

DM n°6

Ce cours DM est là pour attendre que soit traité le cours de calcul différentiel. Parties à traiter : Exercice 1 et au choix Exercice 2 ou 2 bis (plus long et plus dur).

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout entier naturel n , $P_n := \prod_{k=0}^n a_k$.

Nous dirons que le produit infini associé, noté $\prod a_n$ converge si la suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers une limite *non nulle*.

1. Montrer que si $\prod a_n$ converge alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 1.

On suppose dans la suite cette condition réalisée.

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = a_n - 1$ et l'on suppose que $u_n \neq -1$.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 , tel que pour tout entier $n \geq n_0$, la quantité $\ln(1 + u_n)$ soit définie. Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n)$ converge.
3. On suppose en outre, dans cette question, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est positive à partir d'un certain rang. Montrer que le produit $\prod a_n$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature.
4. On ne suppose plus la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ positive à partir d'un certain rang, mais que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum u_n^2$ converge.

La fin de cet exercice est facultative.

5. Pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par p_n le n^{e} nombre premier. On se propose démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge¹.

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ et le produit $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ sont de même nature.

(b) Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Exprimer $\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_N}\right)}$ au moyen d'un produit de sommes de séries.

(c) Conclure.

Exercice 2

Nous considérerons la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ nous noterons, S sa somme, et pour tout entier n , strictement positif, R_n le reste d'ordre n et S_n la somme partielle d'ordre n .

1. En comparant la série et une intégrale donner l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq R_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

1. Cela signifie qu'il y a pas mal de nombres premiers! A titre de comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$ converge.

2. Posons pour tout entier $n \geq 1$,

$$x_n = S_n + \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

Pour quelle valeurs de l'entier n a-t-on :

$$|S - x_n| \leq 10^{-6}$$

3. Nous nous proposons de trouver une suite qui converge plus vite vers S que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

4. (a) Montrer que les relations suivantes définissent une unique suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients rationnels :

$$P_0 = 1; \tag{1}$$

$$P'_n(X) = P_{n-1}(X), \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*; \tag{2}$$

$$\int_0^1 P_n(t) dt = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*. \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Expliciter les polynômes P_1 , P_2 et P_3 . Montrer que $P_3(\frac{1}{2}) = 0$, en déduire que pour tout réel x élément de $[0, 1]$,

$$|P_3(x)| \leq \frac{1}{24}.$$

(b) Soit f une application numérique, définie sur $[0, 1]$, de classe \mathcal{C}^3 . Montrer que :

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \frac{1}{12}(f'(1) - f'(0)) - \int_0^1 P_3(x)f^{(3)}(x) dx. \tag{5}$$

(c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. En appliquant la formule précédente à l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{1}{(k+x)^3}$, pour tout entier k supérieur ou égal à n , montrer que :

$$R_n = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} + \underset{n \rightarrow +\infty}{\mathbf{O}} \left(\frac{1}{n^5} \right).$$

Plus précisément, montrer que :

$$\left| S - \left(S_n + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} \right) \right| \leq \frac{1}{2n^5}.$$

Donner une valeur approchée de S à 10^{-6} près.

Exercice 2 bis

1. — POLYNÔMES DE BERNOULLI —

(a) Montrer qu'il existe une et une seule suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui satisfait aux conditions suivantes

i. $P_0 = 1$;

ii. Pour tout entier $n \geq 1$, $P'_n = nP_{n-1}$;

ii. Pour tout entier $n \geq 1$, $\int_0^1 P_n = 0$.

Dans la suite on pose pour tout entier naturel : $B_n = P_n(0)$.

Terminologie : P_n est le n^{e} polynôme de Bernoulli et B_n le n^{e} nombre de Bernoulli.

(b) Montrer pour tout entier naturel n , que : $P_n \in \mathbf{Q}[X]$ et $P_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} X^k$.

Explicitez P_1, P_2 et P_3 .

(c) Etablir, pour tout entier naturel n les égalités suivantes.

