Programme de colles n°1

1 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

— Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
— Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
— Formes linéaires, hyperplans .
— Matrices :
  — matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme. Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang ;
  — opérations sur les lignes et colonnes ; pivot de Gauss, point de vue matricielle, application au calcul du rang, à la détermination d'une base de l'image et du noyau.
— *Semaine prochaine diagonalisation, trigonalisation, (point de vue géométrique et pratique) et révisions de probabilités de sup.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Lucas MONTRÉER, Alexandre TOUX.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

2 Questions de cours

1. Théorème du rang : l'image d'une application linéaire est isomorphe à un supplémentaire du noyau, application si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ sont des supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel alors ils sont isomorphes (pp. 39–40).
2. Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle, unique à multiplication près par un scalaire non nul. (I.5.10), (preuve algébrique cette semaine).
3. Polynômes d'interpolation : existence unicité puis expression (pp. 42–43).

3 Récitation d'exercices

1. Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ montrer l'équivalence des deux propositions
   (a) Pour tout A et tout B éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\ell(AB) = \ell(BA)$;
   (b) Il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $\ell = k\mathrm{tr}$.
2. Montrer que des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
3. — Théorème d'Hadamard —

   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, tel que pour $i = 1, 2, \dots, n$
   $$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1,\dots,n,\\ j\neq i,}} |a_{i,j}|.$$
   Montrer que A est inversible.

4. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ tel que pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, $(\vec{x}, u(\vec{x})$ soit lié. Montrer que u est une homothétie. En déduire le centre de $\mathrm{GL}(\mathbf{E})$.
5. Soient les matrices suivantes, éléments de $\mathcal{M}(\mathbf{R})$:

6. Les éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ suivants sont-ils semblables ?

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. (cf. DM. de rentrée.) Soient n un élément de $\mathbf{N}^*$ et M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ nilpotent d'ordre r.
   (a) Montrer que $r \leq n$
   (b) $\star$ On suppose que $r = n$. Montrer que le commutant de M est $\mathbf{R}([M])$, ensemble des polynômes en M.
8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Étudier le rang de $\text{com}(M)$ en fonction de celui de M. Déterminer $\det(\text{com}(M))$ et $\text{com}(\text{com}(M))$.
   $\star$ Retrouver ces résultats par densité algébrique sans discuter sur le rang de M.
9. Soit n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble E, défini par

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), AMA = 0_n\},$$

   est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont on précisera la dimension en fonction du rang de A.
10. Soient n et p des éléments de $\mathbf{N}^*$, A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et B de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$. Montrer que :

$$p + \text{rg}(I_n + AB) = n + \text{rg}(I_p + BA).$$

11. $\star\star$ Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on note

$$P_{A,B} \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ \lambda \mapsto \det(B + \lambda A).$$

   (a) Montrer que pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $P_{A,B}$ est une application polynomiale.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\text{rg}(A) = \max\{\deg P_{A,B} | B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\}$.
   (c) Montrer qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang.
12. $\star\star$ — Théorème de Frobenius-Zolotarev — Soit f une application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ *continue* telle que :
   i. $f(I_n) = 1$;
   ii. pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$.
   Montrer qu'il existe une application g de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ continue vérifiant $g(1) = 1$ et $g(ab) = g(a)g(b)$ pour tout couple (a, b) de complexes, telle que :

$$f = g \circ \det.$$

13. $\star\star$ Soit $\mathbf{E}$ un espace de dimension finie. Montrer que les seuls idéaux bilatères[1] de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ sont $\{O_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}\}$ et $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.
   Le résultat demeure-t-il si l'on ne suppose plus $\mathbf{E}$ de dimension finie ?

1. Un idéal bilatère est un sous-groupe stable par multiplication à gauche et à droite par un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.

INDICATIONS

Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on note

$$P_{A,B} \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\; \lambda \mapsto \det(B + \lambda A).$$

1. Montrer que pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $P_{A,B}$ est une application polynomiale.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \max\{\deg P_{A,B} | B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\}$.
3. Montrer qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang.

Solution.

1. Soit (A, B) un couple d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. L'application $P_{A,B}$ est l'application *polynomiale* associée au polynôme :
$$\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (b_{i,\sigma(i)} + a_{i,\sigma(i)} X). \tag{1}$$
Notons $D_A := \max\{\deg P_{A,B} | B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\}$
2. Soi r le rang de A. On dispose d'éléments P et Q de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tels que $A = PJ_rQ^{-1}$. Pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on a :
$$\begin{aligned}\deg(P_{A,B}) =& \deg\left(\det P \det(P^{-1}BQ + XJ_r)) \det Q^{-1}\right) = \deg\left(\det(P^{-1}BQ + XJ_r)\right) = \\ & \deg\left(P_{J_r, P^{-1}BQ}\right),\end{aligned}$$
en s'autorisant de calculer des déterminants dans le corps $\mathbf{R}(X)$. Mais l'application
$$\Phi_{P,Q} \;:\; \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\; M \mapsto, P^{-1}BQ$$
est une bijection (de bijection réciproque $\Phi_{P^{-1}Q^{-1}}$) donc
$$\max\{\deg P_{J_r, P^{-1}BQ} | B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\} = \max\{\deg P_{J_r, B'} | B' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\} = D_{J_r}.$$
Or J_r a r et seulement r termes non nuls, donc pour tout élément σ de S_n et tout $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,
$$\deg\left(\prod_{i=1}^{n} (b'_{i,\sigma(i)} + (J_r)[i, \sigma(i)]X)\right) \le r,$$
puisque les polynômes dans le produit sont de degré 1 ou 0 et qu'au mieux r d'entre eux ne sont pas nuls. Donc en adaptant la formule (1), on a :
$$\deg(P_{J_r, B'}) \le r.$$
Mais en posant $K_r = \mathrm{diag}(O_r, I_{n-r})$ on a :
$$\deg(P_{J_r, K_r}) = \deg\Big(\det\big(\mathrm{diag}(X, ..., X, 1, ..., 1)\big)\Big) = \deg(X^r) = r.$$
Donc $D_A = D_{J_r} = r$.
3. Soit Φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui conserve le déterminant.
D'abord :
$$\deg(\det(\Phi(C) + X\Phi(A))) = \deg(\det(\Phi(C + XA))) = \deg(\det((C + XA)).$$
Donc
$$\begin{aligned}\{\deg P_{A,C} | C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\} =& \{\deg P_{\Phi(A),\Phi(C)} | C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\} = \\ & \{\deg P_{\Phi(A),B} | B \in \Phi(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))\} \subset \{\deg P_{\Phi(A),B} | B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\},\end{aligned} \tag{2}$$
puisque en effet, *a priori*, $\Phi(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et donc
$$\mathrm{rg}(A) = \max(\deg P_{A,C} | C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})) \le \max\left(\deg P_{\Phi(A),B} | B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\}\right) = \mathrm{rg}(\Phi(A), \tag{3}$$
Mais alors si A_0 est dans le noyau $\mathrm{rg}(\Phi(A_0) = 0$ et par (3), $A_0 = 0_n$. Donc Φ est injective et donc surjective en tant qu'endomorphisme en dimension finie.
Donc l'inclusion dans (2) est une égalité et donc l'inégalité dans (3) est une égalité, on a montré :
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\Phi(A)).$$

Programme de colles n°2 prévisionnel

4 Révivions de probabilités de sup.

— Probabilités sur un ensemble fini.
— Variables aléatoires.

5 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

— Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, base canonique de l'ensemble des applications polynômiales à p variables, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
— Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
— Formes linéaires, hyperplans.
— Matrices :
  — Matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme. Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
  — Matrices de transvexions, de permutations, de dilatation ; opérations sur les lignes et colonnes ; pivot de Gauss, application au calcul du rang, à la détermination d'une base de l'image et du noyau.
— Diagonalisation. (*il s'agit d'une première approche géométrique axée sur la pratique, les applications le polynôme caractéristique. Un prochain chapitre traitera des polynômes d'endomorphismes et des questions subtiles de réduction*)
  On désigne u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, d'ordre de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
  — Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres : les espaces propres sont en sommes directes. Espaces propres de deux endomorphismes qui commutent.
  — Polynôme caractéristique (définitions, coefficients remarquables), polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
  — Diagonalisation des matrices et des endomorphismes. Définition. l'endomorphisme u diagonalisable si et seulement si $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathbf{E}_k = \mathbf{E}$. La dimension d'un espace propre est inférieur à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée. l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et $m_i = \dim(\mathbf{E}_i)$, pour $i = 1 \ldots k$.
— *A venir : révisions sur les déterminants, trigonalisation, ...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

6 Questions de cours

1. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont indépendants.
2. Polynôme caractéristique : polynomialité et coefficients remarquables.
3. $\star\star$ Déterminant par blocs (prop. 3.2.5.).

7 Exercices

1. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension n non nulle. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $N_n = \mathrm{Ker}(f^n)$ et $I_n = \mathrm{Im} f^n$.

(a) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que :

$$N_1 \subsetneqq N_2 \subsetneq \ldots\ldots \subsetneq N_{n_0} = N_{n_0+1} = \ldots. = N_n = \ldots\ldots$$
$$I_1 \supsetneqq I_2 \supsetneq \ldots\ldots \supsetneq I_{n_0} = I_{n_0+1} = \ldots. = I_n = \ldots\ldots$$

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $I_n = I_{n+1}$ si et seulement si $I_n + N_n = I_n \oplus N_n$, (cf. TD 1).

(c) $\star\star$ Montrer que la suite $(\dim(\ker(u^{k+1}) - \dim(\ker(u^k))_{k \in \mathbf{N}}$ décroît.

2. Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, par densité algébrique, puis en utilsant l'équivalence de A à $J_{\mathrm{rg}(A)}$.
3. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
4. Déterminer les couples d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, (φ, ψ) tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi' = 6\varphi + 4\psi, \\ \psi' = 11\varphi - \psi, \end{array} \right. , \tag{4}$$

5. Soit V une variable aléatoire définie sur un univers (fini) Ω, à valeurs dans $\{0, ..., n\}$.
Montrer que l'espérance de X est donnée par la formule

$$\mathrm{E}(V) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(V \geq i).$$

Soient X et Y des variables alatoires définies sur Ω, indépendantes et qui suivent la loi uniforme sur $\{0, ..., n\}$. Calculer $\mathrm{E}(\min(X, Y))$.

6. Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et A et B des événements. Déterminer le produit $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$, puis en utilisant l'inégalité de Cauchy & Schwarz, montrer que $|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$.
7. Les éléments de $\mathbf{R}^n$ sont notés en colonne et $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Pour toute permutation σ élément de S_n, on note on désigne par P_σ la matrice de permutation associée. On pose :

$$P := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} P_\sigma.$$

(a) Montrer que l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à P est une projection orthogonale dont on déterminera l'image et le noyau.

(b) On munit S_n d'une probabilité uniforme et l'on désigne par X la variable aléatoire qui à σ élément de S_n associe le nombre de points fixes de σ. Calculer l'espérance de X.

8. $\star$ Déterminer les formes linéaires ℓ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ constantes sur les classes de similitude.
9. $\star$ Soir une suite de variables aléatoires de Rademacher $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ mutuellement indépendantes et toute définies sur un même espace probabilisé. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et l'on désigne par S_0 une variable aléatoire qui prend la valeur 0 avec la probabilité 1.

(a) Montrer que la série $\sum \mathbf{P}(S_{2p} = 0)$ diverge.

(b) Soit la variable aléatoire R à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, définie par :

$$R = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{S_n = 0},$$

(c) Montrer que $\mathbf{P}(R = +\infty) = 1$. Interpréter.

10. $\star$ Forme de Jordan
Notons pour tout entier $k \geq 2$, J_k l'élément de $\mathcal{M}_k(\mathbf{C})$ qui n'a que des 1 sur la sous-diagonale et des zéros partout ailleurs. et convenons que $J_1 = O_1$.
Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, nilpotent d'ordre p.

(a) On suppose que $p = 2$. Montrer que M est semblable à $\mathrm{diag}(\underbrace{J_2, J_2, \ldots..J_2}_{r \text{ termes}}, 0_{n-2r})$, où $r = \mathrm{rg}(M)$

(b) $\star\star$ Montrer dans le cas général que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u. En déduire qu'il existe un entier naturel $k \geq 1$, un élément $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ de $(\mathbf{N}^*)^k$ vérifiant : $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_k$, et $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$, tel que M soit semblable à la matrice $\mathrm{diag}(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, ..., J_{\alpha_k})$.

(c) $\star\star$ Soit un entier $n \geq 1$ Déterminer k maximal tel qu'il existe $E_1, E_2, ..., E_k$ parties de $\{1, ..., n\}$ vérifiant

  i. le cardinal de E_i est impair pour $i = 1, ...n$;

  ii. le cardinal de $E_i \cap E_j$ est pair pour tout couple d'éléments distincts de $\{1, ..., n\}$.

Programme de colles n°3,

8 Révivions de sup.

— Déterminants, applications et calculs

9 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

- Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, base canonique de l'ensemble des applications polynômiales à p variables, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
- Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
- Formes linéaires, hyperplans.
- Matrices : Voir programme précédent.
- Diagonalisation. On désigne u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, d'ordre de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
  - Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres : les espaces propres sont en sommes directes. Espaces propres de deux endomorphismes qui commutent.
  - Polynôme caractéristique (définitions, coefficients remarquables), polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
  - Diagonalisation des matrices et des endomorphismes. Définition. l'endomorphisme u diagonalisable si et seulement si $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbf{E}_k = \mathbf{E}$. La dimension d'un espace propre est inférieur à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée. l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et $m_i = \dim(\mathbf{E}_i)$, pour $i = 1 \ldots k$.
  - Trigonalisation, un endomorphisme ou une matrice est trigonalisable si et seulement si leur polynôme caractéristique est scindé. Application à la résolution de systèmes différentiels et de systèmes de relations de récurrences linéaires.
  - Matrices nilpotentes, définition, une matrice est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable à valeurs propres nulles.
  - *A venir : espace vectoriels normés...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

10 Questions de cours

1. Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ d'un espace vectoriel de dimension fini est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{K}$. Au choix du colleur, l'hérédité se fera par les endomorphismes ou par les matrices en blocs.
2. $\star$ Remplacer trigonalisable par orthotrigonalisable
3. Expression du déterminant de Vandermonde. On établira la formule par la méthode des combinaisons virtuelles.

11 Exercices

1. On admet que tout endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable.

(a) Montrer que si des endmorphismes u et v d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ diagonalisables, commutent, alors il existe une base $\mathcal{B}$ donc chaque vecteur est vecteur propre à la fois de u et de v, (on dit que u et v sont codiagonalisables).

(b) Soit une famille $(u_i)_{i\in I}$ (finie ou non) d'endomorphismes diagonalisables de $\mathbf{E}$ qui commutent deux à deux, montrer que les u_i sont codiagonalisables.

2. Soit A un élément diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Soit B l'élément de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$: $B = \begin{pmatrix} A & 3A \\ 3A & A \end{pmatrix}$.

   (5/2) Montrer la réciproque.

3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Motrer que $\mathbf{C}(A)$, commutant de M, est un espace vectoriel.
   On suppose dans la suite que A a n valeurs propres deux à deux distinctes.

   (a) Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et A commutent si et seulement si M est un polynôme en A.

   (b) Quelle est la dimension de $C(A)$?

   (c) $\star$ Pour A diagonalisable à valeurs propres non toutes distinctes donner la dimension de $C(A)$ en fonction des multiplicités des valeurs propres.

4. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. Dans le cas où son polynôme caractéristique est scindé, montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si ses valeurs propres sont simples.

5. $\star$ Déterminer le commutant d'une matrice compagnon C (raisonner avec une sous-diagonale de 1).

6. Déterminer les valeurs propres de la matrice L suivante. Est-elle diagonalisable ?

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Même question pour l'élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, dont tous les coefficients diagonaux valent a et tous les autres b.

7. Soient n un entier strictement positif et M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pour $n = 2$, montrer que pour tout réel strictement positif ε, il existe une matrice triangulaire supérieure $(t_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$, semblable à M, telle que pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$, $|t_{i,j}| \leq \varepsilon$.

   $\star$ Montrer le résultat pour n quelconque.

8. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathrm{tr}A^k = 0$. Montrer que A est nilpotente.

9. $\star$ Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $a_{i,i} = 0$ pour $i = 1, 2, ...n$ et $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$ pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1, ...n\}$. Montrer que si n est pair, alors A est inversible.
   On dispose de $2n+1$ cailloux . On suppose que chaque sous-ensemble de $2n$ cailloux peut se partager en deux paquets de même masse de n cailloux. Montrer que tous les cailloux on la même masse.

10. $\star$

   (a) Soient z_1, z_2,...,z_n des nombres complexes, et P le polynôme

$$P = (X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n)$$

   On suppose que P est à coefficients entier. Soit un entier $q \geq 2$. Montrer que

$$Q = (X - z_1^q)(X - z_2^q)\dots(X - z_n^q)$$

   est à coefficients entiers.

   (b) $\star\star$ — THÉORÈME DE KRONECKER — Montrer que si P est un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ dont les racines complexes sont toutes de module inférieur ou égal à 1 tel que $P(0) \neq 0$, alors toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

11. $\star\star$ Soit ϕ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui envoie $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ dans lui-même.

   (a) Donner deux exemples de tels endomorphismes. Montrer qu'ils préservent le rang.

   (b) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\phi(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

   (c) Montrer que $\mathrm{rg}(\phi(M)) \geq \mathrm{rg}(M)$.
   Indication : Montrer que si le rang de M est $r < n$, alors il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $Q - \lambda M$ soit non inversible pour exactement r valeurs de λ.

   (d) Montrer que ϕ conserve le rang.

Programme de colles n°4

12 Algèbre linéaire : révision de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

— Programme de la semaine précédente.

13 Espaces vectoriels normés

Il s'agit d'un premier contact...

— Définition de norme, espace vectoriel normé, distance à une partie non vide.

— Ouverts, fermés, intérieur, adhérence. Ouverts et fermés relativement à une partie.

— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé, convergence d'une suite à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés. Caractérisation de l'adhérence par les suites, caractérisation des fermés et des fermés relatifs par les suites.

— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.

— *A venir : limite des applications...*
La compacité et la connexité par arcs seront traités plus tard.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

14 Questions de cours

1. Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n., X un ensemble non vide. Montrer que $N_\infty : \mathcal{B}(X, \mathbf{E}) \to \mathbf{R}\,;\ f \mapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ est une norme.
2. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
3. Caractérisation de l'adhérence par les suites. Caractérisation d'un fermé par les suites.

15 Récitation d'exercices

1. Soient f et g des endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, tels que :
$$f \circ g - g \circ f = f.$$
Montrer que f est nilpotent.
2. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ des n-uplet de réels positifs. Soient p et q des réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On admet que pour tout a et tout b réels positifs,
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ (inégalité de Young).}$$
   (a) Montrer que :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
   Que dire du cas $p = q = 2$?

   (b) Montrer que, n_p est une norme sur $\mathbf{K}^n$.

