I.A Une partition de $[\![1,n]\!]$ est une partie à k éléments de l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$, il y a donc [1] moins de partitions à k éléments que de parties à k éléments de $\mathcal{P}([\![1,n]\!])$, c'est-à-dire $\binom{2^n}{k}$.

I.B.1) Il ne peut pas y avoir plus de n parties non vides disjointes pour un ensemble à n éléments donc si $k > n$ alors $S(n,k) = 0$.

I.B.2) Il n'y a qu'une seule partition en une partie de $[\![1,n]\!]$, qui est $\{[\![1,n]\!]\}$. Donc $S(n,1) = 1$.

I.C Soit n et k des éléments de $\mathbf{N}^*$. L'ensemble $P_{n,k}$ des partions de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k est la réunion disjointe de A ensemble des éléments de $P_{n,k}$ qui admettent $\{n\}$ comme élément et de son complémentaire $\bar{A}$.

• L'application de A dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}([\![1,n]\!]))$ qui à un élément $\{\{n\}, P_2, ..., P_k\}$ associe $\{P_2, ..., P_k\}$ est une bijection de A sur l'ensemble des partitions de $[\![1,n-1]\!]$ en $k-1$ parties, de sorte que [2] $|A| = S(n-1,k-1)$ (avec la convention $S(0,0) = 1$).

• Soit Φ l'application de $\bar{A}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}([\![1,n]\!]))$, qui à un élément de A, disons $\{\{n\}\cup P_1, P_2, ..., P_k\}$ associe l'élément $\{P_1, P_2, ...P_k\}$ est à valeurs dans l'ensemble des partitions en k parties de $[\![1,n-1]\!]$. Tout partition de $[\![1,n-1]\!]$ en k parties, $\{P_1, P_2, ..., P_k\}$ admet exactement k antécédents par Φ à savoir :

$$\{\{n\}\cup P_1, P_2, ..., P_k\}\,;\{P_1, \{n\}\cup P_2, ..., P_k\}\,; ..., \{P_1, P_2, ..., \{n\}\cup P_k\}.$$

Conséquemment [3] le cardinal de $\bar{A}$ est k fois celui de $P_{n-1,k}$.

Concluons :

$$S(n,k) = |P_{n,k}| = |A| + |\bar{A}| = S(n-1,k-1) + kS(n,k)$$

II Nombres de Bell

II.A Pour une partition de $[\![1,n]\!]$ le nombre de parties peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n. Le nombre total de partitions de $[\![1,n]\!]$ est donc égal à $\sum_{k=0}^{n} S(n,k)$ puisque $S(n,0) = 0$ pour $n \geq 1$.

II.B Notons $\mathrm{Par}(E)$ l'ensemble des partitions d'un ensemble E.
Les éléments de $\mathrm{Par}([\![1,n+1]\!]$ vont être regroupés en fonction de la partie qui contient $n+1$. Précisément, pour toute partie C, éventuellement vide de $[\![1,n]\!]$ notons E_C l'ensemble des partitions de $[\![1,n+1]\!]$ telles que l'élément qui contient $n+1$ soit $C \cup \{n+1\}$, ainsi a-t-on :

$$\mathrm{Par}([\![1,n+1]\!]) = \biguplus_{C\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])} E_C.$$

Or l'application qui à un élément de E_C, disons $\{C\cup\{n+1\}, P_2, P_3, ...\}$ associe $\{P_2, P_3, ...\}$ réalise une bijection de E_C sur l'ensemble $\mathrm{Par}([\![1,n]\!]) \setminus C)$ des partitions de $[\![1,n]\!] \setminus C$.
Donc

$$B_{n+1} = \sum_{C\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])} |E_C| = \sum_{C\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])} B_{n-|C|} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{C\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])\\ |P|=k}} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k},$$

en regroupant dans la somme les parties de même cardinal. Finalement [4]

$$B_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} B_p,$$

par changement d'indice « $p = n-k$ » et propriété de symétrie des coefficients binomiaux

II.C Toute permutation de $[\![1,n]\!]$ se décompose en un produit de cycles (éventuellement de taille 1) à supports disjoints, l'ensemble des supports de ces cycles est une partition de $[\![1,n]\!]$. L'application qui a une permutation associe la partition de $[\![1,n]\!]$ dont les éléments sont les supports de ses cycles est clairement une surjection, (chaque élément d'une partition pouvant être le support d'un cycle et même de $p!$ avec p son cardinal), donc :

$$B_n = |\mathrm{Par}([\![1,n]\!])| \leq |S_n| = n!.$$

La formule de II.B. permet alternativement de prouver le résultat par récurrence.