- i. $P_n(X) = (-1)^n P_n(1 - X)$;
- ii. $P_n(X) = 2^{n-1} \left(P_n\left(\frac{X}{2}\right) + P_n\left(\frac{X+1}{2}\right) \right)$;
- iii. $P_n(X+1) - P_n(X) = nX^{n-1}$.

2. — ETUDE DES NOMBRES DE BERNOULLI —

(a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $B_{2k+1} = 0$.

(b) En utilisant **1. (b)**, montrer que pour tout entier $p \geq 1$, on peut trouver un système linéaire triangulaire à p lignes dont $(B_0, B_2, \dots, B_{2p})$ est la solutions.

Déterminer B_0, B_1, \dots, B_6 .

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel k ,

— P_{2k+2} admet dans $[0, 1]$ exactement deux racines éléments de $]0, 1[$;

— P_{2k+1} admet dans $[0, 1]$ exactement trois racines qui sont $0, \frac{1}{2}, 1$.

(b) Dédire de la question précédente que pour tout entier k , le maximum de $|P_{2k}|$ sur $[0, 1]$ est égal à $|B_{2k}|$ et celui de $|P_{2k+1}|$ est inférieur à $\frac{(2k+1)|B_{2k}|}{2}$.

4. — FORMULE D'EULER-MAC LAURIN — Soit f un élément de $\mathcal{C}^{2p+1}([0, 1], \mathbf{R})$, avec $p \in \mathbf{N}^*$.

(a) Donner pour f la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre $2p$, et rappeler sa démonstration.

(b) Montrer que :

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(1) + f(0)}{2} - \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}}{2k!} (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) - I_{2p+1},$$

avec : $I_{2p+1} = \int_0^1 f^{2p+1}(x) P_{2p+1}(x) dx$ (formule d'Euler-Mac Laurin).

(c) Montrer que pour tout entier naturel p :

$$|I_{2p+1}| \leq \frac{|B_{2p}|}{2(2p)!} \max_{x \in [0,1]} |f^{2p+1}(x)|.$$

(d) Soit g un élément de $\mathcal{C}^{2p+1}([a, b], \mathbf{R})$, avec $p \in \mathbf{N}^*$ et a et b des réels tels que $a < b$. Que devient la formule d'Euler-Mac Laurin en remplaçant f par $t \mapsto g(a + t(b - a))$?

5. — EXEMPLE D'APPLICATION DE LA FORMULE D'EULER-MAC LAURIN AU CALCUL APPROCHÉ DE SOMMES DE SÉRIES — On note S la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$, et pour

tout entier $n \geq 1$, S_n sa somme partielle d'ordre n et R_n son reste d'ordre n .

(a) Ecrire la formule d'Euler-Mac Laurin pour l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$; $x \mapsto \frac{1}{(j+x)^3}$ où j est un entier strictement positif.

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Dédire de la sous-question précédente l'existence de réels a_k , $k = 0, 1, \dots, p$ tels que :

$$R_n = \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{n^{2k+2}} + o\left(\frac{1}{n^{2p+2}}\right) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Donner une majoration de $\left| R_n = \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{n^{2k+2}} \right|$ en fonction des nombres de Bernoulli.

(c) En déduire une valeur approchée de S_n à 10^{-12} près.

En complément, ceux qui désirent aller plus loin pourrons étudier le sujet Centrale 2011 .

Indications pour DM n°5

Exercice 1

1. Noter pour commencer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ étant à valeurs *non nulles*, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n = \prod_{p=0}^n a_p \neq 0$ et donc $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ est bien défini. Reste à laisser tendre n vers $+\infty$.

2. — $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc, en particulier, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in \mathbf{N}$, si $n \geq n_0$, alors $|a_n - 1| < 1$. Pour tout $n \geq n_0$ on a $a_n > 0$.

D'abord on montre que les produits $\prod_{n \geq 0} a_n$ et $\prod_{n \geq n_0} a_n$ sont de même nature.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\prod_{p=n_0}^n a_p = \exp \left(\sum_{p=n_0}^n \ln(a_p) \right), \quad (6)$$

ou de façon équivalente,

$$\ln \left(\prod_{p=n_0}^n a_p \right) = \sum_{p=n_0}^n \ln(a_p). \quad (7)$$

— Supposer que la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(a_n)$ converge.

