entier $\binom{2r+1}{r}$ (le produit s'effectuant donc sur tous les entiers **premiers** de $]\!]r+1, 2r+1]\!]$).

(c) Établir, pour tout entier n au moins égal à 2, l'inégalité : $\prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} p \leqslant 4^n$ (le produit s'effectuant donc sur tous les entiers **premiers** au plus égaux à n).

On raisonnera par récurrence forte et, ayant supposé l'inégalité vraie jusqu'au rang n, on examinera, en particulier, le cas où $n+1$ est un entier premier égal à $2r+1$.

On en déduit ainsi l'inégalité : $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \ln p \leqslant n \ln 4$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note, pour tout nombre premier p et tout entier $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$, $v_p(r)$ l'exposant de p dans la décomposition en nombres premiers de r, et on pose $v_p(1) = 0$.

Par exemple, puisque $300 = 2^2\,3\,5^2$, $v_2(300) = 2$, $v_3(300) = 1$, $v_5(300) = 2$ et $v_p(300) = 0$ si $p \notin \{2, 3, 5\}$.

Soit p un nombre premier. On note, pour tout entier naturel k non nul, α_k (resp. β_k) le nombre d'entiers $d \in [\![1, n]\!]$ tels que p^k divise d (resp. tels que $v_p(d) = k$).

Bien sûr, dès que k est assez grand, $\alpha_k = \beta_k = 0$.

(a) Prouver, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\alpha_k = \left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor$.

(b) Justifier l'égalité : $v_p(n!) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\beta_k$.

(c) En déduire, en reliant β_k aux α_i, l'égalité : $v_p(n!) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor$.

(d) En déduire l'encadrement : $\dfrac{n}{p} - 1 \leqslant v_p(n!) \leqslant \dfrac{n}{p-1}$ $\left(= \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p(p-1)}\right)$.

8. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Prouver, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_n A_n.$$

9. Soit $(a_N)_{N\in\mathbb{N}*}$ une suite positive de limite $+\infty$ et $(b_N)_{N\in\mathbb{N}*}$ une suite bornée. Soit $(X_N)_{N\in\mathbb{N}*}$ une suite de variables aléatoires discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$. On suppose que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X_N) = a_N + b_N$ et, quand N tend vers $+\infty$, $\mathbf{Var}(X_N) = O(a_N)$.

   (a) Justifier, pour tout entier N assez grand, l'inclusion entre événements :

$$\Big[\big|X_N - \mathbf{E}(X_N)\big| \leqslant \frac{1}{2}\, a_N^{2/3}\Big] \subset \Big[\big|X_N - a_N\big| \leqslant a_N^{2/3}\Big].$$

   (b) En déduire que

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(\big|X_N - a_N\big| > a_N^{2/3}\right) = 0.$$

Partie II - Deux résultats asymptotiques

1. (a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\ln n! = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} v_p(n!) \ln p$.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement :

$$\frac{\ln n!}{n} - K \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p} \leqslant \frac{\ln n!}{n} + \ln 4\,,$$

   où le réel K est défini dans la question **I** -2).

   (c) Conclure, quand l'entier n tend vers $+\infty$, à l'évaluation asymptotique

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1).$$

2. On note χ l'application qui, à chaque entier $k \in \mathbb{N}^*$, associe 1 si k est premier (*i.e.* $k \in \mathscr{P}$) et 0 sinon.

   (a) En posant, pour tout pour tout entier naturel k non nul, $a_k = \chi(k)\,\dfrac{\ln k}{k}$, $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$, en utilisant **I** - 8), établir, pour tout $n \geqslant 2$, l'égalité :

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)}\, A_k + \frac{A_n}{\ln n}\cdot$$

   (b) Établir, quand l'entier k tend vers $+\infty$, l'égalité : $\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln k\ln(k+1)}\, A_k = \dfrac{1}{k\ln k} + O\Big(\dfrac{1}{k\ln^2 k}\Big)$.

   (c) En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'égalité :

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} = \ln\ln n + O(1).$$

Partie III

On note, pour tout entier naturel n non nul, $\omega(n)$ le nombre d'entiers **premiers** distincts qui divisent l'entier n. On a donc $\omega(2^5) = 1$, $\omega(2^2.5^3) = 2$, $\omega(2.5^2.11^5) = 3$, *etc.*

L'objet de la suite du problème est le contrôle asymptotique, en un certain sens, de la suite $\big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, dont la décomposition en nombres premiers est $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$.

   On a donc $\omega(n) = r$.

   Prouver l'inégalité : $\omega(n) = r \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln 2}$.

   (b) À l'aide de **I** -4) prouver la domination $\omega(n) = O\Big(\dfrac{\ln n}{\ln\ln n}\Big)$.

   On observera que $n \geqslant 2\prod_{k=1}^{r-1}(2k+1)$ puis on prouvera, pour un réel λ qu'on déterminera, l'inégalité : $\ln n \geqslant (r-1)\ln(r-1) - \lambda(r-1)$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble $[\![1,N]\!]$ de la probabilité uniforme, et, pour tout $r \in [\![1,N]\!]$, on note $X_{N,r}$ la variable aléatoire suivante :

$$X_{N,r} : \begin{array}{ccc} [\![1,N]\!] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ d & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } r \text{ divise } d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array},$$

   et note $X_N = \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} X_{N,p}$ (on effectue donc la somme sur tous les entiers p **premiers** de $[\![1,N]\!]$).

   On a donc, pour tout $n \in [\![1,N]\!]$, $X_N(n) = \omega(n)$.

   On note $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{Var}(Y)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y sur l'espace précédent (elles dépendent, bien sûr, de l'entier N).

   (a) Vérifier, pour tout $r \in [\![1,N]\!]$, l'égalité : $\mathbf{E}(X_{N,r}) = \dfrac{1}{N}\Big\lfloor\dfrac{N}{r}\Big\rfloor$.

   (b) Prouver l'égalité : $\mathbf{E}(X_N^2) = \mathbf{E}(X_N) + \sum_{\substack{1\leqslant p,q\leqslant N\\ (p,q)\in\mathscr{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \dfrac{1}{N}\Big\lfloor\dfrac{N}{pq}\Big\rfloor$.

   (c) En déduire, quand l'entier N tend vers $+\infty$, l'ordre de grandeur : $\mathbf{Var}(X_N) = O(\ln\ln N)$.

   (d) En déduire, à l'aide d'un résultat de la **partie I**, le résultat :

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\operatorname{card}\Big\{n\in[\![1,N]\!]\,;\,\big|\omega(n)-\ln\ln N\big| > \big(\ln\ln N\big)^{2/3}\Big\} = 0.$$

   Ainsi, en examinant le cas où $N = 10^{99}$, on peut s'attendre à ce que, « le plus souvent », un entier d'au plus 100 chiffres, possède entre 3 et 8 facteurs premiers distincts. Étonnant non ?