I. Reconnaître une matrice de projection.—

La matrice carrée M représente une **projection** si, et seulement si, $M^2 = M$.

❧ Si $\mathscr{B}$ est une *base orthonormée* d'un espace euclidien E, la projection p est une **projection orthogonale** si, et seulement si, la matrice $M = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ est une matrice *symétrique*.

▶ *Vérifier que les matrices suivantes représentent des matrices de projection.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 12 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -4 & 6 \\ -6 & 11 & -9 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} \qquad A_8 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_9 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_{11} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -12 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II. Sous-espaces supplémentaires.—

Deux sous-espaces F et G de E sont **supplémentaires** si, et seulement si,

$$\forall\, x \in E,\ \exists!\ (y, z) \in F \times G, \qquad x = y + z.$$

❧ Pour démontrer que deux sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E, il suffit de vérifier qu'ils sont **en somme directe** :

$$\underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} = \mathbf{0}_E \quad \Longrightarrow \quad y = z = \mathbf{0}_E$$

(ce qui revient à démontrer que $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$) et que

$$\dim E = \dim F + \dim G.$$

▶ *Démontrer que, dans chacun des cas suivants, la droite F et le plan G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.*

$$\begin{aligned}
F_1 &= \mathbb{R} \cdot (1, 3, -2) & G_1 &= [x - 2y + z = 0] \\
F_2 &= \mathbb{R} \cdot (4, -1, 2) & G_2 &= [x + y - 3z = 0] \\
F_3 &= \mathbb{R} \cdot (-2, 3, 5) & G_3 &= [2x - 2y + 3z = 0] \\
F_4 &= \mathbb{R} \cdot (1, 1, -1) & G_4 &= \operatorname{Vect}\big((1, -1, 0), (2, 1, -3)\big) \\
F_5 &= \mathbb{R} \cdot (2, 3, 0) & G_5 &= \operatorname{Vect}\big((1, 2, 1), (1, 0, -1)\big) \\
F_6 &= [2x + y + z = 0] & G_6 &= \mathbb{R} \cdot (1, -2, 1) \\
F_7 &= [x - y + 2z = 0] & G_7 &= \mathbb{R} \cdot (3, 1, 1) \\
F_8 &= \operatorname{Vect}\big((2, 1, 1), (1, -1, 2)\big) & G_8 &= \mathbb{R} \cdot (2, -2, 3) \\
F_9 &= \mathbb{R} \cdot (3, 1, 1) & G_9 &= \operatorname{Vect}\big((3, 1, -1), (1, 3, 2)\big) \\
F_{10} &= \operatorname{Vect}\big((1, -1, -1), (1, -3, 1)\big) & G_{10} &= \mathbb{R} \cdot (1, -2, 1)
\end{aligned}$$

III. Caractériser une projection.—

Si $p \in \mathrm{L}(E)$ est une projection, alors

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \qquad \text{où} \qquad \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{I} - p) = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{I}).$$

Réciproquement, si $E = F \oplus G$, il existe une, et une seule, projection p telle que $\operatorname{Im} p = F$ et $\operatorname{Ker} p = G$.

La projection p représentée par la matrice M est donc caractérisée par les sous-espaces $\operatorname{Ker} M$ (la **direction** de projection) et $\operatorname{Ker}(M - I_n)$ (le sous-espace sur lequel on projette).

❧ Si p est une projection orthogonale, alors $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^{\perp}$ (et, symétriquement, $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^{\perp}$), de telle sorte qu'il suffit de caractériser un seul de ces deux sous-espaces.

► *Pour les matrices $M = A_k$ ($1 \leqslant k \leqslant 12$), caractériser les sous-espaces $\operatorname{Ker} M$ et $\operatorname{Ker}(M - I_3)$.*

IV. Calculer la matrice d'une projection.—

Soient F et G, deux sous-espaces supplémentaires dans E.

La projection p sur F parallèlement à G et la projection q sur G parallèlement à F sont liées par la relation

$$q = \operatorname{Id}_E - p.$$

Si $E = \mathbb{R}^3$, l'un des deux sous-espaces est une droite (et l'autre est donc un plan), il est beaucoup plus commode de calculer la projection sur la droite que de calculer la projection sur le plan. Il est donc pratique de commencer par calculer celle-là avant d'en déduire celle-ci.

► *Pour chacun des couples (F_k, G_k) du II., calculer la matrice relative à la base canonique de la projection sur F_k parallèlement à G_k.*

► *Si $F = \mathbb{R} \cdot \boldsymbol{u}$ et si $G = \operatorname{Ker} \varphi$ sont supplémentaires dans E, alors la projection sur F parallèlement à G s'exprime*

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in E, \qquad p(\boldsymbol{x}) = \frac{\varphi(\boldsymbol{x})}{\varphi(\boldsymbol{u})} \cdot \boldsymbol{u}.$$

Si le vecteur $\boldsymbol{u}$ et la forme linéaire φ sont respectivement représentés par la colonne U et la ligne L dans une même base $\mathscr{B}$ de E, alors

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \frac{1}{LU} \cdot UL.$$