Utiliser l'égalité (18) et la continuité de la fonction exponentielle en $\sum_{p=n_0}^{+\infty} \ln(a_p)$

— Supposons que le produit $\prod_{n \geq 0} a_n$ converge.

Alors $\prod_{n \geq n_0} a_n$ converge, cf. remarque et Utiliser (19) et la continuité du logarithme

Conclusion :

la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(a_n)$ converge si et seulement si le produit $\prod_{n \geq 0} a_n$ converge.

3. — Supposer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge.

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1 + u_n > 0$, la question 1.a. dit que $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$ converge.

Par ailleurs la convergence du produit assure que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (cf. 1.), donc

$$0 \leq \ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n, \quad (8)$$

Utiliser le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

— Supposer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Utiliser encore le théorème.

— Pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\ln(a_n) = u_n - b_n$, ou $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} u_n^2$. Par comparaison de séries positives $\sum b_n$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge. Donc, puisque $\sum u_n$ converge, $\sum \ln(a_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.

4.

Deuxième partie

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < \frac{1}{n}$, donc compte tenu de 3 (et de la remarque préliminaire faite au 5), la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et le produit $\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sont de même nature. Or pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \prod_{p=1}^n \frac{p+1}{p} = \dots\dots$$

2. a. La série géométrique $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k}$ converge puisque sa raison $\frac{1}{p}$ est élément de $[0, 1[$ et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}.$$

- b. Soient N un entier supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathbf{N}^*$.

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{k=0}^M \frac{1}{p_1^k} \sum_{k=0}^M \frac{1}{p_2^k} \dots \sum_{k=0}^M \frac{1}{p_N^k} \dots$$

soit

- c. Soit n un élément de $\{1, \dots, N\}$. Puisque $P_N \geq N \geq 2$, les facteurs premiers de n sont éléments de $\{p_1, \dots, p_N\}$; de plus si l'on choisit M pour que $2^M \geq N$, dans la décomposition de n en facteurs premiers aucun des exposants des facteurs n'excédera strictement M . Donc l'ensemble $\{1, \dots, N\}$ est inclus dans l'ensemble des éléments de la forme $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_N^{k_N}$ avec $(k_1, k_2, \dots, k_N) \in \{0, 1, \dots, M\}^N \dots$.
Pour ce choix de M on a donc, grâce à la dernière inégalité,

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{m=1}^N \frac{1}{m}. \tag{9}$$

La suite est asintrotante

- d. Utiliser 3.

EXERCICE 2Bis

1. —

- (a) Pour commencer observons qu'étant donné un polynôme à coefficients réels, disons $P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$, un polynôme Q , vérifie $Q' = P$ si et seulement si, il existe un réel b_0 tel que

$$Q = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{a_{i-1}}{i} X^i + b_0,$$

De telle sorte que Q vérifie à la fois $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(t) dt$ si et seulement si il est LE polynôme

$$\sum_{i=1}^{d+1} \frac{a_{i-1}}{i} X^i - \sum_{i=1}^{d+1} \frac{a_{i-1}}{i(i+1)}, \tag{10}$$

polynôme que nous noterons $\Phi(P)$. Donc, il existe une et une seule suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui satisfasse aux conditions i., ii. et iii. C'est LA suite de polynômes, définie récursivement par.....