3. On note $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$. Soit un réel $p>1$. On admet que n_p est une norme sur $\mathbf{R}^n$. En déduire que
$$N_p \ :\ \mathbf{E}\to\mathbf{R}_+\ ;\ f\mapsto\left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
est une norme sur $\mathbf{E}$.
4. Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$, $N_p(f)\underset{n\to+\infty}{\to}N_\infty(f)$.
Ou version $\star$
Soient ϕ et f des applications de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ continues. On supose ϕ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et f à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. On pose pour tout entier $n\geq 0$, $I_n=\int_{[a,b]}\phi f^n$.
   (a) Montrer que le suite $(\sqrt[n]{I_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.
   (b) Montrer que le suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.
5. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, norme qui à une matrice associe la somme des valeurs absolues de ses coefficients. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert dense.
6. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que l'ensemble D_n des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisables est dense. Est il-ouvert ? fermé ?
7. Soit G un sous-groupe de $\mathbf{R}$ non trivial. Montrer que, soit il est de la forme $k\mathbf{Z}$, avec k élément de $\mathbf{R}_+^*$, soit il est dense dans $(\mathbf{R},|\cdot|)$ (on discutera sur la valeur de $\inf(G\cap\mathbf{R}_+^*)$).
8. $\star$ Soit $\mathbf{E}$ l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continues, muni de la norme N_1 (resp. N_∞). Soit F l'ensemble des éléments de $\mathbf{E}$ qui prennent en 0 la valeur 1. Quelle est l'intérieur de F ? Quelle est l'adhérence de F ? *L'étudiant fera de jolies figures claires et en couleur.*
9. Soit $(\mathbf{E},\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que tout sous-espace vectoriel propre de $\mathbf{E}$ est d'intérieur vide. Montrer que l'adhérence d'un sous espace vectoriel est un sous espace vectoriel.
10. $\star$ On munit ℓ^∞ ensemble des suites réelles bornées de la norme N_∞. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites réelles ultimement nulles (polynômes). Déterminer l'adhérence de $\mathcal{P}$.
11. $\star$ Soit A une matrice stochastique d'ordre n, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficient strictements positifs et tel que la somme des coefficients de n'importe quelle colonne fasse 1 :
   (a) Montrer que $1\in\mathrm{sp}(A)$ et $\mathrm{sp}(A)$ est inclus dans le disque fermé unité de $\mathbf{C}$.
   (b) Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda|\leq 1$.
   (c) Montrer qu'il existe un élément U de $\mathrm{E}_1(A)$ dont toutes les composantes sont strictement positives. On pourra, pour pour ${}^{\mathrm{t}}(x_1,...,x_n)$ vecteur propre associé à une valeur propre de module 1, considérer ${}^{\mathrm{t}}(|x_1|,|x_2|,...,|x_n|)$.
   (d) Montrer que tout élément V de $\mathrm{E}_1(A)$ dont toutes les composantes sont strictement positives est colinéaire à U.
   Indication : choisir λ tel que $U-\lambda V$ ait tous ses coefficients positifs et un au moins nul.
12. $\star\star$ Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie ; on désignera par $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{E}$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses de $\mathbf{E}$. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}U_n$ est dense. Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fermés de $\mathbf{E}$ telle que $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}F_n=\mathbf{E}$. Montrer que $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}\overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense.
13. $\star\star$ Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues, qui converge simplement vers une application f.
   (a) Soit ε un élément de $\mathbf{R}_+^*$. Pour tout entier nnaturel n, on pose :
   $$F_{n,\varepsilon}:=\{\ x\in\mathbf{E}|\forall p\in\mathbf{N},(p\geq n)\Rightarrow(\|f_n(x)-f_p(x)\|\leq\varepsilon)\}$$
   et
   $$\Omega_\varepsilon:=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}.$$
   Montrer que Ω_ε est un ouvert dense.
   (b) Montrer que tout élément a de Ω_ε, admet un voisinage V tel que pour tout élément x de V, $\|f(x)-f(a)\|\leq 3\varepsilon$.
   (c) Montrons que f est continue sur un G_δ dense. Application aux dérivées.

Programme de colles n°4
Correction de la question 10

Notons ℓ_0^∞ l'ensemble des éléments de ℓ^∞ admettant comme limite 0 (c'est un sous-espace vectoriel, trivialement et aussi grâce à cette question et à la seconde partie de la précédente).

On a :

$$\boxed{\bar{\mathcal{P}} = \ell_0^\infty}$$

Preuve

Notations : Une suite u sera notée $(u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ pourra désigner une suite d'éléments de ℓ^∞, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$u_k = (u_k(0), u_k(1), \ldots, u_k(n), \ldots).$$

• $\underline{\bar{\mathcal{P}} \subset \ell_0^\infty}$.

Soit u élément de $\bar{\mathcal{P}}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

La boule fermée de centre u et de rayon ε rencontre $\mathcal{P}$, donc on dispose d'un élément p_0 de $\mathcal{P}$ tel que :

$$N_\infty(u - p_0) \leq \varepsilon.$$

Soit N une entier tel que $p_0(n)$ soit nulle pour tout entier $n > N$ (par exemple le degré de p dans le cas où ce dernier n'est pas nul).

Alors pour tout entier n, si $n > N$:

$$|u(n)| = |u(n) - p_0(n)| \leq N_\infty(u - p_0) \leq \varepsilon.$$

Donc (u_n) tend vers 0, autrement dit : $u \in \ell_0^\infty$.

• $\underline{\ell_0^\infty \subset \bar{\mathcal{P}}}$.

Soit $v \in \ell_0^\infty$.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, notons v_k la suite obtenue à partir de v par troncature à l'ordre k, ($v_k(n) = v(n)$, pour $n \in [\![0, k]\!]$ et $v_k(n) = 0$, pour $n \in [\![k+1, +\infty[\![$). La convergence vers 0 de $(v(n))_{n\in\mathbf{N}}$ fournit $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in [\![n_1 + 1, +\infty[\![$,

$$|v(n)| \leq \varepsilon.$$

Soit alors un entier $k \geq n_1$. Soit $n \in \mathbf{N}$; deux cas :

— on a $n \leq k$, alors $|v_k(n) - v(n)| = 0 \leq \varepsilon$;

— on a $n \geq k$, alors $|v_k(n) - v(n)| = |v(n)| \leq \varepsilon$, puisque $n \geq k \geq n_1$.

Donc la borne supérieure étant le *plus petit* des majorants,

$$N_\infty(v_k - v) \leq \varepsilon.$$

Donc $(v_p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers v (dans (ℓ^∞, N_∞)), et donc $v \in \bar{\mathcal{P}}$.

Deux ces deux points vient : $\bar{\mathcal{P}} \subset \ell_0^\infty$.

Programme de colles n^{o}5

16 Espaces vectoriels normés

— Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
— Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— Caractérisation séquentielle de la limite.
— Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
— Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
— Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
— *A venir : Révisions sur les fonctions d'une variable réelle...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

17 Questions de cours

— Caractérisation séquentielle de la limite.
— Lipschitzité de la fonction distance à une partie non vide.

18 Récitation d'exercices

1. (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, norme qui à une matrice associe la somme des valeurs absolues de ses coefficients. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert dense.
   (b) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ fermé (dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$) et non borné.
   (c) On note $\mathcal{T}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices de transvection. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $\mathcal{T}$.
   (d) Même question pour $\mathcal{P}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_((\mathbf{R}))$ des matrices de permutation.
2. $\star\star$ Montrer que deux matrices éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$.
3. $\star$ Soit un entier $n \geq 2$. On dit qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est cyclique si il existe un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $(X, MX, ..., M^{n-1}X)$ soit libre.
   (a) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ cycliques est ouvert.
   (b) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisable et λ_1, λ_2,...,λ_n ses valeurs propres. Montrer que si les λ_i, $i = 1, 2, ..n$, sont deux à deux distincts alors M est cyclique. Étudier la réciproque.
   (c) Montrer que l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dense.
4. $\star$ On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que O_n est dans l'adhérence de la classe de similitude de M si et seulement si M est nilpotente.
5. On pose $A = \{\exp(\mathrm{i}n), n \in \mathbf{Z}\}$. Montrer que $\bar{A} = \mathbf{U}$.
6. $\star\star$ Reprendre la question précédente avec $A = \{\exp(\mathrm{i}n), n \in \mathbf{N}\}$.
7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans l'e.v.n. $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ qui converge vers un élément ℓ de $\mathbf{E}$. Soient $\Sigma\alpha_n$ une série à termes strictement positifs divergente, on note $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de ses sommes partielles. Soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par,
$$\forall n \in \mathbf{N}, z_n = \frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k,$$
   Déterminer la limite de cette dernière suite.

8. $\star$ Même question que la précédente lorsque $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$.
9. Montrer que la relation
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n), \end{cases}$$
définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Donner la limite de cette suite puis un équivalent simple de son terme général [2].
10. Montrer que la relation
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1+u_n), \end{cases}$$
définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Donner la limite de cette suite, puis montrer que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite à déterminer.
11. Soit S des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues telles que pour tout x et tout y réels,
$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$
Déterminer S par deux méthodes :
— en utilisant la densité de $\mathbf{Q}$;
— en régularisant par intégration.
12. $\star$ Soit S des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues telles que pour tout x et tout y réels,
$$f(x+y) + f(x-y)) = 2f(x)f(y).$$
   (a) Soit f un élément de S non nul. Montrer que $f(0) = 1$ et que f est paire.
   (b) Soit f un élément de S non nul est indéfiniment dérivable. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,
$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y).$$
   (c) Montrer que tout élément de S est indéfiniment dérivable. Déterminer S.
13. $\star\star$
   (a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions d'une partie E de $\mathbf{R}$, **dénombrable** dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n soit bornée par 1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une suite extraite qui converge simplement [3] sur E vers une application f de E dans $\mathbf{R}$.
   (b) Soit $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications de $\mathbf{R}$ dans $[-1, 1]$, toutes croissantes. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge simplement sur $\mathbf{R}$, (*Théorème de sélection de Helly*).

2. Dans cet exercice et le suivant, les élèves doivent connaître la méthode sans pour le moment, en comprendre l'origine.
3. On dit qu'une suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'élément de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ converge simplement vers un élément g de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$, si pour tout réel x la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite $g(x)$.

Programme de colle n°6,

19 Révision du cours sur les fonctions d'une variable réelle de MPSI

— Théorème de la limite monotone.
— Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de l'homéomorphisme croissant.
— Lemme de Rolle, inégalité des accroissements finis, théorème du prolongement $\mathcal{C}^n$.
— etc.
— Fonction. convexes.
  — Définition, interprétation géométrique en terme de corde, formule de Jansen.
  — Lemme des trois pentes, caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.
  — Caractérisation des fonctions convexes dérivables et deux fois dérivables. Une fonction dérivable convexe est au dessus de ses tangentes, position par rapport à une sécante.
  — Inégalité de convexité $e^x \geq 1 + x$, $\ln(1 + x) \leq x$, inégalité de Young, Inégalité de Hölder.
  — *A venir.* Espace vectoriels normmés, deuxième partie.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

20 Questions de cours

1. Théorème de Rolle, puis égalité des accroissements finis.
2. Soit f une application continue sur un intervalle I telle que sa restriction à $I \setminus \{a\}$ soit dérivable. On suppose que f' admet en a une limite épointé ℓ finie ou non. Montrer que
$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \underset{t\to a, t\neq a}{\longrightarrow} \ell.$$
Cas où ℓ est un réel.

21 Exercices

1. Enoncer le théorème de Darboux et donner en une preuve utilisant le théorème de la borne atteinte.
2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable qui admet 0 comme limite en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f' s'annule, par l'une des deux méthodes suivantes laissées au choix du coleurs :
— en utilisant le théorème de la borne atteinte (et un joli dessin) ;
— en effectuant un changement de variable.
3. Inégalité de Kolmogorov —

   Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornée. On note $M_0 := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$ et $M_2 := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f''(x)|$.
   Montrer que pour tout réel x,
$$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$
   On pourra appliquer l'inégalité de Taylor lagrange entre x et $x + h$ et entre x et $x - h$, pour tout réel $h > 0$.
4. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ convexe et non constante. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ou en $-\infty$.
5. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ strictement convexe continue[4]. On suppose que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f atteint sa borne supérieure en un et un seul point a de $\mathbf{R}$. Montrer que si f est de plus dérivable, alors a est **caractérisé** par $f'(a) = 0$.

4. la continuité des applications convexes sur l'intérieur de leur intervalle de définition n'est pas au programme

6. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dérivable et strictement convexe. On suppose de plus que
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty. \tag{5}$$
Montrer que f' est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
Version $\star$ Même résultat en ne supposant f que dérivable.
7. (cf. DM de rentrée) Soit f une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. L'espace vectorile $\mathbf{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On suppose que $\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|(x,y)\|$ tend vers $+\infty$. Montrer que l'application ∇f est une surjection de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}$.
Version $\star$ On suppose en plus f strictement convexe. Montrer que l'application ∇f est une bijection de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}$.
8. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et f une application d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose que f admet $n+1$ zéros comptés avec leurs ordres. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.
9. Soit n un entier naturel, et soit f une application d'un segment $[a,b]$ $(a<b)$ à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, soient enfin $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $n+1$ points deux à deux distincts de $[a,b]$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, que nous noterons P, qui coïncide avec f en chacun des points x_i
   (b) Montrer que pour tout élément x de $[a,b]$ il existe un élément y de $[a,b]$ tel que :
$$(f-P)(x) = f^{(n+1)}(y)\,.\frac{\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!},$$
10. $\star$ — ÉGALITÉ DE TAYLOR LAGRANGE — Soit n un entier naturel, et soit f une application d'un segment $[a,b]$ $(a<b)$ à valeurs réelles, $n+1$ fois dérivable, soit enfin x_0 un point de $[a,b]$. Montrer que pour tout élément x de $[a,b]$, il existe un élément y de $\overleftrightarrow{]x_0, x[}$, tel que :
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} (x-x_0)^i \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} + (x-x_0)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}.$$
Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ retrouver ce résultat par la formule de Taylor avec reste intégrale.
11. Énoncer et prouver les inégalités de Young et Hölder.
12. $\star$ INÉGALITÉ DE JENSEN —
Soit f une application d'un segment $[a,b]$, non réduit à un point, à valeurs réelles, continue et *convexe*. Soient x une application de $[0,1]$ à valeurs dans $[a,b]$continue et α une application de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ continue telle que :
$$\int_0^1 \alpha(t)\mathrm{d}t = 1.$$
   (a) Montrer que : $\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t \in [a,b]$.
   (b) Montrer que $f\left(\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t\right) \leq \int_0^1 \alpha(t)f(x(t))\mathrm{d}t$.
13. $\star$ —INÉGALITÉ DE HÖFDING — Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes centrées, et $(c_i)_{1\leq i\leq 1}$ une suite de réels telles que pour $i = 1, 2, ..., n$ on ait presque sûrement $|X_i| \leq |c_i|$. On note $S_n = X_1 + X_2 + ...X_n$ et $C_n = c_1^2 + c_2^2 + ...c_n^2$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et tout réel t, $\exp(tx) \leq \frac{1-x}{2}\exp(-t) + \frac{1+x}{2}\exp(t)$.
   (b) Soit X une variable aléatoire centrée tel que $|X| \leq 1$, p.s. Montrer que $\mathrm{E}(\exp(tX) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.
   (c) En déduire que $\mathrm{E}\left(\exp(tS_n)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}C_n\right)$.
   (d) Montrer que $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2C_n}\right)$.
14. $\star$ Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.
Montrer que f est convexe.
$\star\star$ Le résulat demeure-t-il pour f non continue [5] ?

5. On admettra au besoin l'existence de bases du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.

15. ⋆⋆

(a) Montrer qu'une fonction continue d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ qui admet en tout point un maximum est constante.

(b) Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On appelle valeur maximale, tout réel y tel qu'il existe un réel x en lequel f admet un maximum local. Montrer que l'ensemble des valeurs maximales de f est au plus dénombrable.

(c) Montrer qu'une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ qui admet en tout point un extremum local est constante.

Programme de colles n°7
Numéro double spécial vacances

---

22 Espaces vectoriels normés

— Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
— Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
— Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
— Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
— Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de $(\mathbf{R}|\cdot|)$. Les compacts de $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$ sont les parties fermées bornées ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
— Connexité par arcs : convexes (caractérisation par le barycentre de n points), parties étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).
Les ensembles convexes seront au centre du prochain programme
— *A venir : intégrales convergentes. Chapitre III sur les e.v.n.*
Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

23 Questions de cours

1. Compacité d'un segment de $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. Par dichotomie ou par le lemme du soleil levant au choix du coleur.
2. Une suite d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ à valeurs dans un compact K converge si et seulement si elle admet une et une seule valeur d'adhérence.

24 Récitation d'exercices

1. Montrer que toute application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui admet une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$ est uniformément continue.
   Au choix du colleur utiliser l'une des deux méthodes suivantes :
   — recours au théorème de Heine ;
   — raisonnement par l'absurde utilisant le critère séquentiel de non continuité uniforme.
2. Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ de dimension finie. Soient k un élément de $[0, 1[$, et $\vec{f}$ une application de F dans F k-contractante. On note $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des itérés d'un point $\vec{a}$ de K par f.

(a) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet un et un seul point fixe, en utilisant ou sans utiliser les séries, au choix du colleur.

(b) $\star$ Montrer que le résultat demeure si l'on suppose qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\vec{f}^N$ soit k-contractante.

(c) $\star\star$ Dans le cas ou F est un compact étoilé, montrer que le résultat demeure en ne supposant plus que f est k-contractante mais seulement 1-lipschitzienne.

3. Soit F un fermé d'un espace vectorel de dimension finie. Montrer que pour tout élément $\vec{a}$ de $\mathbf{E}$, il existe un élément $\vec{f}$ de $\mathbf{F}$ tel que $d(\vec{a}, F) = \|\vec{f} - \vec{a}\|$.
4. Théorème de Riestz. $\star$ Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel de dimension infinie n'est pas compact.
5. $\star\star$

   (a) Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe des compacts K tels que $\mathbf{E} \setminus K$ soit non connexe par arcs.

   (b) Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n. de dimension infinie. Montrer que pour tout compact K, l'ensemble $\mathbf{E} \setminus K$ est connexe par arcs.

   Indication. On pourra montrer que pour tout point $\vec{a}$ du complémentaire d'un compact donné K, il existe des demi-droites d'extrémité $\vec{a}$ qui ne rencontre pas K.
6. Darboux.$\star$ Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, dérivable.

   On note $T = \{(x, y) \in I^2, y < x\}$ et on considère

$$\psi \ : \ T \to \mathbf{R}\,;\ (x, y) \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

   Montrer que $\psi(T) \subset f'(I) \subset \overline{\psi(T)}$. en déduire que $f'(I)$ est un intervalle.
7. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs mais que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ l'est.
8. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs mais que $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ l'est.
9. $\star$

   (a) Soit A un connexe par arcs d'une e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que toute partie de A relativement ouverte et fermée est soit A soit vide.

   (b) Soit U un ouvert d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ connexe par arcs. Montrer que U est « connexe par lignes brisées ».
10. $\star$ Soit K un compact d'une e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$.

