DM bis n°15

Objectifs et notations

Le fil conducteur du problème est l'étude de certaines questions liées à la fonction zêta, notée ζ, définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

— Dans la partie I, on introduit la fonction ζ et on étudie son allure (variations, limites, courbe représentative).

— La partie II étudie une fonction f définie comme la somme d'une série de fonctions. Le développement en série entière de la fonction f fait intervenir la fonction ζ.

— La partie III utilise la fonction ζ pour construire une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ et montrer des résultats liant les probabilités et l'arithmétique.

I Fonction zêta

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.

1. Déterminer D_ζ.
2. Montrer que ζ est continue sur D_ζ.
3. Etudier le sens de variations de ζ.
4. Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.
5. Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.
6. En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$,
$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$
7. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
8. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
9. Donner l'allure de la courbe représentative de ζ.

II Etude d'une fonction définie par une somme

Dans cette partie, f désigne la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right).$$

On note D_f l'ensemble de définition de f.

II.A - Ensemble de définition et variations

10. Déterminer D_f.
11. Montrer que f est continue sur D_f et étudier ses variations.

II.B - Equivalents

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

12. Calculer $f(k)$.
13. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.
14. Pour tout $x \in D_f$, vérifier que $x + k \in D_f$, puis calculer $f(x+k) - f(x)$.
15. En déduire un équivalent de f en $-k$. Quelles sont les limites à droite et à gauche de f en $-k$?

II.C - Série entière

On considère la série entière de la variable réelle x donnée par $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}(-1)^k\zeta(k+1)x^k$.

16. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. Y a-t-il convergence en $x=\pm R$?
17. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f et calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout $x\in D_f$ et tout $k\in\mathbb{N}^*$.
18. Montrer qu'il existe $A\in\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]-1,1[,\qquad \left|f^{(k)}(x)\right|\leq k!\left(A+\frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right).$$

19. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\zeta(k+1)x^k.$$

II.D - Intégrales

20. Déterminer pour quels $x\in\mathbb{R}$ l'intégrale ci-dessous est convergente

$$\int_0^1\frac{t^x-1}{1-t}dt.$$

21. En remarquant que, pour tout $t\in[0,1[$, $\dfrac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n$, montrer que

$$\forall x\in]-1,+\infty[,\quad f(x)=\int_0^1\frac{t^x-1}{1-t}dt.$$

22. Déduire des questions précédentes une expression intégrale de $\zeta(k+1)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
23. Montrer enfin que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \zeta(k+1)=\frac{1}{k!}\int_0^{+\infty}\frac{u^k}{e^u-1}du.$$

III Probabilités

Rappels d'arithmétique

On rappelle ici quelques propriétés élémentaires d'arithmétique.

— Pour tout $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$, on dit que a divise b s'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $b=ka$. On dit aussi que a est un diviseur de b, ou encore que b est multiple de a.
Pour tout $a\in\mathbb{N}^*$, on note $a\mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiples de a dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi a divise b si et seulement si $b\in a\mathbb{N}^*$.

— Pour tout $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$, le plus grand commun diviseur (PGCD) de a et b est l'entier naturel noté $a\wedge b$ tel que

$$a\wedge b=\max\{n\in\mathbb{N}^*\text{ tel que } n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b\}.$$

— Pour tout $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$n\text{ divise } a\wedge b\Leftrightarrow n\text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b.$$

— On dit qu'un entier naturel p supérieur ou égal à 2 est un nombre premier si ses seuls diviseurs sont 1 et p.
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle que $\mathcal{P}$ est infini.
On note $p_1<p_2<p_3<\cdots<p_n<p_{n+1}<\cdots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi, $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, etc.

— Si $n\in\mathbb{N}^*$, si $q_1,\dots,q_n$ sont des nombres premiers distincts, alors pour tout $a\in\mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$(\forall i\in[\![1,n]\!],\quad q_i\text{ divise } a)\Leftrightarrow\prod_{i=1}^n q_i\text{ divise } a.$$

— Pour tout $a\in\mathbb{N}^*$ tel que $a\geq 2$, il existe $p\in\mathcal{P}$ tel que p divise a.

III.A - Loi zêta

24. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Montrer qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{1}{\zeta(x) n^x}.$$

On dira qu'une telle variable aléatoire X suit la loi de probabilité zêta de paramètre x.
Dans les questions suivantes de cette sous-partie III.A, on suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x > 1$.

25. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ.
26. Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X^k admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ.
27. En déduire la variance de X.
28. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^x}$.

III.B - Mutuelle indépendance

Soit x un réel tel que $x > 1$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre x.
Soit enfin $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathcal{P}^n$, un n-uplet de nombres premiers distincts.

29. Montrer que les événements $(X \in q_1\mathbb{N}^*), \ldots, (X \in q_n\mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants.

Cela entraine, et on ne demande pas de le démontrer, que leurs complémentaires sont mutuellement indépendants.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement $B_n = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$.

30. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P(X = 1)$. En déduire que
$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right).$$

III.C - Deux variables indépendantes suivant une loi zêta

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de probabilité zêta de paramètre x. Soit A l'événement « Aucun nombre premier ne divise X et Y simultanément ». Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'événement
$$C_n = \bigcap_{k=1}^{n} ((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*)).$$

31. Exprimer l'événement A à l'aide des événements C_n. En déduire que
$$P(A) = \frac{1}{\zeta(2x)}.$$

III.D - Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme

Soient U_n et V_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $W_n = U_n \wedge V_n$.

32. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2.$$

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(P(W_n = k))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ_k.

33. Montrer que
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \geq M \Rightarrow 1 - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{m} \ell_k \leq 1.$$

34. En déduire que $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

On note W une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ qui suit cette loi de probabilité. En adaptant la méthode de la question **??**, on peut établir que, pour toute partie B de $\mathbb{N}^*$, $P(W \in B) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(W_n \in B)$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.
Enfin, on admet le résultat suivant : si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout $a \in \mathbb{N}^\cdot$, $P(X \in a\mathbb{N}^*) = P(Y \in a\mathbb{N}^*)$, alors X et Y ont la même loi de probabilité.

35. Préciser la loi de W. En considérant ℓ_1, que peut-on alors en conclure ?