Reste à vérifier qu'une telle suite est bien à valeurs dans $\mathbf{Q}[X]$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. La formule de Taylor dit : $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$. Le résultat en résulte par la propriété ii. du (a),

$$\text{Après calculs : } \boxed{P_1 = X - \frac{1}{2}, P_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}, P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}}$$

- (b) i. Posons pour tout entier naturel n , $Q_n = (-1)^n P_n(1 - X)$. On montre alors que cette suite satisfait les conditions 1. (a) i. ii., et iii.,
 ii. Poser pour tout entier naturel n , $R_n(X) = 2^{n-1} (P_n(\frac{X}{2}) + P_n(\frac{X+1}{2}))$; et raisonner comme au i.
 iii. Pour tout entier naturel n on désigne par \mathbf{H}_n la propriété :

$$P_n(X+1) - P_n(X) = nX^{n-1}. \quad (\mathbf{H}_n)$$

On la prouve par récurrence Mais il y a d'autres méthodes

2. — ETUDE DES NOMBRES DE BERNOULLI —

- (a) L'égalité 1. (c) i., donne

$$P_{2k+1}(1) = -P_{2k+1}(0) \quad (11)$$

Mais d'après les propriétés ii. et iii. du 1. (a)

$$P_n(1) - P_n(0) = 0. \quad (12)$$

- (b) D'après (16) et 1. (b), pour tout entier $n \geq 2$, $B_n = P_n(0) = P_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$.
 et donc :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = 0 \quad (13)$$

Les nombres de Bernoulli d'indices impairs supérieurs à 1 étant nuls, l'écriture de (17) pour $n = 0, 2, 4, \dots, 2p$ donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 = 1, \\ \binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{2} B_2 = - \binom{4}{1} B_1, \\ \binom{6}{0} B_0 + \binom{6}{2} B_2 + \binom{6}{4} B_4 = - \binom{6}{1} B_1, \\ \vdots \\ \binom{2p+2}{0} B_0 + \binom{2p+2}{2} B_2 \dots + \binom{2p+2}{2p-2} B_{2p} = - \binom{2p+2}{1} B_1. \end{array} \right.$$

3. (a) Commençons par des remarques. Soit $k \in \mathbf{N}$,

- D'après 1. (c) i. $P_{2k+1}(\frac{1}{2}) = -P_{2k+1}(\frac{1}{2})$, donc $P_{2k+1}(\frac{1}{2}) = 0$. Donc P_{2k+1} s'annule en 0, 1 et $\frac{1}{2}$.
- D'après 1. (c) ii. $P_{2k}(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2^{k-1}} - 1) P_k(0)$ Donc $P_{2k}(\frac{1}{2})$ est de signe opposé à $P_{2k}(0)$. Rappelons avoir vu que $P_{2k}(0) = P_{2k}(1)$.

Notons alors pour tout entier $k \geq 1$, On note \mathbf{R}_k la propriété : P_{2k+2} admet dans $]0, 1[$ exactement deux racines l'une dans $]0, \frac{1}{2}[$ l'autre dans $]\frac{1}{2}, 1[$, en lesquelles il change de signe ;

- L'expression de P_2 , assure que \mathbf{R}_1 est vraie.
- Soit un entier $k \geq 1$. On suppose que \mathbf{R}_k est vrai.
On note α et β les racines de P_{2k} , $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta < 1$. Pour fixer les idées on suppose $P_{2k} > 0$ sur $]0, \alpha[$. Comme alors P_{2k} est proportionnel à la dérivée de P_{2k+1} , on a les variations de P_{2k+1} et son signe, puis comme P_{2k+1} est proportionnel à la dérivée de P_{2k+2} , on a les variations de P_{2k+2} :

t	0	α	$\frac{1}{2}$	β	1		
P_{2h}	+	0	-	-	0	+	
P_{2h+1}	0	↗	↘	0	↘	↗	0
P_{2h+2}		↗	↗	↘	↘		

Donc la fonction polynomiale P_{2k+2} induit un homéomorphisme de $]0, \frac{1}{2}[$ sur $]P_{2k+1}(0), P_{2k}(\frac{1}{2})[$ et puisque $P_{2k+2}(\frac{1}{2})$ est de signe opposé à $P_{2k+2}(0)$, P_{2k+2} s'annule en un et un seul point de $]0, \frac{1}{2}[$ en lequel il change de signe. De même P_{2k+2} s'annule t'il en un et un seul point de $]\frac{1}{2}, 1[$, en lequel il change de signe.

