DM n$^{\mathrm{o}}$10

EXERCICE

Nous allons nous intéresser à l'équation de Mathieu, qui modélise un oscillateur dont la pulsation varie faiblement et périodiquement, par exemple un pendule dans un régime de petites oscillations dont la longueur de la corde subit de faibles variations périodiques, l'inconnue y dans l'équation représente alors la longueur de la corde multipliée par l'éart angulaire avec la verticale.

Soit l'équation différentielle :

$$y'' + (1 + \gamma\, q)\, y = 0, \tag{1}$$

où q est une fonction continue réelle de période τ, γ un réel > 0. On pose $k = |q|$, et on note Q et K les fonctions définies par :

$$Q(t) = \int_0^t q(s)\, \mathrm{d}\, s,\ K(t) = \int_0^t k(s)\, \mathrm{d}\, s,$$

pour tout réel t.

Soit α et β des réels, on s'intéresse à la solution de (1) satisfaisant à la condition initiale :

$$y(0) = \alpha\ ,\ y'(0) = \beta.$$

Dans un premier temps, l'idée et de considérer γ petit et de s'intéresser à la solution du problème de Cauchy

$$y +\ \ y = 0,\ y(0) = \alpha\ ,\ y'(0) = \beta.$$

Puis nous chercherons la solution du problème initial sous la forme $f_0 + \gamma\, g_1$, ce qui conduit à g_1 solution du problème de Cauchy

$$y'' + (1 + \gamma\, q)\, y = -q\, f_0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Pour simplifier nous considérerons la solution f_1 du problème de Cauchy :

$$y'' + y = -q\, f_0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Puis nous chercherons g_1 sous la forme $g_1 = f_1 + \gamma g_2$, c'est-à-dire que nous cherchons la solution du problème initiale sous la forme $f_0 + \gamma\, f_1 + \gamma^2\, g_2$ .L'application g_2 est alors solution du problème de Cauchy :

$$y'' + (1 + \gamma\, q)\, y = -q\, f_1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Le jeux peut continuer longtemps ! Nous allons obtenir ainsi une suite de solutions approchées, l'erreur commise pour le terme d'indice n étant d'ordre n en la perturbation γ. Mathématiquement on montre dans ce qui suit la convergence de cette suite vers la solution du problème, ce qui est formellement instantané.

1. Soit g une fonction continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{C}$. Montrer que toute solution sur $\mathbf{R}_+$ de

$$y'' + y = g$$

est de la forme :

$$f\ : t \mapsto f(0)\cos t + f'(0)\sin t + \int_0^t \phi(t-s)\,\psi(s)\,\mathrm{d}\,s,$$

où ϕ et ψ sont des applications à préciser.

2. On considère la suite d'applications de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{C}$, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par :

$$f_0'' + f_0 = 0\,;\, f_0(0) = \alpha, \quad f_0'(0) = \beta,$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$f_n'' + f_n = -q\, f_{n-1}\,;\, f_n(0) = 0,\ f_n'(0) = 0.$$

(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et tout t élément de $\mathbf{R}_+$ on a :

$$|f_n(t)| \leq \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{K^n(t)}{n\,!}.$$

En déduire que pour tout t élément de $\mathbf{R}_+$, la série entière de la variable complexe z, $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(t)\, z^n$ a un rayon de convergence infini.

(b) Montrer que la fonction f définie par :

$$f\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\,\gamma^n$$

est l'unique solution sur $\mathbf{R}_+$ du problème de Cauchy :

$$y + (1+\gamma\, q)\, y = 0,\ y(0) = \alpha\,,\ \ y'(0) = \beta.$$

PROBLÈME

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ indéfiniment dérivables et telles que pour tout m et tout n, entiers naturels, $x^n f^{(m)}(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel, fait évident que l'on ne demande pas de vérifier.

Pour toute application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, nous noterons $\check{f}$, l'application $\mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\ x \mapsto f(-x)$

1– Soit $f \in \mathcal{S}$. Montrer que pour tout réel p, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto f(x)\exp(-i2\pi px)$ est intégrable.

On note dans la suite pour tout réel p, $\hat{f}(p)$ la quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-i2\pi px)\mathrm{d}x$ et l'application

$$\hat{f}\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\ p \mapsto \hat{f}(p)$$

s'appelle transformée de Fourier de f. Cette transformation a été introduite par Fourier dans l'étude de la propagation de la chaleur dans une barre de longueur infinie.