    (a) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que K est inclus dans la la réunion d'un nombre fini de boules centrées en des points de K et de rayon ε.

    (b) $\star\star$ Montrer que K possède une partie dense dénombrable.
11. $\star$ Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.
12. $\star\star$ Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ non inversible. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{A\}$ est connexe par arcs.
13. (Révision) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
14. (Révision) Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.

    (a) Montrer qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et A commutent si et seulement si M est un polynôme en A.

    (b) Montrer que l'ensemble des matrices éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel dont on précisera la dimension. Ce résultat serait-il vrai si A était diagonalisable à valeurs propres non toutes distinctes ?
15. (Révision) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, nilpotent d'ordre n. Déterminer le commutant de f ainsi que sa dimension.
16. $\star$ Soit P un polynôme unitaire de $\mathbf{R}[X]$ de degré d. Montrer qu'il est scindé sur $\mathbf{R}[X]$ si et seulement si pour tout complexe z, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^d$. En déduire que l'adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices dont le polynôme caractéristique est scindé.

Correction de la question 12.

Notons r le rang de A. On dipose donc de matrices inversibles P et Q telles que :

$$PAQ^{-1} = J_r.$$

Notons $C = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{A\}$ et $C' = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{J_r\}$. Par inversibilité de P et Q on a $C = \Phi(C')$, où

$$\Phi \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ M \mapsto P^{-1}MQ.$$

Or l'application Φ est continue, bientôt on écrira « car linéaire en dimension finie » , aujourd'huis disons que ses composantes dans la base canonique sont polynomiales en les coordonnées de la variable dans la base canonique. Donc il suffit de prouver la connexité par arcs de C' pour avoir celle de C. Faisons.

On note $\mathcal{R}$ la relation définie sur C' ainsi : un élément M de C' est en relation avec un élément M' de C' si, par définition, il existe un chemin joignant M à M' de support inclus dans C'. Le cours affirme que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

D'abord $J_r \mathcal{R} \mathrm{diag}(1,1,...,1,-1)$. En effet l'application

$$\Gamma \ : \ [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ t \mapsto \mathrm{diag}(I_r, tI_{n-r-1}, -tI_1)$$

relie J_r à $\mathrm{diag}(1,1,...,1,-1)$, est continue (ses composantes dans la base canonique sont affines) et est à valeurs dans C', puisque $\Gamma(0) = J_r$ et que pour tout $t \in]0,1]$ le déterminant de $\Gamma(t)$ vaut $-t^{n-r-1}$ et est donc non nul.

Ensuite sur le même principe on montre que $J_r \mathcal{R} I_n$.

Donc la clase d'équivalence pour $\mathcal{R}$ contient I_n et $\mathrm{diag}(1,1,...,1,-1)$ mais comme $\mathrm{GL}_n^{\pm}(\mathbf{R})$ est connexe par arcs, elle contient $\mathrm{GL}_n^{+}(\mathbf{R})$ et $\mathrm{GL}_n^{+}(\mathbf{R})$ donc C' entier. Donc C' est connexe par arcs.

Donc C est bien connexe par arcs.

Programme de colles n°8

25 Espaces vectoriels normés

Révisions !

— Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
— Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
— Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
— Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
— Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de $(\mathbf{R}|\cdot|)$. Les compacts de $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$ sont les parties fermées bornées ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
— Connexité par arcs : convexes (caractérisation par le barycentre de n points), parties étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).
— *A venir Intégrales convergentes. Chapitre III sur les e.v.n.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

26 Questions de cours

1. Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n., X un ensemble non vide. Montrer que $N_\infty \ : \ \mathcal{B}(X, \mathbf{E}) \to \mathbf{R}\,;\ f \mapsto \sup\limits_{x\in X} \|f(x)\|$ est une norme.
2. Caractérisation de l'adhérence par les suites et caractérisation d'un fermé par les suites (énoncés et preuves).

27 Récitation d'exercices

1. (Révision.) Soit G un sous-groupe de $\mathbf{R}$ non trivial. Montrer que, soit il est de la forme $k\mathbf{Z}$, avec k élément de $\mathbf{R}_+^*$, soit il est dense dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ (on discutera sur la valeur de $\inf(G \cap \mathbf{R}_+^*)$).
2. (a) Soient F un fermé de $\mathbf{E}$ et K un compact. Montrer que $F + K$ est fermé.
   (b) Le résultat perdure-t-il si l'on suppose K seulement fermé.
   (c) $\star$ Soient $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{E}$. On suppose que $\mathbf{F}$ est fermé et $\mathbf{G}$ de dimension finie. Montrer que $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ est fermé.
3. Soit C un convexe d'un e.v.n $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que l'intérieur et l'adhérence de C sont convexes.
4. $\star\star$ Soient X un convexe de $\mathbf{R}^n$ non vide, a un point intérieur à X et b un point adhérent à X. Montrer que $[a, b[$ est inclus dans l'intérieur de X.
   Indication : Etudier pour un point x de $[a, b[$ l'image d'une boule de centre a par une homothétie de centre x.
5. Soient un entier $n \geq 2$ et une application f de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ continue.
   (a) On suppose qu'il existe un réel a tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit un singleton. Montrer que f atteint en $f^{-1}(\{a\})$ son maximum ou son minimum.

(b) $\star$ On supose qu'il existe un réel b tel que $f^{-1}(\{b\})$ soit compact. Montrer que f atteint son maximum ou son minimum.

6. On note $\mathbf{E} := \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ et $H = \{f \in \mathbf{E}, f(0) = 0\}$. Soit ν une norme sur $\mathbf{E}$. Montrer que H est soit fermé, soit une partie dense de $(\mathbf{E}, \nu)$.

   Donner des exemples de normes qui conduisent à des cas différents.

7. — PROJECTION SUR UN CONVEXE —

   (a) Soit C un convexe non vide fermé de $\mathbf{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. Soit z un élément de $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe un et un seul point c de C tel que : $\|z - c\| = \mathrm{d}(c, C)$. Le point c sera noté $p(z)$.

   (b) Soit y un élément de C, montrer que : $\langle y - p(z) \mid z - p(z) \rangle \leq 0$.

   (c) $\star$ Soient a et b des éléments de $\mathbf{R}^n$. Montrer que : $\|p(a) - p(b)\| \leq \|a - b\|$.

8. $\star$ On garde le cadre de l'exercice précédent. On appelle hyperplan d'appui de C en un point a de C tout hyperplan $\mathbf{H}$ de $\mathbf{R}^n$ passant par a tel que C soit inclus dans un des demi-espaces fermés définis par $\mathbf{H}$.

   (a) On suppose que z n'appartient pas à C. Montrer que C admet en $p(z)$ un hyperplan d'appui

   (b) Montrer que $p(\mathbf{R}^n - C) \subset \mathrm{Fr}(C)$

   (c) Soit f un point de la frontière de C. Montrer que C admet en f un hyperplan d'appui.

9. $\star\star$ On garde le cadre de la question précédente.

   Un point a de C est dit extrémal si $C - \{a\}$ est convexe, autrement dit si a n'est pas le milieu de deux points distincts de C.

   Montrer que C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (Théorème de Krein-Milman).

10. (a) On appelle enveloppe convexe d'une partie A non vide d'un espace vectoriel normée $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, notée $\mathrm{conv}(A)$ l'intersection de tous les convexes inclus contenant A, c'est donc le plus petit convexe contenant A (on fera un dessin). Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est l'ensemble de tous les barycentres à coefficients positifs de points de A.

    (b) $\star$ On suppose $\mathbf{E}$ de dimension n. Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est l'ensemble de tous les barycentres à coefficients positifs de $n+1$ points de A (on illustrera la preuve par une figure). Montrer que si A est compact alors $\mathrm{conv}(A)$ est compact. Donner un exemple de partie A fermée telle que $\mathrm{conv}(A)$ ne le soit pas.

11. (Révision.) Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R})$, $N_p(f) \underset{n \to +\infty}{\to} N_\infty(f)$.

12. $\star\star$ Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on dit qu'une partie A de K est ε-séparée si la distance entre deux points distincts de A est supérieure ou égale à ε.

    (a) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un entier $M(\varepsilon)$ tel que toute partie ε-séparée soit de cardinal inférieur ou égal à $M(\varepsilon)$ et tel qu'il existe une partie ε-séparée de cardinal $M(\varepsilon)$.

    (b) Soit f une application de K dans K qui conserve la distance. Montrer que f est surjective.

Programme de colles n°9

28 Révision sur les calculs de primitives

29 Intégrale sur un intervalle quelconque

- Intégrale convergente, absolument convergente, fonctions intégrables. L'absolue convergence assure la convergence.
- Théorèmes de comparaison, intégration des relations de comparaison.
- Changement de variables et intégrations par parties dans une intégrale généralisée.
- Théorème de comparaison série/intégrale.
- *À venir Espace vectoriels normés ch. III(Applications linéaires continues, normes équivalentes, espace de dimension finie .*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU. Hugo THILLEMAN.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

30 Question de cours

1. Soient ϕ et ψ des applications de $[a, b[$ dans $\mathbf{R}$, à valeurs positives. On suppose que $\phi(t) = \underset{t\to b}{\mathrm{o}}(\psi(t))$ et que ϕ est non intégrable. Alors ψ est non intégrable et
$$\int_a^x \phi(t)\mathrm{d}t = \underset{x\to b}{\mathrm{o}}\left(\int_a^x \psi(t)\mathrm{d}t\right).)$$

31 Exercices

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, l'application
$$f_n \ :]0,1[\to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$$
est intégrable (sommable).
   (b) Pour tout entier naturel n,on pose $I_n = \int_{]0,1[} f_n$. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $I_{n-1} - I_n = \frac{3}{4n-3} I_n$.
   (c) Calculet I_0 et en déduire l'expression de I_n pour tout entier naturel n.
2. Étudier la convergence de l'intégrale suivante :
$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\mathrm{i}x + \frac{\mathrm{i}}{x}\right) \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$
3. Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$
   (a) Déterminer le domaine de définition D de Γ.
   (b) Donner pour tout $x \in D$ une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.
   En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier n élément de D.

4. Montrer la convergence et donner la valeur des l'intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t)-\exp(-2t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\,;\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t)-\exp(-2t)}{t}\mathrm{d}t$$

5. (a) Soit g une application d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\int_a^b g(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) $\star$ à la place de (a).
   Soient h une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, T-périodique et $< h >= \frac{1}{T}\int_0^T h(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $\int_a^b g(t)h(nt)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < h > \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
   (c) Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Déterminer des équivalents simples, lorsque x tend vers $+\infty$, des quantités suivantes :
   $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^c}\,\mathrm{d}t$, pour c élément de $]1,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t, \int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.
   $\star$ Donner un développement asymptotique à tout ordre de $\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$, lorsque x tend vers $+\infty$.
7. $\star\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable.
   (a) Montrer que f n'est pas nécessairement bornée.
   (b) On supose de plus que f' est de carré intégrable (sur $\mathbf{R}_+$). Montrer que f est bornée.
8. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, continue et bornée. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Pour tout entier naturel n, justifier l'existence de $J_n = n\int_0^{+\infty} e^{-n^2t^2} f(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer, par un raisonnement élémentaire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite à déterminer.
   (b) (5/2) Reprendre la question précédente en utilisant le théorème de convergnce dominée.
9. $\star\star$ (à la place de 8.) Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue, tendant vers 0 en $\pm\infty$. Soit K une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continue, à valeurs positives, nulle en dehors d'un segment et tel que $\int_{\mathbf{R}} K = 1$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $K_n = nK(n\cdot)$ et : $K_n \star f \;:\; \mathbf{R}\to\mathbf{R}\,;\, x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)K_n(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que la suite $(K_n \star f)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f, c'est-à-dire que :
   $$\|K_n \star f - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$
   (b) (Quentin seulement) On suppose de plus K indéfiniment dérivable. Etudier la régularité de $K_n \star f$.
   (c) Existe-t-il vraiment une telle application K ?
10. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, à valeurs positives ou nulles, continue. On suppose f intégrable.
    (a) $\star$ A-t-on $\lim\limits_{+\infty} f = 0$?
    (b) On suppose de surcroît f décroissante. Montrer que $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Cette dernière condition suffit-elle à prouver l'intégrabilité de f ?
    (c) Énoncer et prouver un résultat analogue pour une série à termes positifs.
    (d) $\star\star$ On ne suppose plus f décroissante. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels qui tend vers $+\infty$ telle que : $x_n f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
    En déduire que pour tout application g de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et de carré intégrable,
    $$\int_0^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} x^2g^2(x)\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} g'^2(x)\mathrm{d}x} \leq +\infty$$
11. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x.$
    (a) Calculer I_2 et I_3.
    (b) Donner la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
    (c) Donner un développement limité à l'ordre 2, en $\frac{1}{n}$ de I_n, lorsque n tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire une expression de la forme $I_n = a_0 + a_1\frac{1}{n} + a_2\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\ (n\to\infty)$).
    (d) Exprimer pour tout entier naturel n, I_n comme la somme d'une série numérique.
12. Révision — Montrer que toute application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue et périodique est uniformément continue.

Programme de colles n°10

32 Révision de sup sur les séries

33 Espaces vectoriels normés, fin de la trilogie

- Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
- Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
- Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
- Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
- Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
- Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
- Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
- Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de $(\mathbf{R}|\cdot|)$. Les compacts de $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$ sont les parties fermées bornées ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
- Connexité par arcs : convexes (caractérisation par le barycentre de n points), partie étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).
- Applications linéaires continues.
- Normes équivalentes ; cas des espaces vectoriels de dimension finie.
- Espaces vectoriels de dimension finie, convergence des suites et des applications, continuité des applications à valeurs dans un espace de dimension finie, compacts d'un espace de dimension finie, théorème de Bolzano-Weierstrass.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU. Hugo THILLEMAN.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

34 Questions de cours

1. Continuité d'une application linéaire : quatre propriétés équivalentes.
2. Définition de la norme subordonnée d'une application linéaire d'un e.v.n. dans un autre (preuve complète).
3. (Révision) Le produit de deux compacts est compact (on précisera soigneusement les normes).

35 Récitation d'exercices

1. On munit $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ et $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ des normes infinies.
   L'application $D\ :\ \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})\,;\ f \mapsto f'$ est-elle continue ?
2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et Soit m l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$, noté en colonne, canoniquement associée à M.
   (a) Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$, constituée de vecteurs propres de $M^\top M$.
   (b) Montrer que les valeurs propres de $M^\top M$ sont positives ou nulles. Déterminer la norme d'opérateur de m, lorsque $\mathbf{R}^2$ est muni de la norme n_2.
3. Par $\mathbf{E}$ sera désigner l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, continues. Soient g un élément de $\mathbf{E}$ et L la forme linéaire
   $$\mathbf{E} \to \mathbf{R}\,; f \mapsto \int_{[0,1]} gf.$$
   On munit $\mathbf{R}$ de $|\cdot|$. Montrer la continuité de L et déterminer sa norme dans les cas suivants.

(a) On munit $\mathbf{E}$ de la norme N_2.

(b) On munit $\mathbf{E}$ de la norme N_∞.

(c) $\star$ (à la place de (b)). On considère la restriction L_1 de L à l'espace vectoriel $\mathbf{E}_1$ des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On prend pour g l'application $\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\cdot\right)$. Montrer que L est continue et déterminer sa norme d'opérateur lorsque E_1 est muni de la restriction de N_1 et $\mathbf{R}$ de $|\cdot|$.

4. Etudier les séries : $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$, $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{\ln(\ln(n))}{n(\ln n)^2}$ $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^{1/2}\ln(\ln(n))}$, $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n(\ln(\ln(n)))^3}$, β désigne un réel.

5. Nature des séries : $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$; $\sum \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

6. (a) En comparant les sommes partielles de la série harmonique à une intégrale montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

(b) Posons pour tout élément n de $\mathbf{N}^*$, $x_n := \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que pour que pour tout entier k supérieur ou égal à 1,
$$\frac{1}{1+k} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{1+k}\right).$$
En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un réel γ supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante qui converge vers 0. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum 10^n u_{10^n}$ converge. En déduire la nature des la séries $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^a}$ et $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^a}$, où a est un réel.

8. Soit f une application de $]0,1]$ dans $\mathbf{R}$, continue , décroissante et intégrable.
Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout entier $n\geq 1$ on a posé $\sum\limits_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$.

9. $\star\star$ Soit f une application d'un segment (non réduit à un point) $[a,b]$, à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) Soit g et h des applications d'un segment $[c,d]$ dans $\mathbf{R}$ continues. On suppose h à valeurs positives. Montrer qu'il existe θ, élément de $[c,d]$ tel que : $\int_{[c,d]} gh = g(\theta)\int_{[c,d]} h$.

(b) Pour tout entier naturel n non nul on définit :
— le pas $h_n = \frac{b-a}{n}$;
— la subdivision $(a_{i,n})_{0\leq i\leq n-1}$ de $[a,b]$, où pour $i=0,1,...,n$, $a_{i,n} = a+ih_n$;
— la n^{e} somme de Riemann, $S_n = h_n\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(a_{i,n})$.
Déterminer un équivalent de $\int_a^b f - S_n$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

10. $\star$ Au choix :

(a) On note E l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues. Soient u et v des éléments de $\mathbf{E}$. On suppose u bornée et v intégrable. Montrer que uv est intégrable.
On suppose que pour tout élément w de $\mathbf{E}$ intégrable, uw est intégrable. Montrer que u est borné.
Raisonner par l'absurde

(b) Soient u et v des éléments de $\mathbf{R}^\mathbf{N}$. On suppose u bornée et v sommable. Montrer que uv est sommable.
On suppose que pour tout élément w de $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ sommable, uw est sommable. Montrer que u est borné.
Raisonner par l'absurde

11. $\star\star$ Théorème de Banach Steinhauss — Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel tel que toute série absolument convergente, converge. On admet le théorème de Baire (cf TD.)

(a) Soit A une partie de $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{R})$, non vide. Montrer que :
— ou bien il existe un réel M tel que pour tout $\vec{\ell}\in A$, $\|\ell\|\leq M$;
— ou bien il existe un G_δ dense de $\mathbf{E}$, tel que pour tout élément $\vec{x}$ de ce G_δ,
$$\sup_{\vec{\ell}\in A} |\vec{\ell}(\vec{x})| = +\infty.$$

(b) Soit a une suite réelle telle que pour toute suite réelle b, élément de ℓ^2 la série $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que $a\in\ell^2$.
Indication. Considérer l'ensemble $\{L_n, n\in\mathbf{N}\}$ des formes linéaires sur ℓ^2 défini par : $\forall n\in\mathbf{N}, L_n$: $\ell^2\to\mathbf{R}$; $b\mapsto \sum\limits_{k=0}^n a_k b_k$.

