Fonctions holomorphes

On admettra le résultat suivant (voir TD).

Pour toute applucation g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$, la série d'applications (série de Fourier

$$c_0(g) + \sum_{n=\geq 1} c_n(g)\exp(in\cdot) + c_{-n}(g)\exp(-in\cdot),$$

où pour tout $n \in \mathbf{Z}$

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\exp(-int)\mathrm{d}t,$$

converge normalement de somme g.

Définitions premières propriétés

Soit f une application d'un ouvert U non vide de $\mathbf{C}$ (vu comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2), à valeurs complexes. On dit que f est $\mathbf{C}$-dérivable en un point z_0 de U si, par définition, $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ admet une limite lorsque z tend vers z_0 par valeurs distinctes. Si f est $\mathbf{C}$-dérivable en z_0 on note $f'(z_0) := \lim_{z\to z_0, z\neq z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ et l'on appelle cette quantité *dérivée complexe de f en z_0.*

1. Montrer que f est $\mathbf{C}$-dérivable en un point z_0 de U si et seulement si il existe un complexe c tel que

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + \mathrm{o}(|z - z_0|),\ (z \to z_0).$$

2. L'application f est dite holomorphe si, par définition, f est dérivable en tout point z de U et si son application *dérivée complexe*, $f'\ :\ U \to \mathbf{C}\,;\ z \mapsto f'(z)$, est continue.

3. *Exemples*

Parmis les applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ suivantes déterminer celles qui sont holomorphes :

$$z \mapsto 1\,;\ z \mapsto z\,;\ z \mapsto \Re(z)\,;\ z \mapsto \bar{z}$$

4. Soit f_1 et f_2 des applications de U dans $\mathbf{C}$ holomorphes et λ et μ des nombres complexes. Montrer que $\lambda f_1 + \mu f_2$, $f_1 \times f_2$ et si f_1 ne s'annule pas, $\frac{1}{f_1}$ sont holomorphes; préciser leur applications dérivées complexes.

5. Soit g une application d'un ouvert V non vide de $\mathbf{C}$ à valeurs complexes holomorphe. On suppose que $f(U) \subset V$. Montrer que $g \circ f$ est holomorphe et préciser son application dérivée complexe.

6. Montrer que toute application polynômiale de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ est holomorphe.

Caractérisation réelle

On va voir que si f est holomorphe, alors, vue comme une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$, mais que la réciproque est fausse, et qu'il faut adjoindre au caractère $\mathcal{C}^1$ une condition supplémentaire pour obtenir l'holomorphie.

7. On désigne par U^* l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathbf{R}^2$ tels que $x + iy \in U$. Montrer que U^* est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

8. On désigne par f^* l'application de U^* dans $\mathbf{C}$, qui à (x, y) associe $f(x + iy)$, on désigne par $\tilde{f}$ l'application de U^* dans $\mathbf{R}^2$ qui à (x, y) associe $(\Re(f(x + iy), \Im(f(x + iy)))$, enfin on note P et Q les première et seconde composantes de $\tilde{f}$. Ainsi pour tout $(x, y) \in U^*$

$$f(x + iy) = f^*(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y),\quad \tilde{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))\,.$$

Montrer que les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

i f est holomorphe.

ii f^* est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\dfrac{\partial f^*}{\partial y} = i\dfrac{\partial f^*}{\partial x}$.

iii $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Dans le cas où f est holomorphe, exprimer pour (x, y) élément de U^*, $f'(x+iy)$ en fonction des dérivées partielles, de f^* puis des dérivées partielles de P et de Q.

9. Montrer que la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul, est une application holomorphe.

10. On dira qu'une application h d'un ouvert W de $\mathbf{C}$ non vide, à valeurs dans une partie V de $\mathbf{C}$ est holomorphe si l'application $W \to \mathbf{C}\,;\ z \mapsto h(z)$ est holomorphe.

On suppose que f est holomorphe et injective. On suppose que f' ne s'annule pas. Montrer que $\mathrm{d}\tilde{f}$ est une similitude directe de $\mathbf{R}^2$, muni de sa structure euclidienne canonique.

ANNULÉE (Montrer que f induit une bijection de U sur $f(U)$, et que la bijection réciproque g est holomorphe.)

Analyticité des fonctions holomorphes

11. On suppose que f est analytique, c'est-à-dire développable en série entière au voisinage de tout point de U. Montrer que f est holomorphe.

12. On suppose que f est holomorphe. Soient z_0 un point de U de partie réelle x_0 de partie imaginaire y_0 et r un réel strictement positif tel que $\mathrm{B_O}(Z_0, r) \subset U$. Soit enfin l'application

$$F\ :]0, r[\times \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\ (\rho, \theta) \mapsto f^*(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) = f(z_0 + \rho e^{i\theta})$$

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$.

b) Montrer que pour tout élément ρ de $]0, r[$, il existe une famille $(\alpha_n(\rho))_{n\in\mathbf{Z}}$ telle que :

$$f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n(\rho) e^{in\theta}.$$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, l'application $\alpha_n\ :]0, r[\to \mathbf{C}\,;\ \rho \mapsto \alpha_n(\rho)$ est dérivable et que pour tout $\rho \in]0, r[$, $\alpha_n'(\rho) = \frac{n}{r}\alpha_n(\rho)$.

d) En déduire qu'il existe une famille $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, telle que pour tout complexe z tel que $0 < |z - z_0| < r$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On donnera l'expression des a_n, $n \in \mathbf{Z}$, au moyen d'une intégrale.

e) Montrer que pour tout entier $n < 0$, $|a_n| = 0$. En déduire que f est analytique.