2– Montrer que $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ [1]. On précisera en particulier l'expression de $(\hat{f})^{(n)}$ pour tout entier naturel n.

3– Formule d'inversion pour une application $\mathcal{C}^\infty$ à support inclus dans un segment

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et nulle en dehors d'un segment [2] de la forme $[-A, A]$, $A \in \mathbf{R}_+^*$; f est donc en particulier élément de $\mathcal{S}$.

Pour tout élément T de $\mathbf{R}_+^*$ on considère l'application

$$F_T\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\ x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+kT),$$

(la somme définissant $F_T(x)$ ne contient en fait pour tout x, qu'un nombre fini de termes non nuls.)

a) Montrer que pour tout réel $T > 0$, F_T est T-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Déterminer pour tout entier q le coefficient de Fourier (voir DM 7) c_q de F_T d'ordre q, au moyen de la transformée de Fourier de f.

c) Montrer en utilisant le DM 7 . que pour tout réel x,

$$F_T(x) = \frac{1}{T}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{q}{T}\right)\exp\left(i\frac{q2\pi x}{T}\right).$$

d) Soit B un réel strictement positif. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{B}{n}\sum_{q=-n}^{n-1} \hat{f}\left(q\frac{B}{n}\right)\exp\left(i\frac{q2\pi Bx}{n}\right).$$

admet une limite à préciser.

e) Déduire de la précédente question la formule dite d'*inversion de Fourier*,

$$\hat{\hat{f}} = \check{f}$$

4– Règle d'échantillonage de Shanonn

Soit f un élément de $\mathcal{S}$, on note g sa transformée de Fourier. On suppose que g est nulle en dehors d'un segment de la forme $[-F, F]$, avec $F \in \mathbf{R}_+^*$, on dit que le spectre de f est à bande passante de fréquence F. Etant donné par ailleurs un réel $F_e > 0$ on pose pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f_n = f\left(\frac{n}{F_e}\right)$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est appelé d'échantillonage de f à la fréquence F_e.

---

1. Il s'agit en fait d'un isomorphisme, mais nous ne démontrerons pas ce fait.
2. On admet pour le moment l'existence de telles applications, la preuve de ce fait est rejetée en fin de sujet.

Nous nous proposons de montrer que si $F_e \geq 2F$, f est alors entièrement déterminée par son échantillon.

a) Montrer qu'il existe bien une telle application f.

b) On note en accord avec 3–, $G_{F_e} := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(kF_e + \cdot)$. Montrer que

$$G_{F_e} = \frac{1}{F_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{-n} \exp\left(\frac{in2\pi}{F_e} \cdot\right).$$

c) On suppose jusqu'à la fin que $F_e \geq 2F$. Et l'on note χ l'application caractéristique définie sur $\mathbf{R}$ de $\left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}\right]$. Montrer que $\chi G_{F_e} = g$.

d) Calculer la transformée de Fourier de χ. En déduire que pour tout réel x,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \frac{\sin\left(\left(\frac{n}{F_e} - x\right)\pi F_e\right)}{\left(\frac{n}{F_e} - x\right)\pi F_e}.$$

Ainsi f est-elle entièrement déterminer pas son échantillonage. Dans la pratique on transforme les signaux réels en signaux à bande passante de fréquence F, par l'utilisation d'un filtre analogique, on peut ensuite échantilloner à une fréquence au moins égale au double de F.

5–

a) Soit φ une application continue d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbf{C}$ telle que pour tout entier n, $\int_a^b \varphi(t)t^n \mathrm{d}t = 0$. Montrer que φ est nulle.

b) Soit f un élément de $\mathcal{S}$. En particulier pour tout entier n, $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable. On suppose que pour tout entier n, $\int_a^b f(t)t^n \mathrm{d}t = 0$.

A-t-on nécessairement f nulle ?

6– Existence d'applications indéfiniment dérivables à support inclus dans un segment

a) Soit l'application

$$g \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$.

b) Soit $[a, b]$ un segement non réduit à un point. Montrer qu'il existe une application h de classe $\mathcal{C}^\infty$, nulle en dehors du segment $[a, b]$.