La propriété est \mathbf{R}_h est donc vraie pour tout entier $h \geq 1$:

P_{2k} admet dans $[0, 1]$ exactement deux zéros éléments de $]0, 1[; .$

En revenant au tableau de variations de P_{2h+1} on voit que :

P_{2h+1} admet dans $[0, 1]$ exactement trois zéros $0, \frac{1}{2}$ et 1 .

- (b) Résulte directement du tableau de variations.
4. — FORMULE D'EULER-MAC LAURIN — Soit f un élément de $\mathcal{C}^{2p+1}([0, 1], \mathbf{R})$, avec $p \in \mathbf{N}^*$.
- (a) C'est du cours l'idée consiste à partir de $f(0) - f(1) = \int_0^1 f'(t)dt$. On effectue une intégration par parties en dérivant f' et en primitivant la fonction constante égale à 1 en $t - 1 \mapsto t - 1$, on obtient :

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (t - 1)f''(t)dt.$$

On peut itérer les intégrations par parties pour obtenir la formule, à chaque fois on primitive le terme polynômial de sorte que la primitive s'annule en 1.

- (b) Dans la formule d'Euler-Mac Laurin on procède de même mais la fonction constante égale à 1 est primitivée initialement en en P_1 , au cours des intégrations par parties suivantes on prendra comme primitive de $P_n, \frac{1}{n+1}P_{n+1}$. La preuve se fait par récurrence...
- (c) Résulte de la majoration de P_{2p+1} .
- (d) En remplaçant f par $t \mapsto g(a + t(b - a))$, dans la formule précédente, on obtient :

$$\int_a^b g(x)dx = (b - a) \frac{g(a) + g(b)}{2} - \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}(b - a)^{2k}}{(2k)!} (g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a)) - \frac{(b - a)^{2p+2}}{(2p + 1)!} \int_0^1 P_{2p+1}g^{(2p+1)}(a + x(b - a))dx.$$

Correction du DM n°5

EXERCICE 2

1. —

(a) Pour commencer observons qu'étant donné un polynôme à coefficients réels, disons

$P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$, un polynôme Q , vérifie $Q' = P$ si et seulement si, il existe un réel b_0 tel que

$$Q = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{a_{i-1}}{i} X^i + b_0,$$

De telle sorte que Q vérifie à la fois $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(t) dt$ si et seulement si il est LE polynôme

$$\sum_{i=1}^{d+1} \frac{a_{i-1}}{i} X^i - \sum_{i=1}^{d+1} \frac{a_{i-1}}{i(i+1)}, \quad (14)$$

polynôme que nous noterons $\Phi(P)$. Donc, il existe une et une seule suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui satisfasse aux conditions i., ii. et iii. C'est LA suite de polynômes, définie récursivement par :

$$\begin{cases} P_0 = 0, \\ \forall n, P_{n+1} = n\Phi(P_n). \end{cases}$$

La relation (14) montre que $\Phi(\mathbf{Q}[X])$ est inclus dans $\mathbf{Q}[X]$, puisque \mathbf{Q} est un anneau. Donc la suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bien à valeurs dans $\mathbf{Q}[X]$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. La formule de Taylor pour le polynôme P_n dit :

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n n(n-1)\dots(n-k+1) \frac{P_{n-k}(0)}{k!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} X^k.$$

Après calculs : $\boxed{P_1 = X - \frac{1}{2}, P_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}, P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X}$.

(b) i. Posons pour tout entier naturel n , $Q_n = (-1)^n P_n(1-X)$. On montre alors que cette suite satisfait les conditions 1. (a) i. ii., et iii., ce qui assure que pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{P_n = (-1)^n P_n(1-X)}$$

ii. Poser pour tout entier naturel n , $R_n(X) = 2^{n-1} \left(P_n\left(\frac{X}{2}\right) + P_n\left(\frac{X+1}{2}\right) \right)$; et raisonner comme au i.

iii. Pour tout entier naturel n on désigne par \mathbf{H}_n la propriété :

$$P_n(X+1) - P_n(X) = nX^{n-1}. \quad (\mathbf{H}_n)$$

- \mathbf{H}_0 est trivialement vraie.