Programme de colles n°11
Prévisionnel

36 Séries

- Définition de la convergence d'une série à valeurs dans un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Dans un espace vectoriel de dimension finie la convergence absolue assure la convergence.
- Séries à termes positifs. Caractérisation de la convergence par la suite des sommes partielles. Théorèmes de comparaison directe, sommation des relations de comparaisons. Règle de d'Alembert, comparaison avec une intégrale.
- Espace vectoriel des séries convergentes, des séries absolument convergentes.
- Séries réelles, plan d'étude d'une série réelle. Séries alternées.
- Exemples de séries dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, séries géométriques et exponentielles.
- Famille sommables de termes positifs ou nuls. Lien avec les séries à termes positifs ou nuls, théorème de sommation par paquets, théorème de Fubini Tonelli.
- Famille sommables de réels ou complexes. Lien avec les séries, théorème de sommation par paquets, théorème de Fubini-Lebesgues, théorème de sommation par paquets, application au produit de Cauchy de deux séries.
- Définition d'une probabilité sur un univers Ω dénombrable, caractérisation d'une probabilité par ses valeurs sur les événements élémentaires, variable aléatoire sur Ω, espérance d'une variable aléatoire, exemple la loi de Poisson.
- *A venir :* Calcul différentiel.
  Avertissement pour les colleurs : *les familles sommables figurent au programme pour fonder rigoureusement les probabilités, elles ne doivent pas faire l'objets d'exercices autres qu'élémentaires. Les élèves ne sont pas sensés connaitre autre chose en probabilités que le cours de MPSI (Ω fini) et la définition donnée cette semaine, il y aura un chapitre entier consacré aux probabilités en fin d'année, les exercices doivent rester très élémentaires.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU. Hugo THILLEMAN.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

1. $\star$ Définition du produit de Cauchy de deux séries, convergence de la série produit de deux série absolument convergente en utilisant le théorème de sommation par paquets.
2. Théorème spécial sur les séries alternées, (avec majoration du reste et dessins).

37 Exercices

1. Donner en utilisant le théorème de sommation des équivalents :
   - un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} k^k$;
   - un développement limité en $\frac{1}{n}$, à l'ordre 2 de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente. On note γ sa limite.
   $\star$ Donner un équivalent simple, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \gamma$.
3. Montrer que
$$\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}+ ;\ M \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}MM)}$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, que l'on notera $\|\cdot\|_F$. Montrer que pour tout A et tout B éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F.$$

Définir l'exponentielle d'une matrice. Calculer l'exponentielle des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
.

4. Séries sans paramètre — Étudiez en utilisant des développements limités au **sens fort**, les séries de terme général :
$u_n = \sin(\sqrt{1+n^2\pi^2})$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$. $(n \geq 2)$, etc.
5. Séries à paramètre — Etudiez en utilisant des développements limités (au sens faible) la série de terme général $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{5\alpha}}\right)$, où α est un réel strictement positif, etc., etc., etc...
6. $\star$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On note pour tout entier naturel n, S_n sa somme partielle d'ordre n et l'on suppose que $\sum u_n$ diverge. Prouvez que $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
7. (le retour) Montrer que que la relation de récurrence
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n), \end{cases}$$
définit bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que cette suite converge vers 0.
Donner lorsque n tend vers $+\infty$, un équivalent de u_n, de la forme cn^γ, avec c et γ réels.
$\star$ Pour tout élément n de $\mathbf{N}$, on pose $a_n := u_n - cn^\gamma$. Donner un équivalent de a_n, lorsque n tend vers $+\infty$.
Les élèves doivent savoir justifier la forme de la suite téléscopique utilisée en illustrant par un dessin la comparaison à une intégrale.
8. $\star$
   (a) Soit b un élément de $]1, +\infty[$. Montrer que la relation de récurrence $\begin{cases} x_0 = b, \\ x_{n+1} = x_n + \ln(x_n), \end{cases}$ définit bien une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que cette suite converge vers $+\infty$. Donner un équivalent simple de $\ln(x_n)$, lorsque n tend vers $+\infty$, puis de x_n.
   (b) $\star\star$ Donner un développement asymptotique de v_n à deux termes, lorsque n tend vers $+\infty$.

   Abel : couper-réindexer-recoller
9. $\star$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de réels strictements positifs qui tend vers $+\infty$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum \dfrac{x_n}{a_n}$ converge. Montrer que $\frac{1}{a_n}\sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$.
Indication :*Considérer la quantité* $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{x_n}{a_n}$.
10. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω (cf. 1.) à valeurs dans $\mathbf{N}$, d'espérance finie. Montrer que $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{n\geq 0} \mathbf{P}(X > n)$. au choix du colleur :
    (a) En utilisant une transformation d'Abel.
    (b) En utilisant le théorème de Fubini (on fera un joli dessin).
11. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeur dans $\mathbf{N}$, de même loi, définies sur un même univers dénombrable Ω, et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans N^*. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a $X_1, ..., X_n, T$ mutuellement indépendantes et que X_1 et T admettent des espérances finies. On définit alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + ... + X_T$.
Montrer que $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(T)\mathrm{E}(X_1)$.
12. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires définies sur un ensemble dénombrable Ω muni d'une probabilité $\mathbf{P}$ et à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendantes On suppose que la loi de X_i est une loi de Poisson de paramètre λ_i (strictement positif), pour $i = 1, 2$. Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson à préciser.
13. $\star\star$ Soit C l'ensemble des séries convergentes à termes réels. Existe-t-il une série $\sum b_n$divergente, à terme réels non nuls, telle que
$$\inf_{\sum a_n \in C}\left(\sup_{n\geq 0}\left|\left|1 - \frac{a_n}{b_n}\right|\right|\right) = 0$$
On pourra commencer par trouver deux séries à termes équivalents de natures différentes.

Programme de colle n°12

38 Calcul différentiel

Le cours de calcul différentiel est scindé en deux - chapitres, le cas particulier des fonctions numériques, la définition du vecteur gradient et les techniques d'optimisation seront vus ultérieurement. Les équation saux dérivées artielles seront pour la prochaine semaine.

Toutes les applications sont définies sur un ouvert U d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$, de dimension finie p à valeurs dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{F}$, de dimension finie n. $\mathbf{E}$ sera le plus souvent vu comme un espace affine.

— Dérivées directionnelles, dérivées partielles dans une base. Une application $\vec{f}$ ayant dans une base p applications dérivées partielles définies et continues sur U vérifie, pour tout point a de U :

$$\vec{f}\left(a+\vec{h}\right) = \vec{f}(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i.D_i\vec{f}(a) + \mathrm{o}\left(\|\vec{h}\|\right),\ \left(\vec{h}\to\vec{0}_{\mathbf{E}}\right) \tag{6}$$

— Une application ayant dans une base p applications dérivées partielles définies et continues sur U, admet des dérivée dans toutes les directions continues, et des dérivées partielles dans toute base continues : on dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$

— Notion d'applications différentiables. Une application différentiable admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur, en tout point de U. Expression de la différentielle au moyen des dérivées partielles dans une base. Interprétation géométrique dans le cas où $\mathbf{E}$ est $\mathbf{R}^2$ (plan tangent).

— Une application est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si elle est différentiable et sa différentielle est continue.

— Différentiabilité de la composée. La composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $B(f,g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.

— Matrice jacobienne.

— Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Théorèmes de transfert pour les applications de classe $\mathcal{C}^k$.

— Théorème de Schwarz (admis).

— *A venir : approximation uniforme...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU. Hugo THILLEMAN.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

39 Questions de cours

1. $\star$ Différentielle d'une forme linéaire, d'une forme bilinéaire et de $B(f,g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.
2. $\star\star$ Soit $\vec{f}$ une application d'un ouvert U d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$, de dimension finie p à valeurs dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{F}$, de dimension finie n. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$ dans laquelle $\vec{f}$ admet p applications dérivées partielles dans $\mathcal{B}$ continue. Montrer que pour tout $a\in U$:

$$\vec{f}(a+\vec{h}) = \vec{f}(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i\partial_i\vec{f}(a) + \vec{\mathrm{o}}(\|\vec{h}\|)\,;\ (\vec{h}\to\vec{0}_{\mathbf{E}}).$$

3. Sous les hypothèses de la question précédente montrer l'équivalence des deux propositions :
   i. L'application $\vec{f}$ admet sur U des applications dérivées directionnelles dans toutes les directions continues.
   ii. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$ dans laquelle $\vec{f}$ admet p applications dérivées partielles continues.
4. $\star\star$ Différentabilité de la composée de deux applications différentiables.

40 Exercices

1. Etudier la continuité en $(0,0)$ $g\ :\ \mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}\,;\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\frac{x^2-3xy^2}{x+y}, & \text{pour } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{pour } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

   Soit l'application $f\ :\ \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\,;\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{pour } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{pour } (x,y)=(0,0).\end{cases}$ Montrer que f admet en $(0,0)$ dans toute direction une dérivée directionnelle. Est-elle continue en ce point ?

   Version $\star$ Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit F l'application :

$$F\ :\ \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}\,;\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}, & \text{pour } x\neq y,\\ g'(x)\,, & \text{pour } x=y.\end{cases}$$

   Montrer que F est continue.

   Version $\star\star$ Montrer que si g est deux fois dérivable en $a\in\mathbf{R}$, alors F est différentiable en (a,a).

2. Déterminer les applications f de $\mathbf{R}^n\setminus\{(0,...,0)\}$ dans $\mathbf{R}$, radiales, de classe $\mathcal{C}^2$ et telles que $\Delta f=0$. Que dire dans le cas $n=3$.

3. Expression du laplacien en coordonnées polaires. 1strictement positif $\mathbf{R}$. Soit f une fonction continue sur $\bar{B}$ à valeurs réelles et dont la restriction à B est de classe $\mathcal{C}^2$.
   (a) Montrer que si f admet en un point m de B un maximum local, alors $\Delta f(m)\leq 0$.
   (b) $\star$ On suppose f harmonique (i.e. Δf nul). Montrer que

$$\sup_{x\in\bar{B}} f(x)=\sup_{x\in\mathrm{Fr}(B)} f(x).$$

   On pourra considérer $f_\varepsilon\ :\ x\mapsto f(x)+\varepsilon\|x\|^2$, *pour* $\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$.

4. Soient p un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et l'application $\Phi_p\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;M\mapsto M^p$. Montrer que Φ_2, puis Φ_3 sont différentiables, et donner leurs différentielles. Montrer que la fonction exponentielle définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est différentiable en 0.

   $\star$ Montrer par récurrence que Φ_p est différentiable et donner sa différentielle.

5. Soit $\delta\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;M\mapsto\det(M)$. Montrer que δ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner sa différentielle, au moyen du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:
   — en calculant les dérivées partielles ;
   — en utilisant la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

6. Soit n un élément de $\mathbf{N}^*$. $\mathbf{C}$ désigne un ouvert de $\mathbf{R}^n$ tel que pour tout élément X de C et tout élément t de $\mathbf{R}_+^*$, $t\cdot X\in C$. Soit f une application de C dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est homogène de degré α, si et seulement si, pour tout $X\in C$, $\mathrm{d}f(X)\cdot X=\alpha f(X)$.

   Déterminer la forme générale des applications de $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2, x>0\}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telles que pour tout élément (x,y) de C, $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}y=\sqrt{x^4+y^4}$.

7. Les éléments de $\mathbf{R}^n$ sont notés en colonne. Soit F une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ dont la matrice jacobienne est en tout point de $\mathbf{R}^n$ antisymétrique. Montrer qu'il existe un élément A de $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ et un élément K de $\mathbf{R}_n$tels que pour tout $X\in\mathbf{R}^n$,

$$F(X)=AX+K.$$

8. $\star\star$ Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et a un point de U tel que $\mathrm{d}f(a)$ soit un automorphisme. Démontrer qu'il existe un voisinage V de a tel que la restriction de f à V soit injective.

MP* **2023-24**

Programme de colle n°13
Numéro double spécial Noël

41 Approximation uniforme, fonction d'une variable réelle

— Convergence simple et uniforme de suites et de séries d'applications d'une partie A d'un e.v. de dimension finie à valeurs dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou un e.v. de dimension finie $\mathbf{F}$. Critère de convergence uniforme.
— Continuité d'une limite uniforme d'une suite d'applications continues. Résultats analogues pour les séries. Dans la pratique on montre pour tout point du domaine, la convergence uniforme dans un *voisinage relatif au domaine* de ce point.
— Limite en un point (ou en $+\infty$) de la limite uniforme d'une suite d'applications ayant en ce point une limite. Résultat analogue pour les séries.
— Lien entre la convergence uniforme et la convergence en norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour A compact $\left(\mathcal{C}^0(A,\mathbf{F}), \|\cdot\|_\infty\right)$ est une partie fermée de $(\mathcal{B}(A,\mathbf{F}), \|\cdot\|_\infty)$.
— Convergence normale des séries d'applications. La convergence normale implique la convergence uniforme et uniforme absolue. Critère de convergence normale.
— Les deux théorèmes de densité au programme.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU. Hugo THILLEMAN.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

42 Questions de cours

1. Continuité de la limite uniforme d'une suite d'applications continues.
   $\star\star$ En remplacement : limite en un point (ou en $+\infty$) de la limite uniforme d'une suite d'applications ayant en ce point une limite (théorème de la double limite).
2. Toute application continue sur un segment est limite uniforme d'une suite d'applications en escalier.

43 Exercices

1. Déterminer l'ensemble S (rep. S') des éléments f de $C^1\left(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}\right)$ tels que, pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0 \text{ (resp. } x).$$
2. On pose $U=\mathbf{R}^2\setminus(\mathbf{R}_-\times\{0\})$. Déterminer l'ensemble S_U des éléments f de $C^1(U,\mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$,
$$-y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0,.$$
   On illustrera abondamment par des beaux dessins polychromes. On tracera notamment les lignes des champs de vecteurs associées à ces équations ainsi que les champs.

3. Déterminer l'ensemble S (rep. S') des éléments f de $C^1\left(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}\right)$ tels que, pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$,
$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)= \text{ (resp. } f).$$
On illustrera abondamment par des beaux dessins polychromes. On tracera notamment les lignes du champ de vecteurs associées à cette équation ainsi que le champ.

4. On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et par $\|\cdot\|$ on désigne le la norme euclidienne canonique.
$$i\ :\ \mathbf{R}^n\setminus\{(0,...,0)\}\to\mathbf{R}^n\ ;\ \vec{x}\mapsto\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}.$$
Montrer que i est de classe $\mathcal{C}^1$, et que la différentielle de i, en tout point m de $\mathbf{R}^n$ distinct de $(0,...,0)$, est la composée d'une homothétie et d'une symétrie.

5. Montrer la convergence simple de la série d'applications $\sum u_n$, où, pour tout entier naturel n,
$$u_n : [-1,1[\to\mathbf{R};\ x\mapsto\frac{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|^n x^n}{(n+1)^{\frac{1}{4}}}.$$
La somme de cette série est-elle continue ?

6. $\star$ Soit la série d'applications $\sum u_n$, où pour tout entier naturel n,
$$u_n:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R};\ x\mapsto\frac{|\sin x|}{(n+1)^a},\text{ pour } x\in[n\pi,(n+1)\pi],\ 0\text{ sinon.}$$
et a un réel positif. Etudier la convergence simple, uniforme et normale. Discutez suivant la valeur de a. On illustrera de beaux dessins.

7. Soit la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Montrer que le domain de définition de f est $]1,+\infty[$. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition. Montrer que f admet une limite finie à déterminer en $+\infty$ et en 1, **puis** donner un équivalent de f en 1_+.

8. $\star$ Soit la fonction f du couple (x,y) de variables réelles, définie par $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^x(\ln(n))^y}$. Étudier le domaine de définition D de f. Étudier la continuité de f sur D. On fera de belles figures.

9. Pour tour entier $n\geq 2$ on pose , $f_n\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}\ ;\ x\mapsto\frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.
   (a) Déterminer le domaine D de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 2}f_n$. On note $\varphi\ :\ D\to\mathbf{R}\ ;\ x\mapsto\sum\limits_{n=2}^{+\infty}f_n(x)$.
   (b) Montrer que φ est continue sur $]0,+\infty[$.
   (c) La série $\sum\limits_{n\geq 2}f_n$ converge-t-elle normalement sur son domaine de définition ?
   (d) Étudier la continuité de φ en 0.

10. (a) Donner deux exemples de normes matricielles sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Définir l'exponentielle d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   (b) Montrer que l'application $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbf{R})\ ;\ M\mapsto\exp(M)$ est continue.
   (c) On admet que pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commutent entre eux, $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$. Montrer que l'exponentielle d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commute avec sa transposée est le produit d'une matrice symétrique et d'une matrice orthogonale.
   Les formules du type $\ell(\exp(M))=\exp(\ell(M))$ où ℓ est linéaire doivent être justifiée par passage aux sommes partielles et continuité de ℓ.

11. *Théorème des moments* — Soit f une application de $[0,1]$ à valeurs complexes continue. On suppose que pour tout entier naturel n, $\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t=0$. Montrer que f est nulle.

12. Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continues, qui converge simplement vers une application f, supposée, elle aussi, continue.
   Supposons qu'il existe K, réel, tels que pour tous éléments x et y de $[0,1]$ et tout entier naturel n : $|f_n(x)-f_n(y)|\leq K|x-y|$. (suite est équilipschitzienne). Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, converge uniformément vers f.

13. $\star$ Soit $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continues et convexes qui converge simplement vers une application g. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]0,1[$.
14. Soit une suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}[X]_d$ qui converge vers simplement vers une aplication f. Montrer que f est élément de $\mathbf{R}[X]_d$ et que $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment.
15. $\star$ Que dire d'une application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, limite uniforme d'une suite d'applications polynômiales. Montrer que toute application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue est limite simple d'une suite d'applications polynomiales.

EQUIRÉPARTITION —

16. $\star\star$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$. Pour tous réels a et b tels que $0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose :

$$X_n(a,b) := |\{k \in [\![1,n]\!], u_k \in [a,b]\}|.$$

Prouvez l'équivalence des 3 propositions suivantes :

i. Pour pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a \leq b$,

$$\frac{X_n(a,b)}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} b-a.$$

ii. Pour tout élément f de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

iii. (*Critère de Weyl.*) Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp 2\mathrm{i}\pi p u_k \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On admettra le résultat suivant, vu en TD.
THÉORÈME DE WEIERSTRASS TRIGONOMÉTRIQUE : *toute application de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{C}$, 1*-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*
Un polynôme trigonométrique est un élément de $\mathrm{vect}((\exp(\mathrm{i}2\pi p\,\cdot)_{p\in\mathbf{Z}}))$.

17. $\star\star$ *Théorème de Bedford.*
Pour $i = 1,2,...,9$ on note $N_i(n)$ le nombre d'éléments de $\{2, 2^2, ..., 2^n\}$ dont le premier chiffre dans l'écriture décimale est un i. Montrer que

$$\frac{N_i(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\ln(i+1)-\ln(i)}{\ln(10)}.$$

$\star$ *Que dire d'une application* f *de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$, *limite uniforme d'une suite d'applications polynômiales. Montrer que toute application de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$ *continue est limite simple d'une suite d'applications polynomiales.*

Solutions d'execices de colles

Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continues, qui converge simplement vers une application f, supposée, elle aussi, continue.

Supposons qu'il existe K, réel, tels que pour tous éléments x et y de $[0,1]$ et tout entier naturel n : $|f_n(x)-f_n(y)|\leq K|x-y|$. (suite est équilipschitzienne). Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, converge uniformément vers f.

