Caractères

Ce problème est tiré en grande partie du bel article [?].

Dans toute la suite, $(G,+)$ désignera un groupe abélien fini, dont le neutre sera noté 0. L'ordre d'un élément g de G sera noté $\omega(g)$.

I. EXPOSANT D'UN GROUPE

1. Soient g et g' des éléments de G d'ordres respectifs m et m'. On suppose que m et m' sont premiers entre eux. Montrer que
$$\omega(g+g') = mm'.$$
Si l'on ne suppose plus m et m' premiers entre eux, a-t-on $\omega(g+g') = \mathrm{ppcm}(m,m')$?
2. Soit a et b des entiers strictements positifs. Montrer l'existence de a' et b' entiers également strictement positifs tels que on ait :
   - Les relations de divisibilté $a'|a$, $b'|b$, ;
   - $\mathrm{pgcd}(a'b') = 1$;
   - $\mathrm{ppcm}(a,b) = a'b'$.

   Indication : On examinera les décompositions en facteurs premiers de a et b.
3. On appelle exposant du groupe G le plus petit commun multiple e des ordres des ses éléments. Montrer que G admet un élément z ayant pour ordre l'exposant du groupe G.

Dans toute la suite on désignera par e l'exposant de G.

Pour tout élément g de G, δ_g désignera l'indicatrice du singleton $\{g\}$, la famille, $(\delta_g)_{g\in G}$ est alors une base du $\mathbf{C}-$espace vectoriel $\mathbf{C}^G$. Nous munirons $\mathbf{C}^G$ de son produit scalaire canonique (normalisé), $\langle\cdot|\cdot\rangle_G$, de norme associée $\|\cdot\|_G$, précisément :
$$\forall (u,v)\in(\mathbf{C}^G)^2, \langle u|v\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\bar{u}(g)v(g).$$

II. CARACTÈRES, CAS DES GROUPES CYCLIQUES

Définition — *On appelle* caractère *de G tout morphisme du groupe $(G,+)$ dans le groupe* $(\mathbf{C}^*,\times)$.

1. Montrer que tout caractère χ de G est à valeurs dans $\mathbf{U}_e$, groupe des racines e^{e} de l'unité, où toujours, e désigne l'exposant de G.
2. Montrer que l'ensemble des caractères de G est un groupe pour la multiplication usuelle des applications à valeurs complexes.
On appelle ce groupe *groupe dual* de G et on le note $\hat{G}$. Nous désignerons par χ_0 l'élément neutre de $\hat{G}$ appelé caractère « trivial ».
3. Cas d'un groupe cyclique —
On suppose dans cette question que G est cyclique d'ordre n et que x en est un générateur.
Montrer que pour tout élément ω de $\mathbf{U}_n$, la formule :
$$\forall k\in\mathbf{Z},\ \chi_\omega(k\cdot x) = \omega^k$$
définit sans ambiguité un caractère χ_ω et que l'application
$$\mathbf{U}_n \to \hat{G}\,;\ \omega\mapsto\chi_\omega$$

est un isomorphisme de $\mathbf{U}_n$ sur $\hat{G}$.

Afin de prouver que dans le cas général G et $\hat{G}$ sont encore isomorphes, nous allons donner un théorème de structure, dû à Kronecker, pour les groupes abéliens finis

III. STRUCTURE DES GROUPES ABELIENS FINIS

L'objet de cette partie et la preuve, grâce aux caractères du théorème suivant.

Théorème de Kronecker — *Si G est un groupe abelien fini non trivial il existe un entier r strictement positif, des entiers $d_1, d_1, ..., d_r$ supérieurs ou égaux à d tels que l'on ait*[1] *:*
- *Chaque entier d_i, pour $i = 1, 2, ...r-1$, divise le suivant : $d_1|d_2|...|d_r$;*
- *Le groupe G est isomorphe au groupe produit $\mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/d_2\mathbf{Z} \times ... \times \mathbf{Z}/d_r\mathbf{Z}$.*

1. Prolongement d'un caractère
   (a) Soit H un sous-groupe de G et x un élément de G qui n'est pas élément de H. On note K le sous-groupe engendré par H et x :
   $$K = \langle H \cup \{x\} \rangle.$$
   Soit $\Lambda = \{p \in \mathbf{Z} | p \cdot x \in H\}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{N}^*$ tel que $\Lambda = a\mathbf{Z}$. En déduire que
   $$K = \{p \cdot x + h, (p, h) \in \{0, 1, ..., a-1\} \times H\},$$
   et que l'écriture d'un élément k de K de la forme $k = p \cdot x + h$, avec (p, h) élément de $\{0, 1, ..., a-1\} \times H$ est unique.
   (b) Posons $m = \frac{|K|}{|H|}$. Soit ϕ un caractère de H. Montrer que ϕ se prolonge à K en m et seulement m caractères.
   (c) Montrer que le caractère ϕ de H se prolonge en un caractère χ de G.
2. Soit z_e un élément de G d'ordre e, exposant du groupe. Soit ϕ_{g_e} le caractère du groupe cyclique $\langle z_e \rangle$, défini comme en II.3., par :
   $$\forall k \in \mathbf{Z},\ \phi_{z_e}(k \cdot z_e) = \omega^k,$$
   avec $\omega = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi}{q}}$, et χ_e un prolongement de ϕ_{z_e} en un caractère de G.
   (a) Déduire de la question précédente que le groupe G est isomorphe au groupe produit $\mathbf{Z}/e\mathbf{Z} \times \mathrm{Ker}(\chi_e)$.
   (b) Démontrer le théorème de Kronecker.

IV. GROUPE DUAL

1. Soient G_1 et G_2 des groupes abeliens finis, montrer que $\widehat{G_1 \times G_2}$ est isomorphe à $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$.
   Indication : On pourra introduire pour tout couple de caractères $(\chi_1, \chi_2) \in G_1 \times G_2$, le produit tensoriel de χ_1 et χ_2 :
   $$\chi_1 \otimes \chi_2 \ :\ G_1 \times G_2\ ;\ (g_1, g_2) \mapsto \chi_1(g_1)\chi_2(g_2).$$
2. Montrer que les groupes G et $\hat{G}$ sont isomorphes.
3. Isomorphisme canonique entre G et son bidual —
   Pour tout x élément de G on définit :
   $$\eta_x \ :\ \hat{G} \to \mathbf{C}\ ;\ \chi \mapsto \chi(x).$$
   Montrer que $\eta \ :\ G \to \mathbf{C}^{\hat{G}}\ ;\ x \mapsto \eta_x$ induit un isomorphisme de G sur $\hat{\hat{G}}$. On dit que η est l'isomorphisme canonique de G sur son bidual.

1. On a aussi unicité de la décomposition suivante, c'est un bel exercice !

V. ORTHOGONALITÉ

1. Soit χ un caractère non trivial de G. Montrer que :

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

Tout caractère non trivial est orhogonal au caractère trivial.

2. Déduire de la précédente question que les caractères forment une base orthonormée de $\mathbf{C}^G$.
3. Donner pour tout couple (x, y) d'éléments de G la valeur de la somme :

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \bar{\chi}(x)\chi(y).$$

Indication : Utiliser IV.3.

VI. UN PEU D'ALGÈBRE LINÉAIRE

On se propose de montrer que $|G| = |\hat{G}|$, corollaire immédiat de 4.2., par un argument d'algèbre linéaire.

1. Pour tout $x \in G$ définissons T_x endomorphisme de $\mathbf{C}^G$, dit de *translation*, par :

$$T_x(u) \ : \ G \to \mathbf{C}\,; \ y \mapsto u(x+y),$$

pour tout application u de G dans $\mathbf{C}$. Montrer que pour tout élément x de G, T_x est élément de $\mathrm{GL}(\mathbf{C}^G)$ et que les caractères de G sont des vecteurs propres de T_x.

2. Montrer que l'application

$$T \ : \ G \to \mathrm{GL}(\mathbf{C}^G)\,; \ x \mapsto T_x$$

est un morphisme de groupes.