- Soit m un entier naturel telle que \mathbf{H}_m soit vraie. En multipliant par $(m+1)$ et primitivant la fonction polynomiale associée à $P_m(X+1) - P_m(X)$ on obtient compte tenue de \mathbf{H}_m et de 1. (a) iii., l'existence d'un réel c tel que :

$$P_{m+1}(X+1) - P_{m+1}(X) = (m+1)X^m + c.$$

En substituant alors à X la valeur 0, il vient :

$$c = P_{m+1}(1) - P_{m+1}(0) = (m+1) \int_0^1 P_m(t) dt = 0.$$

Donc par récurrence nous venons de prouver que pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{P_n(X+1) - P_n(X) = nX^{n-1}}$$

Mais il y a d'autre méthodes

2. — ETUDE DES NOMBRES DE BERNOULLI —

(a) L'égalité 1. (c) i., donne

$$P_{2k+1}(1) = -P_{2k+1}(0) \tag{15}$$

Mais d'après la propriétés iii. du 1. (a)

$$P_n(1) - P_n(0) = 0. \tag{16}$$

(b) D'après (16) et 1. (b), pour tout entier $n \geq 2$,

$$B_n = P_n(0) = P_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}.$$

et donc :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = 0 \tag{17}$$

Les nombres de Bernoulli d'indices impairs supérieurs à 1 étant nuls, l'écriture de (17) pour $n = 0, 2, 4, \dots, 2p$ donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 = 1, \\ \binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{2} B_2 = - \binom{4}{1} B_1, \\ \binom{6}{0} B_0 + \binom{6}{2} B_2 + \binom{6}{4} B_4 = - \binom{6}{1} B_1, \\ \vdots \\ \binom{2p+2}{0} B_0 + \binom{2p+2}{2} B_2 \cdots + \binom{2p+2}{2p-2} B_{2p} = - \binom{2p+2}{1} B_1. \end{array} \right.$$

3. (a) Commençons par des remarques. Soit $k \in \mathbf{N}$,

- D'après 1. (c) i. $P_{2k+1}(\frac{1}{2}) = -P_{2k+1}(\frac{1}{2})$, donc $P_{2k+1}(\frac{1}{2}) = 0$. Donc P_{2k+1} s'annule en 0, 1 et $\frac{1}{2}$.
- D'après 1. (c) ii. $P_{2k}(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2^{k-1}} - 1) P_k(0)$ Donc $P_{2k}(\frac{1}{2})$ est de signe opposé à $P_{2k}(0)$. Rappelons avoir vu que $P_{2k}(0) = P_{2k}(1)$.

Notons alors pour tout entier $k \geq 1$, On note \mathbf{R}_k la propriété : P_{2k+2} admet dans $]0, 1[$ exactement deux racines l'une dans $]0, \frac{1}{2}[$ l'autre dans $]\frac{1}{2}, 1[$, en lesquelles il change de signe ;

- L'expression de P_2 , assure que \mathbf{R}_1 est vraie.
- Soit un entier $k \geq 1$. On suppose que \mathbf{R}_k est vrai.
On note α et β les racines de P_{2k} , $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta < 1$. Pour fixer les idées on suppose $P_{2k} > 0$ sur $]0, \alpha[$. Comme alors P_{2k} est proportionnel à la dérivée de P_{2k+1} , on a les variations de P_{2k+1} et son signe, puis comme P_{2k+1} est proportionnel à la dérivée de P_{2k+2} , on a les variations de P_{2k+2} :

t	0	α	$\frac{1}{2}$	β	1		
P_{2h}	+	0	-	-	0	+	
P_{2h+1}	0	\nearrow	\searrow	0	\searrow	\nearrow	0
P_{2h+2}	\nearrow	\nearrow	\searrow	\searrow	\searrow		

Donc la fonction polynomiale P_{2k+2} induit un homéomorphisme de $]0, \frac{1}{2}[$ sur $]P_{2k+1}(0), P_{2k}(\frac{1}{2})[$ et puisque $P_{2k+2}(\frac{1}{2})$ est de signe opposé à $P_{2k+2}(0)$, P_{2k+2} s'annule en un et un seul point de $]0, \frac{1}{2}[$ en lequel il change de signe. De même P_{2k+2} s'annule t'il en un et un seul point de $]\frac{1}{2}, 1[$, en lequel il change de signe.