1. Désué, en français moderne : du coup
2. De sorte que, Archaïsme, utilsé au siècle dernier au sens de du coup.
3. Rare, synonyme de du coup.
4. Ce qui arrive à la fin, du coup.

II.D Puisque la suite $\left(\frac{B_n}{n!}1^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}z^n$ est au moins égal à 1.

II.E En dérivant terme à terme la somme de la série entière, en tout point x de $]-R,R[$; on obtient

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{p}B_p\,\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{B_b}{p!}\,\frac{1}{(n-p)!}\;z^n=\mathrm{e}^x f(x),,$$

par produit de Cauchy de séries entières dont le minimum des rayons (ici 1 et $+\infty$) est supérieur à 1. Voilà donc [5] montré $f'(x)=\mathrm{e}^x f(x)$.

II.F D'après II.E, f est **la** solutionsur $]-R,R[$ du problème d'Augustin Cauchy $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x y,\ y(0)=1$. Donc

$$f\ :]-R,R[\to\mathbf{R}\,;\ x\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1}.$$

III Une suite de polynômes

III.A La famille $(H_0,...,H_n)$ est libre puisque les polynômes ont des degrés échelonnés. Tous les polynômes sont dans $\mathbf{R}_n[X]$ et ils sont au nombre de $n+1$ qui est la dimension de $\mathbf{R}_n[X]$. La famille est donc une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

III.B.1) $H_{k+1}(X)=(X-k)H_k(X)$ donc $H_{k+1}(X)+kH_k(X)=XH_k(X)$.

III.B.2) (Exercice) Cela se montre très vite par récurrence sur n grâce à III.B.1).

III.C.1) Pour tout $n\in\mathbf{N}$, $0\leq S(n,k)\leq B_n$ donc le rayon de convergence de $\sum\frac{S(n,k)}{n!}x^n$ est au moins égal à 1, qui est celui de $\sum\frac{B_n}{n!}x^n$. La fonction f_k est donc définie sur $]-1,1[$.

III.C.2) Pour tout entier $k\geq 1$ on a : $g_k'(x)=\frac{(\mathrm{e}^x-1)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^x=\frac{(\mathrm{e}^x-1)^{k-1}}{(k-1)!}+kg_k(x)$.
Donc g_k est solutionsur $\mathbf{R}$ de

$$y'=ky+\frac{(\mathrm{e}^x-1)^{k-1}}{(k-1)!}.\qquad (E_k)$$

III.C.3) Montrons par récurrence sur k la propriété, noté (P_k) « f_k et g_k coïncident sur $]-1,1[$ ». .

- (P_0) est vraie puisque $g_0(x)=1=S(0,0)$ et $S(n,0)=0$ pour $n\geq 1$.
- Soit $p\in\mathbf{N}^*$. Supposons (P_{p-1}). Pour tout $x\in]-1,1[$ on a :

$$f_p'(x)=\sum_{n\geq p-1}S(n+1,p)\frac{x^n}{n!}.$$

Grâce à le I.C, et (P_{p-1}), pour tout $x\in]-1,1[$, on a :

$$f_p'(x)=\sum_{n\geq p-1}(S(n,p-1)+pS(n,p))\frac{x^n}{n!}=g_{p-1}(x)+pf_p(x)$$

L'application f_p est donc LA solutionsur $]-1,1[$ du problème de Cauchy $\begin{cases}(E_p)\\ y(0)=0\end{cases}$, g_p itou. D'où (P_p).
Par récurrence on a prouvé que f_k et g_k coïncident sur $]-1,1[$, pour tout entier $k\geq 0$.

III.D.1) Le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ donne, pour tout $x\in]-1,1[$:
$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}H_k(\alpha)\frac{x^k}{k!}.$$

III.D.2) Soit un réel $u<\ln 2$. Alors

$$-1=0-1\leq \mathrm{e}^u-1\leq \mathrm{e}^{\ln 2}-1=1,$$

si bien que [6] $\mathrm{e}^u-1\in]-1,1[$. On a alors [7] $\mathrm{e}^{u\alpha}=(1+(\mathrm{e}^u-1))^\alpha=\sum_{k=0}^{+\infty}H_k(\alpha)\frac{(\mathrm{e}^u-1)^k}{k!}$.