SOLUTION.

Soit $\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$.

Choisissons une subdivision $(a_0,a_1,...,a_p)$ de $[0,1]$ dont le pas est inférieur à $\frac{\varepsilon}{K}$ (le réel K est nécessairement positif et, quitte à l'augmenter il est loisible de le supposer strictement positif). La convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ fournit un entier naturel n_i, pour $i=0,1,2,...,p$ tel que :

$$\forall n\in [\![n_i,+\infty[\![,\ |f_n(x_i)-f(x_i)|\leq\varepsilon.\ ;$$

Désignons dans la suite par N le plus grand des n_i.

Soit $n\in [\![N,+\infty[\![$. Soit $x\in[0,1]$.

Si $x=1$, alors par définition de de n_p et de N, $|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$.

Supposons à présent $x\in[0,1[$. Désignons par j l'élément de $\{0,1,...,p-1\}$ tel que $x\in[x_j,x_{j+1}[$, alors

$$\begin{aligned}|f(x)-f_n(x)|\leq&|f(x)-f(x_j)|+|f(x_j)-f_n(x_j)|+|f_n(x_j)-f_n(x)|\leq\\ &K|x-x_j|+\varepsilon+K|x-x_j|\leq 2K|x_{j+1}-x_j|+\varepsilon\leq 2K\frac{\varepsilon}{K}+\varepsilon=3\varepsilon.\end{aligned}\tag{7}$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, converge uniformément vers f.

Montrer que toute application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue est limite simple d'une suite d'applications polynomiales.

SOLUTION.

Le théorème de Weierstrass affirme que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, l'ensemble des applications polynomiales est dense dans l'ensemble des applications *continues* sur le *segment* $[-n,n]$, muni dela norme $\|\cdot\|_{[-n,-n],\infty}$.On peut donc choisir pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, un polynôme p_n tel que :

$$\|p_n-f_{|[-n,n]}\|_{[-n,n],\infty}\leq\frac{1}{n}.$$

Soit alors $x_0\in\mathbf{R}$. On dispose d'un entier $N\geq 1$ tel que $x_0\in[-N,N]$.

Pour tout entier $n\geq N$, on a $x_0\in[-n,n]$ et donc :

$$0\leq|p_n(x_0)-f(x_0)|\leq\|p_n-f_{|[-n,n]}\|_{[-n,n],\infty}\leq\frac{1}{n}$$

Donc par encadrement la suite $(p_n(x_0))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

Donc, x_0 étant quelconque, $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f.

Programme de colle n$^{\text{o}}$14 Prévisionnel

44 Fonction d'une variable réelle, approximation

- Approximation uniforme (cf. programme précédent).

- Dérivation d'applications à valeurs vectorielles.
  - Dérivée d'une fonction à valeurs dans un e.v. de dimension finie $\mathbf{F}$, propriétés de la dérivation.
  - Arcs paramétrés : définition, points réguliers, tangentes en un point régulier (aucune autre connaissance spécifique).
  - Dérivées d'ordres supérieurs, espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{F})$, algèbre $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{C})$, formule de Leibni(t)z. Dans le cas d'une application numérique, généralisation à une application bilinéaire, formule de Taylor-Young vectoriel à l'ordre n pour une application de classe $\mathcal{C}^n$ (avec un petit o).
- Intégrale
  - Construction de l'intégrale sur un segment d'une application continue par morceaux à valeurs dans $\mathbf{F}$. Propriétés de l'intégrale.
  - Inégalité des accroissements finis pour une application de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbf{F}$.
  - Formule de Taylor avec reste intégrale (vectorielle), inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ (avec un grand O).
  - Intégrale sur un segment de la limite uniforme d'une suite d'applications.

45 Révision de sup. sur les équations différentielles.

- Équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients continus, structure de l'ensemble des solutions, unicité de la solution d'un problème de Cauchy sur un intervalle donné, méthode d'abaissement du degré (application de la méthode à des équation non linéaire ou des inéquations linéaire, cf. 1 et 2.).
- Équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants, cas des second membres de la forme $p \exp(\lambda \cdot)$, où l'application p est polynomiale.
- Intégrale sur un segment de la limite uniforme d'une suite d'applications.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU. Hugo THILLEMAN.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

1. Formule de Taylors reste intégral (dans le cas vectoriel). Énoncé, preuve.

46 Exercices

1. — PETIT LEMME DE GRONWALL —
   Soient t_0 un réel, u_1 un reél strictement positif et f une application de $[t_0, +\infty[$ continue. Soient ϕ_1 la solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)y, \\ y(t_0) = u_1. \end{cases}$ et ϕ une application de$[t_0, +\infty[$ dérivable telle que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, $\phi'(t) \leq f(t)\phi(t)$ et $\phi(t_0) \leq u_1$. Montrer que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, $\phi(t) \leq \phi_1(t)$.
2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que l'application $f' + 2023f$ admet 0 comme limite en $+\infty$. Montrer que f admet 0 comme limite en $+\infty$.
   $\star$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que la suite $(u_{n+1} + \frac{1}{2023}u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
3. (a) Soient U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbf{R}$ à valeurs positives ou nulles, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe un réek $k > 0$ tel que pour tout $m \in U$:

$$\|\vec{\nabla} f(m)\| \leq k f(m). \tag{8}$$

Soient $[a,b]$ un segment non réduit à un point et $\gamma\ :\ [a,b] \to \mathbf{R}^2$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma([a,b]) \subset U$. Enfin, on pose $m_0 = \gamma(a)$ et $m_1 = \gamma(b)$.
Montrer que l'application $f \circ \gamma$, notée g, est de classe $\mathcal{C}^1$ et montrer que pour tout élément t de $[a,b]$,

$$g'(t) \leq k\|\overrightarrow{\gamma}\,'(t)\|g(t).$$

En déduire que

$$f(m_1) \leq f(m_0)e^{k\ell},$$

où ℓ désigne la longueur de l'arc γ.

(b) On suppose que U est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 1 < \|(x,y)\| < 2\}$. Montrer que si f s'annule en un point a de U alors f est nulle.

(c) $\star\star$ Reprendre la question précédente avec pour U un connexe par arcs.

4. On munira $\mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique, par $\langle\cdot|\cdot\rangle$ on désignera le produit scalaire canonique, par $\|\cdot\|$ la norme associée. Soient ε un élément de $\{-1,1\}$, A un point de $\mathbf{R}^2$ et F une application d'un intervalle I, ouvert et non vide, dans $\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathrm{A}\}$ de classe $\mathcal{C}^2$, telle que pour tout réel t,

$$\vec{\mathrm{F}}''(t) = \varepsilon\frac{\overrightarrow{\mathrm{AF}}(t)}{\|\overrightarrow{\mathrm{AF}}(t)\|^2}.$$

(a) Soit l'application $\sigma\ :\ I \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \det_{\mathcal{B}_c}\left(\overrightarrow{\mathrm{AF}}(t),\, \overrightarrow{\mathrm{F}}\,'(t)\right)$. Montrer que σ est constante.

(b) Dans cette question **on suppose que** $\varepsilon = 1$. Soient a et b des éléments distincts de I tels que $\mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(b)$. En considérant

$$\frac{1}{2}\int_a^b \|\vec{\mathrm{F}}'(t)\|^2 \mathrm{d}t,$$

montrer que $\vec{\mathrm{F}}'(a) \neq \vec{\mathrm{F}}'(b)$. Interpréter.

(c) Dans cette question **on suppose que** $\varepsilon = -1$. Soit $R \in \mathbf{R}_+^*$. Déterminer une valeur de F telle que le support de l'arc paramétré (I, F) soit un cercle de rayon R.

5. Soit $\sum u_n$ une série d'applications de $[0,1[$ dans $\mathbf{R}$ à valeurs **positives ou nulles**. qui converge simplement. On note f sa somme. On suppose que pour tout entier $n \geq 0$ l'application u_n admet une limite ℓ_n en 1 et que $\sum \ell_n$ diverge. Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.

6. $\star$ On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$u_n(x) = (-1)^n \underbrace{\sin(\sin(....(\sin(x))...))}_{n \text{ fois}}$$

(a) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\|u_n\|_\infty = |u_{n-1}(1)|$.

(c) Déterminer un équivalent de $\|u_n\|_\infty$.

(d) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement.

(e) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge uniformement.

Sommes de Riemann

7. (a) Déterminer la limite éventuelle de la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,

$$P_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^k\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

(b) Déterminer la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

8. Soit la série d'applications $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, où pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{x^{\sqrt{n}}}{\mathrm{sh}(nx)}.$$

(a) Montrer que la série d'applications $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement.

(b) montrer que sa somme est continue.

9. $\star$ Cesàro forme intégrale — Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue et de limite nulle au voisinage de $\pm+\infty$ Soit $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continues, à valeurs **positives**, et intégrables. On suppose de plus que pour tout entier naturel n, $\int_{\mathbf{R}} K_n = 1$ et, pour tout réel $\delta > 0$, $\int_{-\delta}^{+\delta} K_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $K_n \star f \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)K_n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que la suite $(K_n \star f)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f.

10. Théorème de Dirichlet — Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$. On pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$D_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C},\ t \mapsto \frac{1}{2\pi}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kt)\right).$$

(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x non congru à zéro modulo 2π,

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

(b) Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t$ tend vers $f(x)$ (cf. TD . séries de Fourier).

11. $\star\star$ Théorème de Korovkin —
On considère l'e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_\infty)$, où $\mathbf{E}$ désigne l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$.
Un élément u de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ est dit positif si pour tout $f \in \mathbf{E}$, si $f \geq 0$ alors $u(f) \geq 0$.

(a) Soit u un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ positif. Montrer que u est continu.

(b) Soit $f \in \mathbf{E}$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + c(x-y)^2.$$

(c) Pour tout entier $k \geq 0$, notons e_k l'élément de E associé à X^k. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'opérateurs positifs. On suppose que pour $k = 0, 1, 2$, la suite $(u_n(e_k))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers e_k dans $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_\infty)$. Montrer que pour tout $f \in \mathbf{E}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers f dans $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_\infty)$, (théorème de Krovkin).

(d) Déduire du théorème de Korovkin celui de Weierstrass.

Programme de colle n°15

47 Groupes, anneaux, corps

— Groupes, sous-groupes, exemples de groupes et de sous-groupes du programme de MPSI.
— Morphismes de groupes : caractérisation de l'injectivité, image directe et réciproque d'un sous-groupe, isomorphisme de groupes.
— Sous-groupes de $\mathbf{Z}$, groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
— Définition d'un sous-groupe engendré, ordre d'un élément, l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe.
— Groupes monogènes et cycliques. Structure des groupes monogènes.
— Anneau : sous-anneau, morphismes d'anneaux.
— Divisibilité dans les anneaux intègres. Idéal d'un anneau intègre, Idéaux de $\mathbf{K}[X]$.
— Dans $\mathbf{K}[X]$ ou $\mathbf{Z}$, PPCM, PGCD en termes d'idéaux, théorème de Bezout, théorème de Gauss.
— Décomposition en produit d'irréductibles (existence et unicité de la décomposition dans $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{K}[X]$. Irréductibles de $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$
— L'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Générateurs du groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Equivalence de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps, et n premier ; Théorème chinois. Indicatrice d'Euler, avec expression en fonction des facteurs premiers. Théorème d'Euler.
— Algèbre, définition, sous-algèbre définition et caractérisation, morphisme d'algèbres, exemples au programme.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU. Hugo THILLEMAN.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

48 Questions de Cours

1. Equivalence : $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps, n premier.
2. Idéaux de $\mathbf{K}[X]$.

49 Récitation d'exercices

1. Soit ϕ une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\phi' = \phi(1-\phi^2) \text{ et } \phi(0) = \frac{1}{2}. \tag{e}$$

   (a) On suppose dans cette question que ϕ ne prend ni la valeur 1, ni la valeur 0.
   Montrer que ϕ est croissante. Admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui la déterminer.

   (b) Montrer que ϕ ne prend pas la valeur 0.
   On pourra pour commencer montrer que ϕ est solution sur $\mathbf{R}_+$ d'une équation différentielle linéaire du première ordre.

   (c) Montrer que ϕ ne prend pas la valeur 1.
   Conclure.
2. Soit P un élément de de $\mathbf{R}[X]$ tel que pour tout réel x, $P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe A et B éléments de $\mathbf{R}[X]$ tels que : $P = A^2 + B^2$. simples.
3. *Révision.* Soit G un sous-groupe de $\mathbf{R}$. Montrer qu'il est soit dense, soit de la forme $a\mathbf{Z}$, où a est un réel.
   Version $\star\star$. Déterminer les sous-groupes compacts de $(\mathbf{C}, \times)$.
4. Montrer de deux manières que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique ; qu'en déduire sur son cardinal.

5. On admet la question précédente. Soit G un groupe cyclique d'ordre n. Soit d_0 un diviseur positif de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G à d_0 éléments. On désigne par φ l'indicatrice d'Euler. Montrer que : $\sum\limits_{\substack{1\leq d\leq n \\ d|n}} \varphi(d) = n$,

6. $\star$ Retrouver l'expression de l'indicatrice d'Euler d'un entier $n \geq 2$, en fonction de ses facteurs premiers par un argument probabiliste.

7. Soit un entier $n \geq 2$ Montrer que $(n-1)! \equiv -1\,[n]$. si et seulement si n est un nombre premier.

8. $\star$ Montrer dans le cas commutatif le cas particulier du théorème de Lagrange (cours).
   Montrer dans le cas général le théorème de Lagrange.

9. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre inférieur ou égal à 5. Quel est le cardinal minimal d'un groupe non commutatif ? On utilisera l'exercice précédent.
   $\star\star$ Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre inférieur ou égal à 7. On utilisera l'exercice précédent et le suivant.

10. $\star$ Soit $(G,+)$ un groupe dont tout élément distinct de e_G est d'ordre 2. Montrer que $(G,+)$ est commutatif. Montrer que le cardinal de G est une puissance de 2. On donnera deux preuves.

11. (a) Soient un entier $n \geq 2$, $c = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un p cycle de S_n et φ un élément de S_n. Déterminer la permutation $\varphi \circ c \circ \varphi^{-1}$.
    (b) En utilisant la question précédente montrer que l'ensemble $\{(1,2,\ldots,n); (1,2)\}$ engendre S_n.
    (c) $\star$ On supose $n \geq 3$. Montrer que l'ensemble des tricycles engendre A_n.
    (d) $\star\star$ Quel est le nombre minimal de transpositions qui engendrant S_n ?

12. $\star\star$ Soit G un groupe fini et a un de ses éléments. Montrer que le nombre de conjugués de a est égal à l'indice dans G du centralisateur de a (c'est-à-dire de $\{g \in \mathbf{G} | ag = ga\}$).
    On suppose que G est de cardinal p^k où p est un nombre premier et $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que le centre de G est d'ordre p^h où $h \in [\![1, k]\!]$.

13. (a) Soient a et b des entiers strictements positifs. Montrer l'existence de a' et b' entiers également strictement positifs tels que on ait :
    — Les relations de divisibilté $a'|a$, $b'|b$;
    — $\mathrm{pgcd}(a', b') = 1$;
    — $\mathrm{ppcm}(a, b) = a'b'$.
    Indication : On examinera les décompositions en facteurs premiers de a et b.

    (b) $\star$ Soient g et g' des éléments d'un groupe *abélien* G d'ordres respectifs m et m'. On suppose que m et m' sont premiers entre eux. Montrer que
    $$\omega(gg') = mm'.$$
    Si l'on ne suppose plus m et m' premiers entre eux, a-t-on $\omega(gg') = \mathrm{ppcm}(m, m')$?
    (c) $\star\star$ On appelle exposant du groupe G le plus petit commun multiple ϵ des ordres des ses éléments. Déduire de ce qui précède que G admet un élément z ayant pour ordre l'exposant du groupe G.
    (d) $\star\star$ Montrer que le groupe multiplicatif des inversible de $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$ est cyclique. Soit K un corps fini. Montrer que le groupe $(K \setminus \{0_K\}, \times)$ est cyclique.

Programme de colle n^{o}16

50 Groupes, anneaux, corps

— Groupes, sous-groupes, exemples de groupes et de sous-groupes du programme de MPSI.
— Morphismes de groupes : caractérisation de l'injectivité, image directe et réciproque d'un sous-groupe, isomorphisme de groupe
— Sous-groupes de $\mathbf{Z}$, groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
— Définition d'un sous-groupe engendré, ordre d'un élément, l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe.
— Groupes monogènes et cycliques. Structure des groupes monogènes.
— Anneau : sous-anneau, morphismes d'anneaux.
— Divisibilité dans les anneaux intègres. Idéal d'un anneau intègre, Idéaux de $\mathbf{K}[X]$.
— Dans $\mathbf{K}[X]$ ou $\mathbf{Z}$, PPCM, PGCD en termes d'idéaux, théorème de Bezout, théorème de Gauss.
— Décomposition en produit d'irréductibles (existence et unicité de la décomposition dans $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{K}[X]$. Irréductibles de $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$
— L'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Générateurs du groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Equivalence de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps, et n premier ; Théorème chinois. Indicatrice d'Euler, avec expression en fonction des facteurs premiers. Théorème d'Euler.
— Algèbre, définition, sous-algèbre définition et caractérisation, morphisme d'algèbres, exemples au programme.

51 Suites et séries d'applications $\mathcal{C}^k$, séries entières

— Convergence simple et uniforme des suites et séries d'applications, convergence normale des séries.
— Continuité de la la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp d'une série) d'applications continues d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de I.
— Etude de la convergence de la suite des primitives d'une suite d'applications continues de I à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de I. Résultat analogue pour les séries.
— Théorème de régularité de la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp. d'une série) d'applications de classe $\mathcal{C}^k$, à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie.
— Etude de la régularité de l'application $\mathbf{R} \to A$; $t \mapsto \exp(ta)$, où a est un élément d'une algèbre normée de dimension finie A. Application à l'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.
— *A venir : séries entières*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU. Hugo THILLEMAN.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

52 Questions de Cours

1. Théorème d'Euler.
2. Indicatrice d'Euler φ : si p et q sont premiers entre eux alors $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$, expression en fonction des facteurs premiers.
3. Dérivabilité de l'application $\mathbf{R} \to A$; $t \mapsto \exp(tM)$, où M est un élément de algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$). Application à l'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.

4. (Révision) Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension quelconque et ℓ une forme linéaire dont le noyau est H. Montrer que toute droite D non incluse dans H est un supplémentaire de H. Montrer qu'une forme linéaire ℓ' a pour noyau H si et seulement si il existe un élément λ non nul de $\mathbf{K}$ tel que $\ell = \lambda\ell'$.

53 Exercices

1. Soit P un élément de $Q[X]$ irréductible. Montrer que les racines complexes de P sont simples.
2. (a) Soit l'élément $P_0 = X^3 - X - 1$ de $\mathbf{Q}[X]$. Montrer que P_0 n'a pas de racines rationnelles, mais une racine ω réelle. Montrer qu'il est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.
   (b) Soit K le sous-espace vectoriel du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$ engendré par $(\omega^i)_{i\in\mathbf{N}}$. Donner une base de K. Montrer que K est un sous-corps de $\mathbf{R}$ et le plus petit sous-corps contenant ω.

   Soient A et B des élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
3. Montrer de deux manière que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
4. $\star$ Soit m un entier supérieur ou égal à 2. On appelle racines primitives m^{e} de l'unité les générateurs de $\mathbf{U}_m$. On pose : $\phi_m(X) := \prod\limits_{i=1}^{h_m}(X - \xi_i)$, où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{h_m}$ sont les h_m racines primitives m^{e} de l'unité (polynôme cyclotomique). On pose également $\phi_1(X) := X - 1$. Montrer
$$\prod_{\substack{1\leq d\leq n\\ d|n}} \phi_d = X^n - 1$$
   En déduire que ϕ_n est élément de $\mathbf{Z}[X]$.
5. $\star$ Soit p un nombre premier impair et y un élément de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$,
   (a) Montrer que $\prod\limits_{x\in(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*} x = \begin{cases} -y^{\frac{p-1}{2}}, & \text{si } y \text{ est un carré,}\\ y^{\frac{p-1}{2}}, & \text{sinon .}\end{cases}$
   Indication : on pourra regrouper les éléments dont le produit vaut y.
   (b) En déduire
$$\begin{cases} y^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}, & \text{si } y \text{ est un carré,}\\ y^{\frac{p-1}{2}} = -\bar{1}, & \text{sinon .}\end{cases}$$
6. (a) Résoudre dans $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$ l'équation d'inconnue a, $a^2 - \overline{100} = \bar{0}$.
   (b) Résoudre dans $\mathbf{Z}/121\mathbf{Z}$ l'équation d'inconnue a, $a^2 - \overline{100} = \bar{0}$.
   (c) Résoudre dans $\mathbf{Z}/221\mathbf{Z}$ l'équation d'inconnue a, $a^2 + \overline{11}a - \overline{12} = \bar{0}$.

   Abelleries
7. Soit $\sum a_n$ une série de réels convergente. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $\sum\limits_{k=0}^{n} ka_k = \mathrm{o}(n)$.
8. Soit p un nombre premier. Montrer que pour tout élément n de $\mathbf{N}^*$, $v_p(n!) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor$.

   Régularité de sommes de séries
9. Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, où pour tout entier naturel non nul n, u_n désigne l'application
$$u_n :]1, +\infty] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{1}{n^x}.$$
   (a) Montrer que la série de fonctions converge simplement sur $]1, +\infty]$.
   Nous noterons f la somme de cette série, application de $]1, +\infty]$ dans $\mathbf{R}$.
   (b) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty]$.
   (c) Donner un équivalent de f lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement supérieures.
10. Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, où pour tout entier naturel non nul $n \geq 2$, u_n désigne l'application
$$u_n :]1, +\infty] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ (x, y) \mapsto \frac{1}{n^x \ln(n)^y}.$$

(a) Montrer que la série de fonctions converge simplement.
Nous noterons f la somme de cette série.

(b) Montrer que f est continue.

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa différentielle.

11. Soit f la fonction de la variable réel x, définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

(a) Montrer que le domaine de définition de f est un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ à déterminer.

(b) Montrer que f est continue sur $[a, +\infty[$ et que sa restriction à $]a, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

(c) Etudier la limite de f en $+\infty$.

(d) f est elle dérivable en a.

12. $\star$ On dit qu'un polynôme non nul élément de $\mathbf{Z}[X]$ est primitif si le pgcd de ses coefficients est 1.

(a) Montrer que le produit de polynômes non nuls P et Q éléments de $\mathbf{Z}[X]$ primitifs est primitif.

(b) On appelle contenu un polynôme P non nul élément de $\mathbf{Z}[X]$, le pgcd de ses coefficients, et on note $c(P)$ cette quantité. Montrer que pour des polynômes non nuls P et Q éléments de $\mathbf{Z}[X]$,

$$c(PQ) = c(P)C(Q).$$

(c) $\star\star$ Soit P un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$. On suppose que P est le produit dans $\mathbf{Q}[X]$ de deux polynômes unitaires A et B Montrer que A et B sont éléments de $\mathbf{Z}[X]$. En déduire qu'il existe une matrice M à coefficients entiers, diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et dont le polynôme caractéristique est P.

13. $\star$ Soient p un nombre premier et $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{a \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} a^k = \bar{0} \text{ ou } -\bar{1}.$$

Préciser à quelle condition on est dans l'un ou l'autre cas (on pourra regarder si $p-1$ divise k ou non).

14. $\star\star$ Soit $(G, *)$ un groupe non abélien fini. On munit $G \times G$ de la probabilité uniforme et on note $n(G)$ la probabilité qu'un couple éléments de G ait ses deux composantes qui commutent ». Montrer que : $\boxed{n(G) \leq 5/8}$

Programme de colle n°17

54 Suites et séries d'applications de classe $\mathcal{C}^k$

— Continuité de la la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp d'une série) d'applications continues d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de I.
— Etude de la convergence de la suite des primitives d'une suite d'applications continues de I à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de I. Résultat analogue pour les séries.
— Théorème de régularité de la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp d'une série) d'applications de classe $\mathcal{C}^k$, à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie.
— Etude de la régularité de l'application $\mathbf{R} \to A\,;\ t \mapsto \exp(ta)$, où a est un élément d'une algèbre normée de dimension finie A. Application à l'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.

55 Séries entières

— Définition du rayon de convergence (lemme d'Abel).
— Sommes et produits de séries entières, rayons de convergence de la série somme et de la série produit.
— Séries entières dérivée et produit, rayons de convergence de la série dérivée et de la série produit.
— Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle (dérivation et primitivation termes à termes).
— Théorème d'Abel.
— Fonctions développables en séries entières. Définition. Unicité du développement en série entière, série de MacLaurin. Exemples au programme.
— Fonction génératrice d'une variable aléatoire. Application au calcul de l'espérance et de la variance, application à la loi géométrique. (*Le cours de probabilité n'a pas été traité, les exercices resterons très élémentaires*).
— *À venir réduction des endomorphismes, le retour.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU. Hugo THILLEMAN, Maxime LÉOST.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

56 Questions de cours

1. Rayon de convergence de la série somme et de la série produit.
2. Rayon de convergence de la série dérivée et primitive.

57 Exercices

1. Soit la série d'applications, $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$, où pour tout entier $n \geq 2$, $u_n : [-1,1] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$.
   (a) Montrer que la série converge simplement sur $[-1,1]$. Notons f sa somme, (définie sur $[-1,1]$).
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   (c) Monter que f est somme de sa série de MacLaurin. Donner le développement de f en série entière au voisinage de 0.
   (d) $\star$ Retrouver ce résultat par une autre méthode.

2. (a) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

   (b) Soit a un entier. Pour tout entier $n \geq 1$, a_n désigne la n^{e} décimale de $\sqrt{a}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$.

3. THÉORÈME D'ABEL [6] Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence égal à 1. On note S sa somme :

$$S :]-1,1[\to \mathbf{R};\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

   On suppose que la série complexe $\sum a_n$ converge.

   (a) Montrer que : $S(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\to} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ Dans les deux cas suivants :

      i. La série $\sum a_n$ converge absolument.

      ii. Il existe une suite décroissante de réels positifs $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, telle que pour tout naturel n,

$$a_n = (-1)^n u_n.$$

   (b) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

4. $\star$ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable réelle z, de rayon de convergence égal à 1. On note S sa somme On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \geq 0$ et que la série complexe $\sum a_n$ diverge. Montrer que $S(x) \underset{x\to 1, x\in[0,1[}{\to} +\infty$.

   On suppose que a_n est élément de $\mathbf{N}$, pour tout entier naturel n. Montrer que si f est bornée sur $\mathrm{B}_{\mathrm{o}}(0,1)$, alors c'est un polynôme.

5. $\star\star$ suite de la question précédente

   Soit $\sum b_n z^n$ une série entière de la variable complexe z, de rayon de convergence 1. On note g sa somme. On suppose que $b_n \in \mathbf{Z}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et que g est bornée sur $\mathrm{B}_{\mathrm{o}}(0,1)$. Montrer que g est un polynôme.

   On pourra montrer que pour tout élément r de $]0,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta.$$

6. $\star$ Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle dérangement de $\{1,\ldots,n\}$ toute permutation de $\{1,\ldots,n\}$ sans point fixe, et on note d_n le cardinal de l'ensemble des dérangements de $\{1,\ldots,n\}$; enfin on pose $d_0 = 1$. Soit la série entière :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n.$$

   Montrer que son rayon n'est pas nul ; déterminer sa somme. En déduire son rayon et que pour tout entier $n \geq 1$,

$$d_n = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

7. THÉORÈME DE LIOUVILLE —

   Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de la variable complexe z, de rayon de convergence R non nul. On note f sa somme : $f\ :\ \mathrm{B}_{\mathrm{o}}(0,R) \to \mathbf{C}\,;\ z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

   (a) Soit p un entier $n \geq 0$ et un réel r tel que $0 < r < \mathbf{R}$. Exprimer a_p au moyen de $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}\mathrm{d}\theta$.

   (b) On suppose que $R = +\infty$. Montrer que si f est bornée sur $\mathbf{C}$, alors f est constante.

8. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par, $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Développer f en série entière au voisinage de 0.

   Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par, $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x+2)^2}$. Développer f en série entière au voisinage de 0.

6. Ce théorème est au programme mais il est admis.

9. Calculer la somme de la série entière de la variable réelle t, $\sum(n^3+2n+5)t^n$, puis de $\sum \frac{n+1}{(n+2)n!}\, t^n$.

10. $\star\star$ Soit f une application d'un un ouvert convexe dans $\mathbf{C}$ développable en série entière au voisinage de chaque point. On veut montrer que si $|f|$ admet un maximum local en un point z_0, alors f est constante.

    (a) On suppose que f n'est pas constante. Soit $\sum a_n(z-z_0)^n$ la série de Taylor de f au voisinage de z_0. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $a_n \neq 0$. On note k le plus petit élément n de $\mathbf{N}^*$ tel que $a_n \neq 0$.

    (b) On notera, pour tout entier naturel n, ρ_n le module de a_n, θ_n son argument, élément de $]-\pi,+\pi]$, Pour $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $\phi \in]-\pi,+\pi]$, montrer que

    $$f(z_0+re^{i\phi}) = \rho_0 e^{i\theta_0} + \rho_k r^k e^{i(\theta_k+k\phi)} + \mathrm{o}(r^k)(r \to 0).$$

    (c) Conclure par un choix inspiré de ϕ.

    (d) A quelle condition $|f|$ peut-elle admettre un minimum local.

11. $\star\star$ — Théorème de Biberbach réel (Dieudonné) —
    Soit f la somme d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$, de rayon de convergence R supérieur ou égal à 1 de la variable complexe z, On suppose que tous les coefficients de la série entière sont réels, que $a_1 = 1$ et que la restriction de f à $\mathrm{D}_\mathrm{o}(0,1)$ est injective.

    (a) Soit z_0 un élément de $\mathrm{D}_\mathrm{o}(0,1)$; montrer que $f(z_0)$ est réel si et seulement si z_0 est réel. En déduire que si $\mathrm{Im}(z_0) \geq 0$ alors $\mathrm{Im}(f(z_0)) \geq 0$.

    (b) Calculer pour tout élément de $]0,1[$ et tout entier $n \geq 0$,

    $$\int_0^\pi \mathrm{Im}(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

    (c) Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leq n$.
    Indication on poura montrer que $|\sin(n\theta| \leq n|\sin(\theta)|$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout réel θ.

    (d) La majoration est-elle optimale ?

Programme de colles prévisionnel n^{o}18

---

58 Polynômes d'endomorphismes

Par u on désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n et par M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

— Polynôme en u en M : la substitution dans un polynôme de l'indéterminée par U ou M est un morphisme d'algèbres.

— Si λ est valeur propre de u (M) alors $p(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$ $(p(M)$.

— Idéal annulateur de u (M). Définition du polynôme minimal μ_u. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit, les valeurs propre de u (M) sont racines de tout polynôme anulateur. Les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres. Si d est le degré de μ_u, $(u^0, \ldots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbf{K}[u]$. Théorème de Cayley-Hamilton.

— Lemme des noyaux. Si u admet un polynôme caractéristique scindé, alors $\mathbf{E}$ est la somme d'espaces stables sur lesquels, u induit la somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent, application matricielle, dimension des sous-espaces caractéristiques.

— Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si il annule un polynôme scindé.

— l'endomorphisme u (la matrice M) est diagonalisable si et seulement si il annule un polynôme simplement scindé. Un endomorphisme induit par un endomorphisme est diagonalisable, u (M) est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.

— *À venir : intégrale à paramètre.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU. Hugo THILLEMAN, Maxime LÉOST.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

59 Questions de cours

1. L'ensemble des polynômes annulateurs d'un endomorphisme est un idéal non trivial, définition du polynôme minimal, racine de celui-ci.
2. Lemme des noyaux (pour deux polynômes).
3. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si il annule un polynôme simplement scindé.

60 Exercice

1. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi à valeurs dans $\mathbf{N}$, et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ indépendante des précédentes. On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n.
   Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$ et $S_0(\omega) = 0$, puis $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.
   (a) Montrer l'égalité $G_S = G_T \circ G_X$.
   (b) En déduire que, si T et les X_n sont d'espérance finie, alors S aussi et $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(T)\mathrm{E}(X_1)$.
2. Soient r un élément de $\mathbf{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_r)$ un élément de $(\mathbf{N}^*)^r$. Pour tout entier naturel n, on note p_n le nombre de solutions dans $\mathbf{N}^r$ de l'équation d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$,
$$a_1x_1 + \cdots + a_rx_r = n. \tag{9}$$
   Montre que la somme de la série génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ coïncide sur $]-1, 1[$ avec une fraction rationnelle à préciser. *Application* : Déterminer, pour tout entier naturel n, l'entier $p(n)$ dans le cas où $r = 2$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

3. $\star$ On garde les notations précédentes
   (a) Déterminer dans le cas où $a_1 = a_2 = ... = a_r$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le nombre p_n, en utilisant la série génératrice puis en utilisant les mots à $n+r-1$ lettres sur l'alphabet $\{|, -\}$ ayant exactement $r-1$ fois la lettre « $-$ ».
   (b) $\star\star$ On suppose $a_1, a_2, \ldots, a_r$ premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} cn^{r-1}$, où c est un réel à déterminer.
4. Soit M un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On suppose que M^3 est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.
   (*Version* $\star$) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que M^3 est diagonalisable et que $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(M^3)$. Montrer que M est diagonalisable.
5. Soit n un entier strictement positif et soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tous deux diagonalisables. On suppose que $\exp(A) = \exp(B)$. En comparant les espaces propres de A et de $\exp(A)$ montrer que $A = B$. Reprendre la question précédente en montrant que A est un polynôme en $\exp(A)$.
6. Soit M un élément non nul de $\mathcal{M}_{29}(\mathbf{R})$ tel que $M^3 = -M$. Déterminer son spectre complexe. Montrer qu'elle est semblable à $\mathrm{diag}(0_q, J, J, ...J)$, où q est un entier naturel impair et J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. Soient n un entier strictement positif, A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et B l'éléments de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{K})$, $\begin{pmatrix} 0_n & 2A \\ 4A & -2A \end{pmatrix}$.
   Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.
8. Déterminer les sous-espaces de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A où :
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
9. (a) $\star$ Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est un fermé. Montrer que 0_n est adhérent à la classe de similitude d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si M est nilpotente.
   (b) $\star\star$ Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.
10. Le retour de la matrice compagnon — Soient un entier $n \geq 2$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ des éléments de $\mathbf{K}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Donner par le calcul le polynôme caractéristique de M.
11. $\star$ Retrouver ce résultat sans calculs en utilisant le polynôme minimal de M.
12. Soit u et v des endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie n non nulle, qui commutent. Montrer qu'ils sont codiagonalisables. Même question pour une famille quelconque $(u_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes diagonalisables.
13. $\star$ Soit l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ M \mapsto (\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}(M^2), \ldots, \mathrm{tr}(M^n))$.
    (a) Montrer que φ est différentiable et calculer sa différentiel en un point quelconque M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
    (b) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{rg}(\mathrm{d}\varphi)(M) = \deg(\mu_M)$.
    (c) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le polynôme minimal est le polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
14. $\star\star$ Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle n sur le corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
    (a) Montrer que tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, l'ensemble $\mathfrak{I}_{\vec{x}}$ des polynômes P, éléments de $\mathbf{K}[X]$ tels que $P(u)(\vec{x}) = \vec{0}$ est un idéal non nul de $\mathbf{K}[X]$.
    On notera $\pi_{\vec{x}}$ son générateur unitaire.
    (b) Montrer qu'il existe un élément $\vec{a}$ de $\mathbf{E}$ tel que $\pi_{\vec{a}} = \mu$.
    (c) Montrer que l'ensemble A des éléments $\vec{x}$ tel que $\pi_{\vec{x}} = \mu$ est un ouvert dense.

CORRECTION DE LA QUESTION 8

La détermination des sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable est simple. Nous verrons prochainement le cas général qui offre plus de difficultés ?

Les éléments de $\mathbf{R}^4$ seront notés en colonne.

L'endomorphisme f de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A laisse stable les deux plans $\mathrm{vect}(E_1, E_2)$ et $\mathrm{vect}(E_3, E_4)$ l'examen des endomorphismes induits sur ces plans fournit une base de vecteurs propres et les trois valeurs propres 1,2 et 3 :

$$\mathbf{E}_1(f) = \mathrm{vec}((0,0,1,1)^\top)\,; \mathbf{E}_2(f) = \mathrm{vec}((1,1,0,0)^\top)\,; \mathbf{E}_3(f)\mathrm{vec}((1,2,0,0)^\top;, (0,0,1,-1).$$

• Droite stables

Le cas des droites stables est particulièrement simple que la matrice soit ou non diagonalisable.

Les droite stables, son les droites dirigées par un vecteur propre (droites propres). En effet une droite propre est stable (les espaces propres sont des sous-espaces vectoriels) ; soit réciproquement D une droite stable, en appelant U un de ses vecteurs directeurs, on a AU élément de D donc de la forme kU, avec k un réel, ce qui fait de U un vecteur propre.

On obtient ainsi toute les droites propres :

— $D = \mathrm{vec}((0,0,1,1)^\top)$;

— $D' = \mathrm{vec}((1,1,0,0)^\top)$;

— les droites D_t, avec $t \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, où $D_t = \mathrm{vec}(t(1,2,0,0)^\top + (0,0,1,-1)^\top)$ pour tout réel t et $D_\infty = \mathrm{vec}((1,2,0,0)^\top)$.

Soit plus généralement un sous-espace F stable par f. Alors le corollaire du théorème de diagonalisation par annulation d'un polynôme simplement scindé dit que l'endomorphisme g, induit par f sur F est diagonalisable.

Donc $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(g)} \mathbf{E}_\lambda(g)$.

Mais pour élément λ de $\mathrm{sp}(g)$ est est *a fortiori* élément de $\mathrm{sp}(f)$ et

$$\mathbf{E}_\lambda(g) = \mathbf{E}_\lambda(f) \cap F.$$

Donc

$$F = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3, \tag{10}$$

où pour $i = 1,2,3$ F_i est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}_i(f)$ éventuellement nul dans le cas ou i n'est pas valeurs propre de g.

Réciproquement tout sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^4$ de la forme (10) est clairement stable par f.

Appliquons.

• Plans stables

Les plans stables pas f sont les sous-espaces vectoriels suivants :

— $D \oplus D'$;

— $D \oplus D_t$; $t =\in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$;

— $D' \oplus D_t$; $t =\in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$;

— $\mathbf{E}_3(f)$.

• Hyperlans stables

Les espaces stables pas f de dimension 3 sont les sous-espaces vectoriels suivants :

— $D \oplus D' \oplus D_t$; $t =\in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$;

— $D \oplus \mathbf{E}_3(f)$;

— $D' \oplus \mathbf{E}_3(f)$.

Programme de colle n°19

61 Complément sur l'intégrale

- Théorème de convergence dominée de Lebesgue.
- Théorème de Fubini-Tonelli pour l'interversion $\int / \sum$ (fonctions positives).
- Théorème d'interversion d'une intégrale et de la somme d'une série de fonctions $\sum u_n$, lorsque pour tout entier naturel n, u_n est continue par morceaux intégrable et $\sum \int_I |u_n|$ converge.
- Utilisation du théorème de Lebesgues pour l'interversion $\int / \sum$.
- Explicitation du reste pour l'interversion $\int / \sum$ (cas géométrique).
- Théorème de continuité d'une intégrale sur un intervalle quelconque dépendant d'un paramètre.
- Théorème de dérivation d'une intégrale sur un intervalle quelconque dépendant d'un paramètre, généralisation à la classe $\mathcal{C}^k$.
- *À venir : Equations différentielles.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU. Hugo THILLEMAN, Maxime LÉOST.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

62 Questions de cours

1. *Révision.* Soit $M \in \mathcal{M}\ (R)$. Montrer que :

$$\mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ t \mapsto \exp(tM)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa dérivée.

63 Exercices

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On note les éléments de $\mathbf{R}^n$ en colonne, et on muni cet espace du produit scalaire canonique.
   (a) Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. Monter que F est stable par A si et seulement si $F^\perp$ est stable par $A^\top$.
   (b) **Application.** On suppose que $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Déterminer les plans stables par A.
   (c) $\star$ Soit $A_1, A_2, ...A_p$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ trigonalisables et qui commutent deux à deux. En utilisant la question 1. montrer qu'ils sont cotrigonalisables.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de permutation soit diagonalisable.
3. $\star\star$ Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ à valeur et $p \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $B^p = A$.
4. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, continue et bornée. Pour tout entier naturel n, justifier l'existence de $J_n = n\int_0^{+\infty} e^{-n^2t^2} f(t)\mathrm{d}t$.
   (a) $\star$ Montrer, par un raisonnement élémentaire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite à déterminer.
   (b) (Pour tous.) Reprendre la question précédente en utilisant le théorème de convergnce dominée.
5. Quand Fubini série/intégrale ne s'applique pas ! —
   Montrer l'existence de $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ et donner deux méthodes pour exprimer cette intégrale à l'aide de la somme d'une série.

6. Montrer que la fonction de la variable réelle x définie par $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t$, est définie sur $\mathbf{R}$. Montrer que f est développable en séries entières et exprimer son développement.
7. Fubini intégrale/intégrale — Soit f une application de $[a,b]\times[c,d]$ dans $\mathbf{R}$ continue, où $[a,b]$ et $[c,d]$ sont des ségments non réduits à un point.
   Montrer que
   $$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$
8. Soient f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et a un réel. On suppose que $f(a)=0$.
   (a) Montrer qu'il existe g élément de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tel que pour tout réel x, $f(x)=(x-a)\,g(x)$
   (b) On suppose de plus que $f'(a)=0$, Montrer qu'il existe g élément de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tel que pour tout réel x, $f(x)=(x-a)^2\,g(x)$
9. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et donner sa valeur.
   Indication : on étudiera les applications $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $G(x)=\int_0^1\frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t$
10. Soit la fonction de la variable réel x définie par : $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Déterminer son domaine de définition D et montrer qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition. Pour tout $x\in D$ montrer que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. Donner les variations de Γ ainsi que la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0^+.
11. $\star$ Soit un réel $x>0$. Pour tout entier $n\geq 0$, on considère l'application
    $$u_n\ :\ \mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}\,;\ t\mapsto\begin{cases}t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n, \text{ si } t\leq n,\\ 0, \text{ sinon.}\end{cases}.$$
    Montrer que $\int_0^{+\infty}u_n(t)\mathrm{d}t$ tend vers $\Gamma(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire : $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots.(x+n)}\right)$.
12. $\star$ Montrer que
    $$\tilde{\Gamma}\ :\ \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}_-\to\mathbf{R}\,;\ x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+x)}+\int_1^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$
    est un prolongement indéfiniment dérivable de Γ.
13. $\star$. On note les n-uplets de réels en colonne et on munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire canonique $(\cdot|\cdot)$.
    Soit F une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$
    (a) On suppose que pour tout $X\in\mathbf{R}^n$, la matrice $\mathrm{J}_F(X)$ est symétrique.
    Montrer que F dérive d'un potentiel.
    (b) On suppose que pour tout $X\in\mathbf{R}^n$, la matrice $\mathrm{J}_F(X)$ est antisymétrique.
    Montrer que $\mathbf{F}\ :\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\,;\ X\mapsto BX+C$, où $B\in\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ et $C\in\mathbf{R}^n$.
14. $\star\star$ Étude de $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$
    On admettra que les projecteurs sur les espaces caractéristiques d'une matrice sont polynomiaux en la matrice
    (a) Montrer que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est inclus strictement dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$.
    (b) Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe $p\in[\mathbf{C}]$ tel que $\exp(p(M))=M$. Que vaut $\exp[\mathcal{M}_((\mathbf{C}))$
    (c) Déduire de ce qui précède que :
    $$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))=\left\{A\in\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}),\exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R}),A=B^2\right\}.$$
    (d) Montrer que le groupe G engendré par $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$.

Indications pour la question 6.

Soient $x \in \mathbf{R}$ et $g\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \frac{\cos(tx)}{\operatorname{ch} t}$ L'application g est continue (par morceaux) et intégrable au voisinage de $+\infty$ puisque majorée par $2\exp(-\cdot)$, application notoirement intégrable au voisiange de $+\infty$.

Par ailleurs en posant pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \frac{(-1)^n x^{2n} t^{2n}}{(2n)!\operatorname{ch} t},$$

la série $\sum u_n$ converge simplement de somme g. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ la fonction u_n est intégrable, car lorsque t tend vers $+\infty$, on a $u_n(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Enfin pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} \left|u_n(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty} t^{2n}\exp(-t)\mathrm{d}t = \frac{2x^{2n}}{(2n)!}\Gamma(2n) = 2\frac{x^{2n}}{2n} \leq x^{2n}, \tag{11}$$

et donc en supposant $|x| < 1$, la série $\sum \int_{\mathbf{R}_+} |u_n|$ converge car son terme général est majorée par celui d'une série géométrique convergeante.

Le théorème d'interversion série/intégrale affirme que, toujours dans le cas où $|x| < 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t$.

Donc f est développable en séries entières au moins sur $]-1,1[$.

Indications pour la question 11

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$

Soit $t_0 \in \mathbf{R}_+^*$. Pour tout $n \geq t_0$, on a :

$$f(t_0) = t_0^{x-1}\left(1 - \frac{t_0}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} t_0^{x-1}\mathrm{e}^{-t_0}.$$

Autant dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f, où $f\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}, t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

Soient $t \in \mathbf{R}_+^*$ et $n \in \mathbf{N}$, par convexité du logarithme et croissance de l'exponentiel, si $t \leq n$ alors

$$u_n(t) = t^{x-1}\exp\left(n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leq t^{x-1}\exp\left(n - \frac{t}{n}\right) = f(t)\,;$$

si $t \geq n$ alors la précédente majoration est trivialement vraie ($f \geq 0$). De plus f est — on l'a vu — intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

Donc $\int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t$ tend vers $\int_0^{+\infty} f = \Gamma(x)$, lorsque n tend vers $+\infty$, par le théorème de convergence de Lebesgue.

La fin est asinitrottante.

Programme de colle n°20

64 Equations différentielles linéaires

On désigne par $\mathbf{K}$ le corps des réels ou des complexes, par $\mathbf{E}$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et par I un intervalle d'intérieur non vide.

- Équation différentielle linéaire du premier ordre vectorielle à coefficient constant

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = a \cdot \vec{y} + \vec{b}(t), \tag{12}$$

avec $a \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{E})$.

— Définitions des solutions sur un intervalle, de la solution d'un problème de Cauchy, de l'équation homogène associée.

— Expression grâce à une exponentielle, de la solution de l'équation homogène et de la solution d'un problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée sur un intervalle J est un espace vectoriel de dimension n. Application au calcul de l'exponentielle de la somme de deux matrices ou endomorphismes qui commutent.

— Résolution pratique de la forme matricielle de l'équation homogène associée à (12) par réduction de la matrice (aucune technicité n'est exigible en dehors des cas où a est diagonalisable).
La résolution de l'équation (12) par abaissement du degré (≪ variation de la constante ≫) n'est plus au programme.

- Équation différentielle linéaire du premier ordre vectorielle à coefficient non constant

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = a(t) \cdot \vec{y} + \vec{b}(t), \tag{13}$$

avec $a \in \mathcal{C}^0\left(I, \mathcal{L}(\mathbf{E})\right)$, $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{E})$.

— Définitions des solutions sur un intervalle, de la solution d'un problème de Cauchy, de l'équation homogène associée.

— Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (admis, mais la mise sous forme intégrale du problème de Cauchy est au programme). L'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation homogène associée à (13) est un espace vectoriel de dimension n, l'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation (13) est un espace affine.
Plus aucune autre connaissance n'est au programme.

- Équation différentielle linéaire du deuxième ordre scalaire à coefficients non constants

$$a(t)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + b(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + c(t)y = d(t), \tag{14}$$

avec a, b, c et d éléments de $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$.

— Définitions des solutions sur un intervalle, de la solution d'un problème de Cauchy, de l'équation homogène associée. Système linéaire du premier ordre associé.

— Structure de l'ensemble des solutions de (14) et de l'équation homogène associée sur un intervalle J sur lequel a ne s'annule pas, théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

— Wronskien d'une famille (φ_1, φ_2) de deux solutions de l'équation homogène associée à (14). Equation différentielle vérifiée par le wronskien. Caractérisation de la liberté de (φ_1, φ_2).

— Résolution de l'équation (14), lorsque l'on dispose d'une famille (φ_1, φ_2) de deux solutions sur J de l'équation homogène associée : méthode de la base mobile.

— Étude sur des exemples, de solutions sur un intervalle sur lequel a s'annule.

— les Sturmeries ne seront vues que lundi (en TD)

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU. Hugo THILLEMAN, Maxime LÉOST.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

65 Questions de Cours

1. Montrer, en admettant le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, que l'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation homogène associée à (13) est un espace vectoriel de dimension n, l'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation (13) est un espace affine. Donner une norme simple sur l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (13).
2. $\star\star$ Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour (13), on se limitera à un segment.

66 Exercice

1. Transformée de Fourier — Soit l'application. $f \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{C} \ ; \ x \mapsto \exp\left(-x^2\right)$, Montrer que pour tout réel k est définie la quantité : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i2\pi kt)\,\mathrm{d}t$, noté $\hat{f}(k)$. Montrer que l'application $\hat{f} \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\ k \mapsto \hat{f}(k)$ est dérivable et donner sa dérivée. En déduire $\hat{f}$.
2. Transformée de Laplace cas général — Soit f une application continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$.
   On suppose qu'il existe un réel p_0 tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\exp(-p_0 x)\mathrm{d}x$ converge. Montrer que pour tout réel $p > p_0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\exp(-px)\mathrm{d}x$ converge.
   Montrer que l'application $\mathcal{L}(f) \ : \ [p_0, +\infty[\to \mathbf{R}\,;\ p \mapsto \int_0^{+\infty} f(x)\exp(-px)\mathrm{d}x$, est continue en p_0.
3. Montrer l'existence et, en admettant la question précédente, donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$.
4. Révision — Soit $\delta \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,; M \mapsto \det(M)$. Montrer que δ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner sa différentielle, au moyen du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:
   — en calculant les dérivées partielles ;
   — en utilisant la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
5. Soit l'équation différentielle
   $$x'' + q(t)\,x = 0, \tag{15}$$
   où q est une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ intégrable. Montrer l'existence de solutions non bornées.
6. $\star\star$Lemme de Gronwall, le vrai—
   (a) Soient u et v des applications continues de $[t_0, t_0 + T]$ dans $\mathbf{R}$ à valeurs *positive* et C un réels tels que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$,
   $$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t u(s)v(s)\mathrm{d}s.$$
   Montrer que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$,
   $$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^t v(s)\mathrm{d}(s)\right).$$
   (b) Soit l'équation différentielle
   $$x'' + q(t)\,x = 0, \tag{16}$$
   où q est une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} s|q(s)|\mathrm{d}s$ converge.
   Soit ϕ une solution sur $\mathbf{R}_+$ de (16). Montrer que $t \mapsto \frac{\phi(t)}{t}$ est bornée sur $[1, +\infty]$.
7. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} + 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0$.
8. (a) Soit $\vec{\psi}$ une solution de (13) définie sur $I = \mathbf{R}$. On suppose que et que a et b sont impaires. Montrer que $\vec{\psi}$ est paire.
   (b) On suppose que les coefficients a, b, c et d de l'équation (14) sont définis sur $\mathbf{R}$, 2π-périodiques et que a ne s'annule pas. Montrer qu'une solution ψ sur $\mathbf{R}$ de (14) est 2π-périodique si et seulement si $\psi(0) = \psi(2\pi)$, et $\psi'(0) = \psi'(2\pi)$.
9. Déterminer des solutions de l'équation différentielle $\left(1 + x^2\right)\ y'' + x\,y' - \ \frac{1}{4}\ y = 0$, développables au voisinage de 0 en série entière.
   En déduire la forme générale des solutions de l'équation sur $]-1, 1[$.
10. (a) Soit a un réel, et b une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue bornée.
    Soit l'équation différentielle : $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = ay + b(t)$. On suppose que a est positif strictement. Montrer qu'il existe une et une seule solution de cette équation sur $\mathbf{R}$ qui soit bornée. Que dire si a est négatif ?

(b) (Ou bien) $\star$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On supose A diagonalisable. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

i. Pour tout application B de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ continue et bornée, l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX + B(t) \tag{17}$$

admet une et une seule solution sur $\mathbf{R}_+$ bornée.

ii. Les valeurs propres de A ont toutes une partie réelle strictement positive.

(c) (Ou bien) $\star\star$ Reprendre la question sans supposer A diagonalisable.

11. $\star$ Soient $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{E}$ et S l'ensemble des solutions de l'équation $\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = a(t)\cdot\vec{y}$ avec $a \in \mathcal{C}^0\left(I, \mathcal{L}(\mathbf{E})\right)$). Soient t_1 et t_2 des élément de I. Montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout élément $\vec{\phi}$ de S, $\|\vec{\phi}(t_1)\| \leq k\|\vec{\phi}(t_2)\|$.

12. $\star\star$ Soit A une application continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que pour tout réel $t > 0$, $A(t)$ ait tous ses coefficients strictement positifs. On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = -A(t)X. \tag{18}$$

(a) On note $\mathbf{1}$ l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ ayant tous ses coefficients égaux à 1. Pour tout entier $k \geq 1$, on note Φ_k la solution sur $\mathbf{R}_+$ du problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l}(18),\\ X(k) = \mathbf{1}.\end{array}\right.$ Montrer que pour tout $t \in [0, k]$, les n composantes de $\Phi_k(t)$ sont supérieures ou égales à 1.

(b) En déduire l'existence d'une solution Φ de (18) sur $\mathbf{R}_+$, non identiquement nulle et dont toutes les composantes sont à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.

Indication : On peut considérer la suite $\left(\frac{\Phi_k}{\|\Phi_k(0)\|}\right)_{k\in\mathbf{N}^*}$, où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

13. $\star\star$ Sous-groupes à un paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$

Soit Φ un élément de $\mathcal{C}^0(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \mathbf{R})$, telle que pour tout t et tout s réels , $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \varphi(t) = \exp(tA).$$

Corrections et indications

Question 10 (a)

Notons pour tout réel c, e_c l'application $\exp(c\cdot)$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\mathrm{vect}(e_r, e_{-r})$, avec $r\sqrt{a}$.

Soit ϕ une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Il existe deux application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, ψ_1 et ψ_2, (coordonnées de $\begin{pmatrix}\phi\\ \phi'\end{pmatrix}$ dans la base mobile $\left(\begin{pmatrix}e_r\\ e'_r\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}e_{-r}\\ e'_{-r}\end{pmatrix}\right)$, telles que :

$$\begin{aligned}\phi &= \psi_1 e_r + \psi_2 e_{-r}\\ \phi' &= \psi_1 e'_r + \psi_2 e'_{-r}\end{aligned}$$

En dérivant la première égalité et en retranchant la seconde, vient :

$$\psi'_1 e_r + \psi'_2 e_{-r} = 0.$$

En dérivant la seconde [7] :

$$\phi'' = \psi'_1 e'_r + \psi'_2 e'_{-r} + \cdots$$

Donc ϕ est solution de l'équation avec second membre si et seulement si

$$\begin{cases}\psi'_1 e_r + \psi'_2 e_{-r} = 0\\ \psi'_1 e'_r + \psi'_2 e'_{-r} = b\end{cases},$$

Soit si et seulement si :

$$\psi'_1 = \frac{-be_{-r}}{-2r},\ \psi'_2 = \frac{be_r}{-2r}.$$

Remarquons alors que $e_{-r}b$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, puisque b étant bornée, $|b(t)\mathrm{e}^{-rt}| = \underset{t\to+\infty}{O}(\mathrm{e}^{-rt})$ et que de même $e_r b$ est intégrable au voisinage de $-\infty$. Donc ϕ est solution si et seulement si, il existe des réels c_1 et c_2 tels que pour tout réel t :

$$\psi'_1(t) = -\frac{1}{2r}\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-rs}b(s)\mathrm{d}s + c_1;\ \psi'_2(t) = -\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{rs}b(s)\mathrm{d}s + c_2,$$

L'ensemble des solutions de l'équation avec second membre est : $\{\phi_{c_1,c_2}, (c_1,c_2)\in\mathbf{R}^2\}$, avec :

$$\phi_{c_1,c_2}\ :\ t\mapsto -\frac{1}{2r}\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-rs}b(s)\mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{t} + \frac{-1}{2r}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{rs}b(s)\mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-t} + c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{-t}.$$

Montrons que $\phi_{0,0}$ est bornée, alors comme pour tout élément (c_1,c_2) de $\mathbf{R}^2$, non nul, $c_1 e_r + c_2 e_{-r}$ a une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$, ce sera l'unique solution bornée.