La propriété est \mathbf{R}_h est donc vraie pour tout entier $h \geq 1$:

P_{2k} admet dans $[0, 1]$ exactement deux zéros éléments de $]0, 1[; .$

En revenant au tableau de variations de P_{2h+1} on voit que :

P_{2h+1} admet dans $[0, 1]$ exactement trois zéros $0, \frac{1}{2}$ et 1 .

Indications pour la correction du DM n°4

Nous ne donnons pour la fin de ce problème que des indications de correction

(b) Résulte directement du tableau de variations.

4. — FORMULE D'EULER-MAC LAURIN — Soit f un élément de $\mathcal{C}^{2p+1}([0, 1], \mathbf{R})$, avec $p \in \mathbf{N}^*$.

(a) C'est du cours l'idée consiste à partir de $f(0) - f(1) = \int_0^1 f'(t)dt$. On effectue une intégration par parties en dérivant f' et en primitivant la fonction constante égale à 1 en $t - 1 \mapsto t - 1$, on obtient :

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (t - 1)f''(t)dt.$$

On peut itérer les intégrations par parties pour obtenir la formule, à chaque fois on primitive le terme polynômial de sorte que la primitive s'annule en 1.

(b) Dans la formule d'Euler-Mac Laurin on procède de même mais la fonction constante égale à 1 est primitivée initialement en en P_1 , au cours des intégrations par parties suivantes on prendra comme primitive de $P_n, \frac{1}{n+1}P_{n+1}$. La preuve se fait par récurrence

(c) Résulte de la majoration de P_{2p+1} .

(d) En remplaçant f par $t \mapsto g(a + t(b - a))$, dans la formule précédente, et par changement de variable affine « $x = a + t(b - a)$ » on obtient :

$$\int_a^b g(x)dx = (b - a) \frac{g(a) + g(b)}{2} - \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}(b - a)^{2k}}{(2k)!} (g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a)) - \frac{(b - a)^{2p+2}}{(2p + 1)!} \int_0^1 P_{2p+1}g^{(2p+1)}(a + x(b - a))dx.$$

Exercice 1

1. Notons pour commencer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ étant à valeurs *non nulles*, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n = \prod_{p=0}^n a_p \neq 0$ et donc $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ est bien défini.

Supposons que $\prod_{n \geq 0} a_n$ converge. Il existe un réel non nul L tel que $P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$. Alors $P_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$, puisque $(P_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Et donc

$$a_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{P_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

Donc

$$\underline{a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.}$$

2. — $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ donc, en particulier, on dispose de $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in \mathbf{N}$, si $n \geq n_0$, alors $|a_n - 1| < 1$. Pour tout $n \geq n_0$ on a $a_n > 0$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\prod_{p=0}^n a_p = \prod_{p=0}^{n_0-1} a_p \prod_{p=n_0}^n a_p$, avec la convention qu'un produit vide vaut 1. Or $\prod_{p=0}^{n_0-1} a_p$ est un réel *non nul*. Donc la suite $\left(\prod_{p=0}^n a_p \right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers une

limite non nulle si et seulement si la suite $\left(\prod_{p=n_0}^n a_p \right)_{n \geq n_0}$ converge vers une limite non nulle. Autrement dit, les produits $\prod_{n \geq 0} a_n$ et $\prod_{n \geq n_0} a_n$ sont de même nature.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\prod_{p=n_0}^n a_p = \exp \left(\sum_{p=n_0}^n \ln(a_p) \right), \quad (18)$$

ou de façon équivalente,

$$\ln \left(\prod_{p=n_0}^n a_p \right) = \sum_{p=n_0}^n \ln(a_p). \quad (19)$$

- *Supposons que la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(a_n)$ converge.*

L'égalité (18) et la continuité de la fonction exponentielle en $\sum_{p=n_0}^{+\infty} \ln(a_p)$ assurent

la convergence de la suite $\left(\prod_{p=n_0}^n a_p \right)_{n \in \mathbf{N}}$ vers $\exp \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(a_n) \right)$, réel non nul.