5. formule expressive, proche de du coup
6. introduit la conséquence, du coup.
7. Adverbe temporel approximativement du coup

IV Fonctions génératrices

IV.A Si $G_Y(t)=\sum_{n\geq 0} P(Y=n)t^n$ a un rayon de convergence strictement supérieur à 1, alors on peut *ipso facto*[8] dériver m fois au point $t=1$ et obtenir $G_Y^{(m)}(1)=\sum_{n\geq m} P(Y=n)n(n-1)...(n-m+1)$. On en déduit soit par récurrence sur m, soit en notant que $0\leq P(Y=n)n(n-1)...(n-m+1)\sim nP(Y=n)n^m$, que $\sum_{n\geq 0} P(Y=n)n^m$ converge pour tout entier $m\geq 1$.

IV.B.1) $G_Y(t)=\sum_{n\geq 0} P(Y=n)t^n$ ayant un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, la restriction de $G_Y(t)$ à $]-1,1[$ est $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout entier $m\geq 0$ et tout $t\in]-1,1[$:

$$G_Y^{(m)}(t)=\sum_{n\geq m} P(Y=n)n(n-1)...(n-m+1)t^{n-m}.$$

• D'abord, l'existence d'une espérance assure la convergence absolue de $\sum P(Y=n)n(\pm 1)^n$, le théorème d'Abel appliqué à la série entière $\sum P(Y=n)n(\pm 1)^n t^n$ assure la continuité de G_Y en ± 1, donc la continuité de la restriction de $G_Y^{(m)}$ à $[-1,1]$

• Ensuite et toujours en utilisant le théorème d'Abel, pour tout $m\in\mathbf{N}^*$, l'existence d'un moment d'ordre m assure que $G_Y^{(m)}$ admet une limite en ± 1.

Le célèbre théorème du prolongement du caractère $\mathcal{C}^m$ affirme que G_Y est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.

IV.B.2) On obtient

$$G_Y^{(k)}(1)=\sum_{n\geq k} P(Y=n)n(n-1)...(n-k+1)=\sum_{n\geq k} P(Y=n)H_k(n).$$

IV.B.3) La famille $(\mathrm{e}^{-\sqrt{n}})_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable, puisque $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}=o(\frac{1}{n^2})$. En notant A la somme de ladite famille, $(\frac{1}{A}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}})_{n\in\mathbf{N}}$ définie la loi d'une variable aléatoire Y à valeurs entières (la famille est positive de somme 1). Le rayon de convergence de la fonction génératrice de Y est 1, en effet pour $t>1$, $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}t^n=\mathrm{e}^{-\sqrt{n}+n\ln t}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Néanmoins pour tout entier $m\geq 1$, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{A}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}n^m$ converge, puisque $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}n^m=o(\frac{1}{n^2})$.

IV.C.1) Soit $n\in\mathbf{N}$. Dans ce cas particulier, $G_Y(t)=\sum_{k\geq 0}\mathrm{e}^{-1}\frac{t^k}{k!}=\mathrm{e}^{t-1}$.

$\mathbf{E}(Y^n)=\sum_{k\geq 0}\mathrm{e}^{-1}\frac{k^n}{k!}=\mathrm{e}^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n}S(n,j)H_j(k)$ en utilisant le III.B.2).

On en déduit par linéarité de la somme de séries convergentes, :

$\mathbf{E}(Y^n)=\sum_{j=0}^{n}S(n,j)\sum_{k\geq 0}H_j(k)P(Y=k)$.

Avec le IV.B.2, $\sum_{k\geq 0}H_j(k)P(Y=k)=G_Y^{(j)}(1)=G_Y(1)=1$. On obtient que $\mathbf{E}(Y^n)=\sum_{j=0}^{n}S(n,j)=B_n$.

IV.C.2) Si $Q(X)=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ est un polynôme à coefficients entiers on déduit de $\sum_{n\geq 0}\frac{n^k}{n!}=\mathrm{e}\mathbf{E}(\mathrm{Y^k})=\mathrm{eB_k}$:

$\sum_{n\geq 0}\frac{Q(n)}{n!}=\mathrm{e}\sum_{k=0}^{d}a_kB_k$ qui est bien le produit de e par un entier.

Du coup c'est fini.

8. Équivalent latin de du coup