13. Montrer que toute application de U dans $\mathbf{C}$, holomorphe est indéfiniment dérivable au sens complexe.

14. Montrer qu'une application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, holomorphe et majorée, est constante.

15. Déduire de ce qui précède le théorème de d'Alembert-Gauß.

Intégrales sur un chemin

On ne suppose pas connue l'analycité des fonctions holomorphes.

U désigne un ouvert U de $\mathbf{C}$, on lui associe la partie de $\mathbf{R}^2$, $U^* := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | (x + it \in U\}$.

PREMIÈRES DÉFINITIONS

On appelle chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux de U toute application γ d'un segment $[a, b]$ à valeurs dans U *continue* et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Si de plus $\gamma(a) = \gamma(b)$ on dit que le chemin est un lacet. A un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux de U, on associe l'arc géométrique orienté Γ^* de U^*, dont un représentant est $([a, b], (\Re(\gamma), \Im(\gamma))$.

Soient f une application de U dans $\mathbf{C}$ continue et γ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux de U, et $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à γ. On appelle intégrale de f le long du chemin γ la quantité notée $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ définie par :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_i+1} f(\gamma(t)\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Cette quantité est indépendante de la subdivision adaptée choisie, ce que l'on admettra dans la suite. On appelle la longueur de γ la longueur de Γ^*, c'est-à-dire :

$$\int_a^b \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_i+1} \|\overrightarrow{\Gamma'}(t)\|\mathrm{d}t.$$

On définit de même pour un champ de vecteur $\overrightarrow{V} = (V_1, V_2)$, défini sur U^*, continue, l'intégrale (ou circulation) de $\vec{V}$ le long du chemin Γ^*, quantité notée $\int_{\Gamma^*} \vec{V}$, par :

$$\int_{\Gamma^*} \vec{V} := \int_a^b \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_i+1} \left\langle \vec{V}(\Gamma^*(t)|\overrightarrow{\Gamma^{*\prime}}(t) \right\rangle \mathrm{d}t.$$

Cette quantité est également indépendante de la subdivision adaptée choisie.

1. Soit ϕ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme croissant d'un segment $[c, d]$ sur $[a, b]$. On pose $\delta := \gamma \circ \phi$. montrer que δ est un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux de U et que

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\delta f(z)\mathrm{d}z.$$

2. On reprend les notations de l'exercice précédent (question 8. Montrer qu'il existe deux champs de vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sur U^* telles que :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma^*} \vec{V}_1 + i \int_{\Gamma^*} \vec{V}_2.$$

On exprimera $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ en fonction de P et Q.

3. On suppose dans cette question que U est convexe et que f est holomorphe. Montrer que V_1 et V_2 dérivent d'un potentiel, *voir annexe.*

Que dire de $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ si γ est un lacet. On note pour $i = 1, 2$, Φ_i un potentiel dont dérive $\overrightarrow{V}_i$, $(\vec{\nabla}\Phi_i = \vec{V}_i)$, et l'on pose :

$$F \;:\; U \to \mathbf{C}\,;\; z \mapsto \Phi_1(x, y) + i\Phi_2(x, y),$$

avec $x = \Re(z), y = \Im(z)$. Montrer que F est holomorphe et que $F' = f$. On dit que F est une primitive de f.

Formule de Goursat

Soient γ_1 et γ_2 des chemins $\mathcal{C}^1$ par morceaux de U définies respectivement sur les segments $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$. On définit un nouveau chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux de U noté $\gamma_1 \cup \gamma_2$ par

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 \ : \ [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \to \mathbf{C}\,;\ t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{pour } t \in [a_1, b_1], \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1), & \text{pour } t \in]b_1, b_1 + (b_2 - a_2)]. \end{cases}$$

On dispose ainsi d'une opération sur les chemins $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $\mathbf{C}$, qui est visiblement associative.

Enfin pour u et v points quelconque de $\mathbf{C}$, on note $\gamma_{u,v}$ le chemin $[0,1] \to \mathbf{C}\,;\ t \mapsto (1-t)u + tv$.