On dit que T est une *représentation linéaire* de G.

3. Montrer que la famille d'endomorphismes de $\mathbf{C}^G$, $(T_x, x \in G)$ est codiagonalisable, c'est à dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{C}^G$ dont les vecteurs sont vecteurs propres pour tous les T_x, $x \in G$.
4. Montrer que tout vecteur de $\mathcal{B}$ est colinéaire à un caractère.
5. En utilisant V., montrer que $|\hat{G}| = |G|$.

VII. DUALITÉ

En algèbre linéaire, les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sont l'intersection de noyaux de formes linéaires (hyperplans), nous allons ici décrire les sous-groupes de G comme des intersections de noyaux de caractères.

1. Soit X une partie de G. On note $X^\perp$ l'ensemble des caractères de G qui prennent la valeur 1 sur X :

$$X^\perp = \{\chi \in \hat{G} | X \subset \mathrm{Ker}(\chi)\}.$$

Soit H un sous groupe de G. Montrer que :

$$H = \bigcap_{\chi \in H^\perp} \mathrm{Ker}(\chi).$$

2. Soit le morphisme de restriction,

$$R\ :\ \hat{G} \to \hat{H}\ ;\ \chi \mapsto \chi_{|H}.$$

Montrer que χ est surjectif et déterminer son noyau.
En déduire que $|G| = |H| \times |H^{\perp}|$.

TRANSFORMATION DE FOURIER

A toute application f de G dans $\mathbf{C}$, on associe sa transformée de Fourier, application de $\hat{G}$ dans $\mathbf{C}$ donnée par :

$$\hat{f}\ :\ \hat{G} \to G\ ;\ \chi \mapsto \sum_{x \in G} \overline{\chi(x)} f(x).$$

1. Exprimer pour tout $(f, \chi) \in G \times \hat{G}$, $\hat{f}(\chi)$ au moyen du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_G$. Calculer $\hat{\delta}_g$, pour tout élément g de G.
2. Formule d'inversion —
Pour tout $f \in \mathbf{C}^G$ et tout $x \in G$, montrer que :

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(x).$$

3. Formule de Parseval — Montrer que pour tout élément f de $\mathbf{C}^G$, on a

$$\|f\|_G = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \|\hat{f}\|_{\hat{G}}.$$

Cette égalité exprime que si $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier, c'est-à-dire l'application de $\mathbf{C}^G$ dans $\mathbf{C}^{\hat{G}}$ qui à f associe $\hat{f}$, alors $\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{|G|}}$ est une isométrie de $(\mathbf{C}^G, \|\cdot\|_G)$ dans $(\mathbf{C}^{\hat{G}}, \|\cdot\|_{\hat{G}})$.

4. Produit de convolution — Pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathbf{C}^G$ on définit leur produit de convolution $f * g$ par :

$$f * g\ :\ G \to \mathbf{C}\ ;\ x \mapsto \sum_{y \in G} f(x - y) g(y).$$

On montre sans mal, et ce n'est pas demandé, que $(\mathbf{C}^G, +, \cdot, *)$ est une algèbre commutative de neutre δ_0. Montrer pour tout $(f, g) \in (\mathbf{C}^G)^2$ que :

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}.$$

5. Soit $f \in \mathbf{C}^G$. Pour tout $u \in \mathbf{C}^G$, on note $C_f(u) = u * f$. Montrer que C_f est un endomorphisme de $\mathbf{C}^G$ et que tout caractère de G est un vecteur propre de C_f associé à une valeur propre à déterminer.
6. On soit $(g_1, g_2, ..., g_n)$ une énumération des éléments de G et $(\chi_1, \chi_2, ...\chi_n)$ une de $\hat{G}$. Montrer que

$$\det(C_f) = \det\big(f(x_i - x_j)\big)_{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2}\big) = \prod_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi).$$

Expliciter cette égalité dans le cas où $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et retrouver un résultat classique.

Références

[Tosel, 2017] TOSEL, N. (2017). Analyse harmonique sur un groupe abélien fini et principe d'incertitude. *RMS*, octobre(1):32–49.