Comme b est bornée,en posant $M = \|b\|_\infty$,

$$\left|\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-rs}b(s)\mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{t}\right| \le \int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-rs}M\mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{t} \le \frac{M\mathrm{e}^{-t}}{r}\mathrm{e}^{t} \le \frac{M}{r}.$$

De même

$$\left|\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{rs}b(s)\mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-t}\right| \le \frac{M}{r}.$$

Finalement $\varphi_{0,0}$ est bornée et est la seule solution bornée.

(b) et (c).

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $\|\cdot\|$ défine par, pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\|M\| = \sup_{\|X\|_\infty\le 1} \|MX\|_\infty.$$

• Hypothèse : on suppose i.

En particulier, pour B nulle (17) admet une et une seule solution bornées sur $\mathbf{R}_+$ qui est évidemment l'application nulle. Soient $\lambda\in\mathrm{sp}(A)$, et U un vecteur propre associé. La solution $t\mapsto\exp(tA)U$ est donc non bornée, mais pour tout $t\in\mathbf{R}_+$,

$$\exp(tA)U = \exp(\lambda t)U,$$

7. Je n'écris pas les termes en ψ_i.

et donc

$$\|\exp(tA)U\|_\infty = \exp(\mathrm{Re}(\lambda)t)\|U\|_\infty.$$

Comme pour tout réel $r \leq 0$, l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ est bornée sur $\mathbf{R}_+$, voilà que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$.

• HYPOTHÈSE : on suppose ii.

SUPPOSONS A DIAGONALISABLE (QUESTION (b)).

Nous avons choisi de faire une preuve élémentaire qui renonce à user de l'exponentielle de matrice, ce afin de ne pas nous écarter du programme et pour ne pas faire du (b) un sous produit du (c). Nous recommendons donc à tous la lecture du (c), qui pourra du reste constituer une source d'inspiration pour le DM 11.

Par E nous désignerons l'ensemble des applications de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, de classe $\mathcal{C}^1$. Soit B une application $\mathbf{R}_+$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ continue et bornée. . Soit $\mathcal{U} = (U_1, ..., U_n)$ une base de vecteurs propres, notons λ_i la valeur propre associé à U_i, pour $i = 1, ..., n$ et $P = \left(\begin{array}{c|c|c} U_1 & \cdots & U_2 \end{array} \right)$ (matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{U}$ et $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Soit Φ élément de $\mathbf{E}$; posons $\Psi = P^{-1}\Phi$. Alors Φ est solutionsur $\mathbf{R}_+$ de (17) si et seulement si Φ est solutionsur $\mathbf{R}_+$ de

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \Delta Y + P^{-1}B(t), \tag{19}$$

ou, si l'on préfère, en notant b_i la i^{e} composante de B de est solutionsur $\mathbf{R}_+$ de

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \lambda_i y_i + b_i,\ i = 1, ...n. \tag{20}$$

Comme B est bornée $P^{-1}B$ l'est aussi et donc les applications b_i, pour $i = 1, ..., n$ sont bornées, si bien que

$$\exp(-\lambda_i t)b_i = \underset{t \to +\infty}{O} \left(\exp(-\mathrm{Re}(\lambda_i)t)\right).$$

Donc pour tout $i \in \{0, ..., n\}$ $t \mapsto \exp(-\lambda_i t)b_i$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, par négativité de $-\mathrm{Re}(\lambda_i)$.

La méthode de variation de la constante de sup. assure alors que, l'ensemble des solutionsur $\mathbf{R}_+^*$ de (20) est $\{\Psi_C, C \in \mathbf{C}^n\}$, où

$$\Psi_C\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})\,;t \mapsto \left(c_i \exp(\lambda_i t) - \int_t^{+\infty} \exp((t-s)\lambda_i)b_i(s)\mathrm{d}s\right)_{i=1,...n}$$

Soit $i \in \{1, n\}$.

D'une part

$$|\exp(\lambda_i t)| = \exp(\mathrm{Re}(\lambda_i)t) \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty,$$

par positivité de $-\mathrm{Re}(\lambda_i)$.

D'autre part

$$\left|\int_t^{+\infty} \exp((t-s)\lambda_i)b_i(s)\mathrm{d}s\right| \leq \|b_i\|_\infty \int_t^{+\infty} \exp((t-s)\mathrm{Re}(\lambda_i))\mathrm{d}s \leq \frac{\|b_i\|_\infty}{\mathrm{Re}(\lambda_i)}.$$

Donc Ψ_C est pour tout élément C de $\mathbf{C}^n$ non nul non bornée, puisque au moins une de ses composantes n'est pas bornée et Ψ_0 est bornée, puisque toutes ses composantes le sont.

L'ensemble des solutionsur $\mathbf{R}_+$ de (17) est $\{P\Psi_C, C \in \mathbf{C}^n\}$, or pour $C \in \mathbf{C}^n$, $P\,\Psi_C$ est bornée si et seulement si Ψ_C l'est, par continuité des applications linéaires $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), M \mapsto PM$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), M \mapsto P^{-1}M$, donc (17) admet une et une seule solmutionsur $\mathbf{R}_+$ bornée c'est $P\Psi_0$.

D'où i.

Cas général

On a d'après le cours que M s'écrit :

$$M = P\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{d_1} + N_1, ..., \lambda_1 I_{d_k} + N_k)P^{-1},$$

avec $N_1, ..., N_k$ nilpotentes... etc., etc., etc...

ON NE SUPPOSE PLUS A DIAGONALISABLE (QUESTION (C)).

Cas particulier : $A = \lambda I_n + N$, avec N nilpotent, ici λ unique valeur propre de A est donc de partie réelle r strictement positive.

Lemme. *L'application $t \mapsto \exp(-tA)B(t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.*

Preuve : Comme N et λIn commutent $\exp(-tA) = \exp(-t\lambda I_n)\exp(-tN) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-tN)^k}{k!}$, où p est l'indice de nilpotence de N.

Donc pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$\|\exp(-tA)\| \leq \mathrm{e}^{-rt}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(t\|N\|)^k}{k!} \leq C\mathrm{e}^{-tr'}$$

où C est une constante et $r' = \frac{1+r}{2}$. Donc pour tout $t \geq 0$

$$\|\exp(-tA)B(t)\|_\infty \leq MC\mathrm{e}^{-tr'},$$

Où M est un majorant de $\{\|B(t)\|_\infty, t \in \mathbf{R}_+\}$, réel dont l'existence est assuré par le caractère borné de B.

Donc chaque composante de $t \mapsto \exp(-tA)B(t)$ a un module négligeable devant $\frac{1}{t^2}$, ce qui assure son l'intégrabilité et — c'est la définition que nous adopterons en tout cas — l'intégrabilité de $t \mapsto \exp(-tA)B(t)$, au voisinage de $+\infty$.

Le lemme étant acquis, en appliquant la méthode variation de la constante, on trouve : $S_{17} = \{\Phi_C, C \in \mathbf{C}^n\}$,, avec

$$\Phi_C \ : \ t \mapsto \int_t^{+\infty} -\exp((t-s)A)B(s)\mathrm{d}s + \exp(tA)C$$

Or

$$\|\Phi_0\|_\infty \leq \int_t^{+\infty} \|\exp((t-s)A)B(s)\|_\infty \mathrm{d}s \leq MC\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{(t-s)r'}\mathrm{d}s \leq \frac{MC}{r'}.$$

D'où le caractère borné de Φ_0. Par ailleurs, on montre facilement que $t \mapsto \exp(tA)C$ est non bornée au voisinage de $+\infty$. Donc Φ_0 est la seule solution bornée au voisinage de $+\infty$.

Cas général

On a d'après le cours que M s'écrit :

$$M = P\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{d_1} + N_1, ..., \lambda_1 I_{d_k} + N_k)P^{-1},$$

avec $N_1, ..., N_k$ nilpotentes... etc., etc., etc...

Question 6.

(a) Poser $w = C = \int_{t_0}^{\bullet} uv$ et montrer que w est solution d'une inéquation différentielle linéaire.

(b) Écrire pour ϕ la formule de Taylor reste intégrale à l'ordre 1 entre 1 et un réel t , supérieur à 1, remplacer dans le reste ϕ'' par $-q\phi$ et appliquer le lemme de Gronwall à $\frac{\phi}{\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+}}$.

Question 13 Montrer que φ est dérivable (régularisation par intégration classique) puis dériver...

$\star$ En remplacement : étudier le problème de Cauchy suivant. $x'' - |x| = 0, \quad x\ (0) = a, x'\,(0) = 0.$ où a est un réel.

Programme de colles n°21

67 Espaces Préhilbertien, révision de MPSI

— Produit scalaire, propriétés, formules de polarisations, égalité du parallélogramme. Formule de Cauchy-Schwarz cas d'égalité, norme associée à un produit scalaire.
— Supplémentaire orthogonal, quand il existe il est unique et c'est l'orthogonal, existence pour un sous-espace de dimension finie, théorème de projection sur un sous-espace de dimension finie.
— Étude sur des exemples de familles de polynômes orthogonaux.
— *Les suites totales orthonormées, inégalité de Bessel, égalité de Parseval ne sont plus au programme.*
— *Á venir, Espaces euclidien*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER, Ael BONIOU, Tristan D'HERVÉ, Camille LE BIHAN, Maïwen Le CAILLEC, Alexandre TOUX, Alex ZEITLER, Maël Kerjean, Enzo MOUREAU. Hugo THILLEMAN, Maxime LÉOST.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$: Quentin ROBIDOU, Janosch LAUBÉ-RAINER .

68 Questions de Cours

1. Inégalité de Cauchy et Schwarz pour une forme bilinéaire positive. Cas d'égalité.

69 Exercices

1. Étudier le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' = |y|, \\ y(0) = a, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

où a est un réel positif ou nul.
Ou version $\star$ Étudier le même problème avec $a = -1$.

2. Soit (f, g) une base de solutions sur I de l'équation différentielle homogène :

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \tag{21}$$

où p et q sont des applications de I dans $\mathbf{R}$ continues.

(a) Montrer que les zéros de f sont isolés.

(b) Prouver qu'entre deux zéros consécutifs de f, il y a exactement un zéro de g. On pourra étudier le signe du wronskien de f et g. On représentera les orbites de (22), on interprétera géométriquement w et on justifiera l'idée de son emploi.

3. Soit $(\mathbf{E}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On appelle déterminant de Gram d'une famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ d'éléments de $\mathbf{E}$ (où $n \in \mathbf{N}^*$), le déterminant de la matrice $(\langle x_i \mid x_j \rangle)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,n}}$ (matrice de Gram), on le notera $\mathrm{Gram}\,(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$.
a) Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ une famille d'éléments de de $\mathbf{E}$. Montrer que cette famille est libre si et seulement si, $\mathrm{Gram}\,(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n) \neq 0$.
b) Soit $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$. Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ une base de $\mathbf{F}$, et $\vec{a}$ un élément de $\mathbf{E}$ montrer que :

$$\frac{\mathrm{Gram}\,(\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)}{\mathrm{Gram}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)} = \mathrm{d}\,(\vec{a}, \mathbf{F})^2 .$$

4. Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien. Soit $\mathbf{F}$ un espace de dimension n contenant ces vecteurs et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbf{F}$. On note A la matrice de la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ dans $\mathcal{B}$. Exprimer $\mathrm{Gram}\,(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ en fonction de A. Retrouver le 32. a)
Interpréter pour $n = 2$ géométriquement le 3.(b).

Par un choix judicieux de $\mathcal{B}$ montrer que

$$0 \leq \text{Gram}\,(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n) \leq \prod_{i=1}^{n} \|\vec{x}_i\|^2.$$

Dans quel cas a-t-on égalité !

5. On note $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. On munit $\mathbf{E}$ du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par $\langle f|g \rangle = \int_{[-1,1]} fg$, la norme associée sera notée $\| \cdot \|$. Montrer qu'il existe une et une seule famille $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonale et échelonnée. Donner une formule de récurrence définissant la famille.
6. (*Suite de la question précédente*)
   Posons pour tout entier naturel n,
   $$H_n(X) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n} \left((X^2 - 1)^n \right).$$
   Pour tout entier naturel n exprimer p_n en fonction de H_n.
7. (*Suite des questions précédentes.*) Soit $f \in \mathbf{E}$. Montrer que si l'on pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $p_n^* = \frac{p_n}{\|p_n\|}$ et $c_n(f) = \langle f|p_n^* \rangle$, alors la série $\sum c_n(f) p_n^*$ converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \| \cdot \|)$ vers f.
   Montrer qu'en notant S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum c_n(f)p_n^*$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'application $f - S_n$ admet au moins $n+1$ zéros distincts.
8. Soit $(\Omega(P))$ un espace probabilisé fini.
9. Montrer que $|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$.
10. Soit (f, g) une base de solutions sur I de l'équation différentielle homogène :
    $$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \tag{22}$$
    où p et q sont des applications de I dans $\mathbf{R}$ continues.
    (a) Montrer que les zéros de f sont isolés.
    (b) Prouver qu'entre deux zéros consécutifs de f, il y a exactement un zéro de g. On pourra étudier le signe du wronskien de f et g. On représentera les orbites de (22), on interprétera géométriquement w et on justifiera l'idée de son emploi.
11. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$ et d'espérance strictement positive. Montrer que :
    $$\mathrm{P}(X \geq 1) \geq \frac{\mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}(X^2)}.$$
12. Montrer que l'ensemble
    $$\left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x} \left| x^2 + ax + b \right|^2 \mathrm{d}x,\ (a,b) \in R^2 \right\}$$
    admet une borne inférieure à déterminer.
13. $\star$ Soit h de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout réel p, on considère le problème de Cauchy suivant
    $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ty + h(t,p), \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{C_p}$$
    Pour tout réel p on désignera par $t \mapsto \phi(t,p)$ la solution sur $\mathbf{R}$ de (23). On définit ainsi une application ϕ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.
    (a) Donner, pour tout réel t, l'expression de ϕ au moyen de $\displaystyle\int_0^t \frac{h(s,p)}{g(s)} \mathrm{d}s$.
    (b) Montrer l'existence de $\dfrac{\partial \phi}{\partial p}(t,p)$, pour tout élément (t,p) de $\mathbf{R}^2$.
    (c) – Montrer l'existence de $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial p}$ et de $\frac{\partial^2 \phi}{\partial p \partial t}$.
    – Comparer $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial p}$ et $\frac{\partial^2 \phi}{\partial p \partial t}$.
14. $\star$ Soit δ une appliccation de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+^*$, continue et constante sur $[2, +\infty[$ de valeur 1.
    Pour tout réel γ, on note ϕ_γ la solution sur $\mathbf{R}_+$ du problème de Cauchy :
    $$y'' = \gamma \delta y\,;\, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

(a) Étudier le nombre de zéros de ϕ_γ, est-il, fini, infini ?

(b) ⋆⋆ On suppose que γ est strictement négatif. On note $z(\gamma)$ le plus petit zéro non nul de ϕ_γ. Déterminer la limite de $z(\gamma)$ lorsque γ tend vers 0.

15. ⋆⋆ Soit ε une application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ continue de limite nulle en $+\infty$. On considère une solution sur $\mathbf{R}_+$, non nulle, ϕ de

$$x'' - \varepsilon(t)x + x = 0.$$

Soient $b \geq 0$ et pour tout réel $t \geq b$,

$$N_b(t) = |\{u \in [b, t] | \phi(u) = 0\}|$$

Montrer que pour b assez grand, $N_b(t) \sim \frac{t}{\pi}$, lorsque t tend vers $+\infty$.
On pourra passer en polaire et motrer que $\theta(t) \sim -t$, lorsque t tend vers $+\infty$.

16. ⋆⋆—Théorème de Bôcher — Soit q une application continue sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelle et intégrable. Montrer qu'il existe une et une seule solution ϕ_0 sur $\mathbf{R}_+$ à valeur complexe de

$$x'' + (1 + q)x = 0, \tag{23}$$

telle que $\phi(t) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ tende vers 0, lorsque t tend vers $+\infty$.
On pourra pour commencer montrer que pour toute solution ϕ de (23) sur $\mathbf{R}_+$, il existe un et un seul couple (α, β) de réels tels que $\phi(t) = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + o(1)\,; t \to +\infty$.

Indications

Question 7, la fin Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $f - S_n(f)$ admet un nombre infini de zéros soit il en admet un nombre fini. Dans ce dernier cas considérons les zéros éventuels de $f - S_n(f)$ éléments de $[-1,1]$ en lesquels $f - S_n(f)$ change de signe, x_1,...,x_k (notons que $f - S_n(f)$, application continue, ne change de signe qu'en un zéro) et posons $P = \prod_{i=1}^{k}$ en convenant qu'un produit vide vaut 1. Supposons $k \leq n$

D'abord $P(f - S_n(f))$ est de signe constant sur $[-1,1]$; ensuite $f - S_n(f)$ est orthogonal à $R[X]_n$ donc à P et donc :

$$0 = \langle f - S_n | P \rangle = \int_{[-1,1]} P(f - S_n(f)).$$

Comme $P(f-S_n(f))$ est continue de signe fixe $P(f-S_n(f))$ est nulle et comme $(f-S_n(f))$ est non nul (nombre fini de zéros), on a $P = 0$ ce qui est absurde !

Donc $(f - S_n(f))$ admet dans ce cas aussi au moins $n+1$ zéros.

Question 13.

1. Classiquement :

$$\phi \ : \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \, ; \ (p,t) \mapsto \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \int_0^t h(s,p) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \mathrm{d}s.$$

2. Pour tout t élément de $\mathbf{R}$, le théorème de dérivation d'une intégrale de paramètre p sous sa forme locale, (la valeur absolue de la dérivée partielle en p se majore par une constante sur le compact $[0,t] \times [a,b]$ par continuité), assure l'existence de $\frac{\partial \phi}{\partial p}$ et que pour tout $p \in \mathbf{R}$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial p}(t,p) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \int_0^t \frac{\partial h}{\partial p}(s,p) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \mathrm{d}s.$$

3. Puisque dans la résolution de (23), seul le caractère continu en la première variable de h a été sollicité, c'est avec plaisir que l'on reconnait en $\frac{\partial \phi}{\partial p}(\cdot, p)$ la solution sur $\mathbf{R}$ du problème de Cauchy (23) dans lequel on a remplacé h par $\frac{\partial h}{\partial p}$, donc $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial p}$ est défini sur $\mathbf{R}^2$, (comme le prétend aussi le théorème fondamental de l'analyse) et pour tout $(t,p) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial p} = t \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{\partial h}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(t\phi + h) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial p \partial t},$$

   où t désigne abusivement, mais de manière expressive, la première projection de $\mathbf{R}^2$. Voilà prouvé, en même temps que l'existence de $\frac{\partial^2 \phi}{\partial p \partial t}$, l'égalité de cette application avec $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial p}$.