4. Soit (z_1, z_2, z_3) un triangle direct de $\mathbf{C}$. On suppose que le triangle plein T de sommets z_1, z_2, z_3 est inclus dans U. On note γ_T le lacet $\gamma_{z_1,z_2} \cup \gamma_{z_2,z_3} \cup \gamma_{z_3,z_2}$

On suppose que f est holomorphe sur $U - \{z_0\}$, où z_0 est un point quelconque de U et continue sur U. On se propose démontrer que $\int_{\gamma_T} f(z)\mathrm{d}z = 0$: « l'intégral de f sur un triangle est nulle »

a) Montrer que le résulta pour f constante et pour $f \ : \ z \mapsto z$.

b) On suppose dans cette sous question que $z_0 \notin T$. On pose $T_0 = T$ et $T_0^1, \dots T_0^4$ les triangles semblables à T_0 de rapports respectifs $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ obtenus en prenant les milieux des segments qui forment la frontière de T.

i) Montrer qu'il existe $j \in \{1, \dots, 4\}$ tel que $\left| \int_{\gamma_{T_0^j}} f(z)\mathrm{d}z \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\gamma_T} f(z)\mathrm{d}z \right|$. On notera $T_0^j = T_1$

ii) Montrer plus généralement qu'il existe une suite $(T_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de triangles telle que :

— $T_0 = T$,

— Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $T_{k+1} \subset T_k$,

— Pour tout $k \in \mathbf{N}$ la longueur de $\gamma_{T_{k+1}}$ est la moitié de celle de $\frac{1}{2}\gamma_{T_k}$,

— $\left| \int_{\gamma_T} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq 4^k \left| \int_{\gamma_{T_k}} f(z)\mathrm{d}z \right|$.

iii) Montrer que $\bigcap\limits_{k \in \mathbf{N}} T_k$ est un singleton $\{u\}$. Et en déduire le résultat.

Indication : On pourra rtermarquer que :$\int_{\gamma_{T_k}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{T_k}} f(z) - f(u) - (z-u)f'(u)\mathrm{d}z$.

c) Montrer le résultat dans le cas général. On pourra commencer en décomposant T en triangles, à se ramener au cas où z_0 est un sommet de T.

5. On suppose toujours que f est holomorphe sur $U - \{z_0\}$ et que U est un ouvert *convexe*. Déduire de la question 4. que f admet une primitive F sur U. On vient de généraliser 3. En déduire que l'intégrale de f sur tout lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux de U est nulle.

Indice d'un lacet par rapport à un point

γ est un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $\mathbf{C}$, défini sur $[a,b]$, enfin z_0 est un point de $\mathbf{C}$ qui n'est pas élément de $\gamma([a,b])$.

On pose $\mathrm{Ind}_{z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$.

6. En étudiant l'application $G \ : \ [a,b]\,;\ t \mapsto \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds \right)$, montrer que $\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma)$ est un élément de $\mathbf{Z}$.

7. On considère le cas particulier où $\gamma \ : \ [0, 2\pi] \to \mathbf{C}\,;\ t \mapsto z_0 + r\exp(int)$ avec $n \in \mathbf{N}^*$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$. Déterminer $\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma)$.

8. On admet que $\mathbf{C}-\gamma([a,b])$ admet deux composantes connexes par arcs dont une est non bornée. Montrer que $z\mapsto \mathrm{Ind}_z(\gamma)$ est constante sur les composantes connexes par arcs de $\mathbf{C}-\gamma([a,b])$ et nulle sur la composant connexes par arcs non bornée.

Formule de la moyenne

5. On suppose que que U est un ouvert *convexe*. Soit z_0 un point de U et γ un lacet C^1 par morceaux de U, définie sur $[a,b]$ et tel que $z_0\notin\gamma([a,b]$.

En considérant l'application $g\ :\ U\to\mathbf{C}\,;\ z\mapsto\begin{cases}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & \text{pour } z\neq z_0,\\ f'(z_0)), & \text{pour } z=z_0,\end{cases}$ montrer que : $\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma)f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$

6. Déduire de la question précédente qu'une fonction holomorphe sur un ouvert U est analytique. Plus précisément, pour tout point z_0 de U f est développable en série entière au voisinage de z_0 dans tout disque ouvert centré en z_0 et inclus dans U.

Annexe

Par $\vec{V}$ on désigne une application de U^* supposé convexe et contenant $(0,0)$, dans $\mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$; V_1 désigne la première composante de $\vec{V}$, V_2 la seconde.

1. On suppose dans cette question que $\vec{V}$ est le gradient d'une application $\mathcal{U}$ de U^* dans $\mathbf{R}$ *a priori* de classe $\mathcal{C}^1$, $\vec{V}=\vec{\nabla}\mathcal{U}$. On dit que $\vec{V}$ dérive du potentiel $-\mathcal{U}$ (ou parfois $\mathcal{U}$). Montrer que
$$\frac{\partial V_1}{\partial y}=\frac{\partial V_2}{\partial x}\tag{1}$$
2. Réciproquement supposons que la condition (1) soit satisfaite. On pose :
$$\mathcal{U}\ :\ U^*\to\mathbf{R}\,;\,(x,y)\mapsto\int_0^1 xV_1(tx,ty)+yV_2(tx,ty)\mathrm{d}t.$$
Montrer que $\mathcal{U}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\vec{V}=\vec{\nabla}\mathcal{U}$.