Donc par la remarque initiale $\prod_{n \geq 0} a_n$ converge.

- *Supposons que le produit $\prod_{n \geq 0} a_n$ converge.*

Alors $\prod_{n \geq n_0} a_n$ converge, cf. remarque et alors d'après (19) et la continuité du

logarithme en $\prod_{n=n_0}^{+\infty} a_n$, réel non nul, on déduit que la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(a_n)$ converge de somme $\ln \left(\prod_{n=n_0}^{+\infty} a_n \right)$.

Conclusion :

la série $\sum_{n \geq n_0} a_n$ converge si et seulement si le produit $\prod_{n \geq 0} \ln(a_n)$ converge.

3. — *Supposons que le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge.*

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1 + u_n > 0$, la question 1.a. dit que $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$ converge. Par ailleurs la convergence du produit assure que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ (cf. 1.), donc

$$0 \leq \ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n, \quad (20)$$

Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

— *Supposons que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.*

On a donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc (20) est vérifiée et donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$ converge. La question

3 assure donc que le produit $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge.

Conclusion :

le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\ln(a_n) = u_n - b_n$, ou $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} u_n^2$. Par comparaison de séries positives $\sum b_n$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge. Donc, puisque $\sum u_n$ converge, $\sum \ln(a_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.

Donc, par 3. $\sum u_n$ converge, $\prod (a_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.

5. a. Par 2, le produit $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ converge. Mais $\ln \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{p_n}$, par comparaison de séries de signe (ultimement) fixe $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ converge si et seulement si $-\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ converge.

Donc : le produit $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ converge

b. Soit N un entier supérieur ou égal à 2. pour tout $i = 1, \dots, N$ on a $\frac{1}{p_i} \in [0, 1[$ donc

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_N}\right)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_1^k} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_2^k} \dots \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_N^k}.$$

c. Soit $M \in \mathbf{N}^*$. L'égalité précédente donne :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{k=0}^M \frac{1}{p_1^k} \sum_{k=0}^M \frac{1}{p_2^k} \cdots \sum_{k=0}^M \frac{1}{p_N^k},$$

soit

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_N) \in \{0, 1, \dots, M\}^N} \frac{1}{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_N^{k_N}}.$$

Soit n un élément de $\{1, \dots, N\}$. Puisque $P_N \geq N \geq 2$, les facteurs premiers de n sont éléments de $\{p_1, \dots, p_N\}$; de plus si l'on choisit M pour que $2^M \geq N$, dans la décomposition de n en facteurs premiers aucun des exposants des facteurs n'excédera strictement M . Donc l'ensemble $\{1, \dots, N\}$ est inclus dans l'ensemble des éléments de la forme $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_N^{k_N}$ avec $(k_1, k_2, \dots, k_N) \in \{0, 1, \dots, M\}^N$. Pour ce choix de M on a donc, grâce à la dernière inégalité,

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{m=1}^N \frac{1}{m}. \quad (21)$$

Or la série $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m}$ diverge, étant à termes positifs, $\sum_{m=1}^K \frac{1}{m} \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc, d'après

(21), $\prod_{m=1}^K \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} 0$. Le produit $\prod_{m \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$ diverge.

d. Puisque pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $0 < \frac{1}{p_m} < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_m}$ et le produit $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$ sont de même nature, la série $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{p_m}$ diverge.²

2. Cela signifie qu'il y a « beaucoup » de nombres premiers, ils ne sont pas, par exemple, clairsemés comme les nombres de la forme 2^n , $n \in \mathbf{N}$, ($\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge).